経済時系列の季節調整に関する問題点とそれに関する一二の考察

——米国センサス局法を中心として——

石　田　正　次

(1964 年 11 月 受付)

Statistical Investigation on Seasonal Adjustment of Economic Time Series

Masatugu Isida

Among the available methods of seasonal adjustment for economic time series, Census Method (National Bureau of Census, U.S.A.) has been considered to be the most reliable one by many Japanese who have worked with such series. But when Census Method is applied to the series with steep trend and big cycle, occasionally it brings some unsuitable results. Although many of the criticisms of Census Method and the approaches to evaluate its characteristics have been published already, we tried some tests from our own standpoint concerning with X-8, X-10 and EPA-1 (this method was designed by Economic Planning Agency of Japan and is one of the versions of Census Method.).

1. Distortion in trend and cycle, seasonal variation and irregular component.

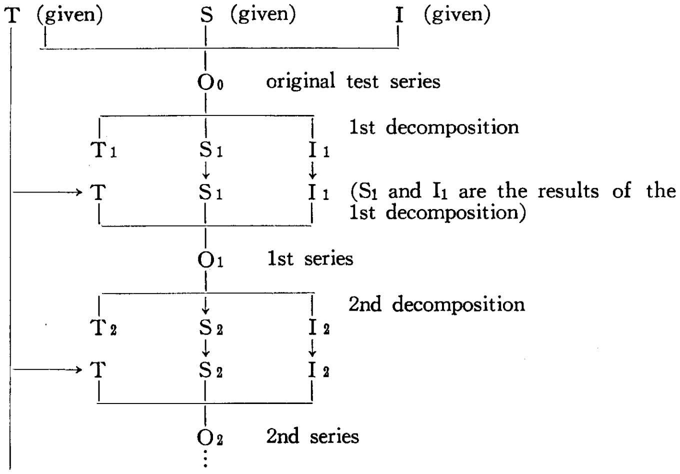
In Census Method, many types of moving average are used for smoothing of data. But it is not reasonable to apply moving average to the multiplicative model. Especially when the trend and the seasonal variation (or trend and irregular component) are highly correlated, moving average causes a large amount of distortion. Many of the economic time series of Japan have the almost monotone increasing trends and the seasonal variations with a small peak at August and a great peak at December. Therefore the distortion of this kind is not negligible.

In order to evaluate the order of it, using X-8, X-10 and EPA-1, we tried the decomposition of the test series of which components T, S and I were known, and got the following results.

The reproducibility of trend and cycle is passable, although some defects are found; the phase shifting of cycle, the lack of smoothness, level up and level down in trend (rectifier effect).

The separation of seasonal variation and irregular component is hopeless. The series contains the larger amount of irregular component, the more the distortion of seasonal variation increases.

For the purpose of making the tendency of distortion clear, the following test computation was carried out.



The result of this test is that the distortion is accumulated more and more in one direction, and in some cases, it seems to converge to certain specific pattern. Fig. 10 shows the aspects of two different types of seasonal variation are tending to the same shape according to the repetition of computation.

The distortion of the irregular component has the specific pattern too. Namely, in every correlogram of the irregular component in the result of adjustment, the negative values appear at the point of two and eleven months. It shows the over filtering of the frequencies corresponding to these points.

2. The effect of successive approximation

In Census Method, the series are adjusted through the following steps,

$$O \to T \to SI \to S \to TI \to T \to SI \to S \to TI \to T \to I$$

From the methodological point of view, the sense of this successive approximation seems to be something different from the usual one in numerical computation because of the intervention of random variable. In order to test whether this successive approximation was effective or not, we tried twenty times repetition of it, checking the variation of the result in each step, and found that the improvement of accuracy by this method was not able to be expected.

The general aspect of the result is almost determined at the first approximation and the change in the successive steps is negligible small.

3. Stability of the results.

Usually the seasonal adjustment is carried out every year with each economic time series. In this case, if the result varies with the length of the data, we must always worry about the use of the seasonally adjusted data.

Fig. 12, 13 show the seasonal variations computed with the Data of 7, 8, 9 and 10 years length. In these Figures, we can see that the order of the distortion is not small and does not depend on the length of data but only the characteristics of T, S and I in the test series.

In order to avoid the difficulties of Census Method, some of its versions have been investigated in Japan. But it seems that the results are not fruitful because the problems are more fundamental. Generally, the method of seasonal adjustment should be valid methodologically and be reliable practically.

Institute of Statistical Mathematics

§1. まえがき

経済時系列の季節変動調整法に関する研究は決して新しい問題とはいえないが，経済分析が精緻の度を加えるにつれて，近時，その研究は米国を中心にして再び盛んになり，調整法自体も電子計算機の発達普及に伴って次第に複雑化する傾向にある．

古くから広く利用されてきた移動平均法や Link Relatives 法においては加法モデルであれ，乗法モデルであれ，季節変動が各年で一定であるとして取扱われてきたが，ある種の経済時系列においては季節変動の型が年とともに少しずつ変化するようにみえるものがある．このようなものを処理するために米国 Bureau of Federal Reserve の H. C. Barton は季節変動が一定でなく漸次（連続的に）変っていくという立場から季節変動の調整法を考え出した．この方法では各月別に季節指数の年次変化をフリーハンドによって追うという手段を用いているが，これは非常な労力を要する上に，結果が多分に人為的要素に左右されるために，その結果の客観性が保証されない．J. Shiskin (Bureau of Sensus) は電子計算機を利用することによって，この欠陥の改善を試みた．これがセンサス局法の原形となった Census Method I と呼ばれるものである．

その後，Shiskin は National Bureau of Economic Research の協力を得てその研究を続け，一連の調整法 Method II を発表している．これらの方法は米国以外のカナダ，オーストラリア，ノルウェーなどの諸国，O.E.C.D. などの諸機関においても採用されているほか，これに関する研究がいろいろのところで始められた．

日本においては経済企画庁，労働省，日本銀行などにおいて特に活発な研究や作業が進められているが，理論上，また実用上決定的な方法がないまま，世界的に広く用いられているセンサス局法そのもの，あるいはその変形とか簡略法が業務上の主流となっているようである．しかしながら，このセンサス局法ももちろん完全なものではなく，逐次その改良が試みられているとはいえ，いろいろな問題が多い．センサス局法に全面的に反対する学者もあり，批判や吟味の論文もいくつか見受けられるが，ここではセンサス局法のうち X-8, X-10 および経済企画庁 (EPA-1) の乗法モデルを主として，その特性を比較検討し，それらの問題点に関して一，二の考察を行なってみたい．なお，ここで述べられるものはすべて月次データの調整のみであり，四半期のものにはふれない．

この研究は文部省各個研究費によるものであり，そのほか日本銀行統計局の助力も得ている．また御援助御協力をいただいた次の方々に厚く御礼の意を示す．

日本銀行統計局	江口英一	黒川恒雄	和田節子
経済企画庁	田口三郎	岡田忠昭	
統計数理研究所	駒沢　勉	坂本静子	東条早苗

§2. 経済時系列のモデル構成

経済時系列は一般に,

Secular trend	(トレンド)
Cyclic part	(景気変動)
Seasonal variation	(季節変動)
Irregular fluctuation	(不規則変動)

の四つの要素の合成であるという考えは基本的にみて, Harvard 景気研究所における W. C. Mitchell の研究以来現在までそのまま踏襲されてきたとみることができよう. そしてこれら四つの要素に対して, 経済時系列を扱う者の頭の中にはそれぞれ観念的なイメージが描かれ, そのイメージにできるだけ近い結果の得られるような調整法を生みだすべく長い間多くの努力が払われてきたように思える.

季節変動のよい調整法を作るために, また, 調整法の良し悪しを評価するためには, これらのイメージをより詳しく規定して数式的に表現するのが便利である. 四つの要素について今まで仮定され, また予期されてきた性質は時として非常にあいまいであり, しかも都合主義的きらいはあるが, 大略次のようにまとめることができよう.

a. Secular Trend ($\boldsymbol{T}$)

月別データでみたとき少なくとも1ケ年程度の範囲で単調増大または減少するスムーズな曲線であって, それぞれの経済量の性格から, 直線, 指数曲線, 生長曲線, またはそれらの複合など部分的には比較的単純な曲線によってフィットされる.

b. Cyclic Part ($\boldsymbol{C}$)

基本的には季節変動調整によってスムージングされた経済時系列からある仮定されたTrendを除き去った残差であって, 通常は2年以下の周期成分をもたない. この要素と Trend を分離することは季節調整法以外の問題となるので以下の議論においては $\boldsymbol{T}$ と $\boldsymbol{C}$ とをまとめて, 一応 Trend と呼ぶことにする.

c. Seasonal Variation ($\boldsymbol{S}$)

何らかの意味で1年およびそれ以下の周期に関連した規則性をもつ要素であって, 予測の可能性をもつ成分である.

d. Irregular Fluctuation ($\boldsymbol{I}$)

これは一般に原データから $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{S}$ の要素を除き去った残りの成分として定義されるが, 更にこれに確率論的な性質を附加することが多い.

また四要素の合成についてのモデルとしては次のようなものをあげることができよう.

i) 加法モデル (A)

このモデルは数学的に最も取り扱いやすいタイプであって, その構造は原系列を $\boldsymbol{O}_{ij}$ とすれば,

$$\boldsymbol{O}_{ij}=\boldsymbol{T}_{ij}+\boldsymbol{S}_{ij}+\boldsymbol{I}_{ij} \quad (i\text{: 年},\ j\text{: 月})$$

と書き表わせる. (Cyclic Part は $\boldsymbol{T}$ に含まれているものとし, $\boldsymbol{T}$ と $\boldsymbol{C}$ との分解は本稿においては考えない). ここで各 i について常に,

$$\sum_{j=1}^{12}\boldsymbol{S}_{ij}=0$$

が成立するとし, 更に $\boldsymbol{I}_{ij}$ は定常的な確率変数と仮定することが多い.

ii) 乗法モデル (M 1)

$$\boldsymbol{O}_{ij}=\boldsymbol{T}_{ij}\cdot\boldsymbol{S}_{ij}+\boldsymbol{I}_{ij}$$

このモデルは Seasonal Variation が乗法で Irregular fluctuation が加法的に入っており,

$$\sum_{j=1}^{12} T_{ij}=\sum_{j=1}^{12} S_{ij}\cdot T_{ij}$$

であること, および I の定常性を仮定する. ここで注意しなければならないことは,

$$\sum_{j=1}^{12} S_{ij}=12$$

を仮定しても前記の Seasonal Variation に関する仮定は一般に満たされないということで, またこれを満足させようとすれば S は当然 T に従属する変数となり, いわゆる季節指数としての概念からはかなりはずれたものになってしまうということである.

iii) 乗法モデル (M 2)

$$O_{ij}=T_{ij}S_{ij}I_{ij}$$

三つの要素が全部乗算で入っているモデルであって, ここでもやはり,

$$\sum_{j=1}^{12} T_{ij}=\sum_{j=1}^{12} S_{ij}T_{ij}$$

を仮定する. このモデルにおいては I の定常性を仮定しても, その処理の上であまり効果的ではないことが多い.

iv) 複合モデル (MA)

$$O_{ij}=T_{ij}S_{ij}+A_{ij}+I_{ij}$$

S_{ij} は乗法型の, A_{ij} は加法型の Seasonal Variation であり,

$$\sum_{j=1}^{12} T_{ij}=\sum_{j=1}^{12} T_{ij}S_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{12} A_{ij}=0$$

とし, 更に I の定常性も仮定する. このモデルは当然前述の A 型, M 1 型を含む.

以上が最も簡単で, しかも基本的なモデルであるが, 原系列をその構成要素に分解するためには更に各要素に強い制限を加えなければならない.

§ 3. 季節変動調整法の評価の基準について

調整法の良し悪しをただ莫然と「都合の悪い場合が起る」から悪いとか「実用上充分な結果が得られる」からさしつかえないという具合に判断してしまうことは, 評価自体の客観性をそこなうばかりではなく, 調整法の研究に歪みをもたらすことにもなりかねない. 都合の悪い場合とは何か, 実用上充分とは何かということをもっと具体的にしかも客観的に規定しなければ, 調整法の研究は常にその立場をもちえないであろう.

ここではまず経済時系列の統計的モデルを前提として調整法の評価を次に述べるような観点から行なっていきたい.

1) 妥 当 性

これは原データを T, S, I の三つの要素に分解する数学的手法が, その前提となったモデルの構造からみて正当なものであるかどうか. つまり調整法の理論的根拠が正しいかどうかの問題である. 例えば § 2. の i) で述べた加法モデル,

$$O_{ij}=T_{ij}+S_{ij}+I_{ij}\quad (i\text{: 年}, \ j\text{: 月})$$

において T が時間に関してほぼ直線的関係にあり,

$$\sum_{j=m}^{12} S_{ij}+\sum_{j=1}^{m-1} S_{i+1j}=0\quad (1\leqq m\leqq 12)$$

が成立して, しかも I が分散の小さい平均 0 の 定常的な確率変数であれば, 中心化 12 ヶ月移動平均法 (原データの 12 ヶ月移動平均値を更に 2 項目移動平均する) は妥当性のある方法

ということができる．もし，調整法にここでいう妥当性がないならばわれわれは得られた結果について，常に不安をもたなければならないであろうし，またその方法を用いた研究や業務に対する批判に対しても何ら反駁することができないであろう．

2) 再 現 性

調整法の妥当性が厳密に保たれていたとしても調整後の結果が常に理想的なものであるとは限らない．例えば，前にあげた加法モデルに対して中心化 12 ケ月移動平均法を用いることは方法論として確かに妥当なものではあるが，これによって不規則変動が完全に消失するわけではないし，トレンドのゆるやかな変化も多少ながら歪みをうけるであろう．また場合によっては計算誤差が問題となることも考えられる．つまり，ある仮定のもとで $\boldsymbol{T}, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{I}$ を選び，定められたモデルの型に従ってモデル系列を作り，これをある方法で調整して新たに $\boldsymbol{T}', \boldsymbol{S}', \boldsymbol{I}'$ を得たとき，それぞれが果して実際に一致するかどうかということも見逃せないことである．これを仮りに再現性の問題と名づけておこう．勿論これらが完全に一致するということは通常望めないので，その違いの程度を計る方法をも考えておかなければならない．

$$\sum(\boldsymbol{T}-\boldsymbol{T}')^2,\ \sum(\boldsymbol{S}-\boldsymbol{S}')^2,\ \sum(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{I}')^2$$

などの残差もその一つの尺度ではあるが，季節調整法においては型（パターン）のくずれも大きな問題である．$\boldsymbol{T}$（この場合は $\boldsymbol{C}$ をも含んでいる）の極値の時間的ずれ，$\boldsymbol{I}$ の系列相関の変化などがその例である．しかもこのくずれ方に一つの傾向がある場合は特に注意しなければならない．型の歪みは時として歪みの大きさよりも致命的なことがある．

3) 安 定 性

妥当性，再現性が満たされれば，その方法はまず完全なものとみなすことができるが，これだけでは，結果の安定性という点で問題が残る．例えば原データが短かい場合はどうなるか，n 年で計算した結果と $n+1$ 年で計算した結果とはどれ位の相違が生じるか，$\boldsymbol{S}, \boldsymbol{I}$ の性質の違いが結果にどのような影響を及ぼすかなどで，これは実用上重要なことである．

§4. センサス局法の計算手順

センサス局法に属する調整法では，すべて移動平均によるスムージングとその反復による逐次近似的手法が用いられているが，その概略を述べるための便宜上，

$$\begin{array}{lccccc} & 1月 & 2月 & 3月 & & 12月 \\ \boldsymbol{X}: & x_1, & x_2, & x_3, & \cdots\cdots\cdots\cdots, & x_{12} \\ & x_{13}, & x_{14}, & x_{15}, & \cdots\cdots\cdots\cdots, & x_{24} \\ & \vdots & & & & \vdots \\ & x_{n-11}, & x_{n-10}, & x_{n-9}, & \cdots\cdots\cdots, & x_n \end{array}$$

について次のような記号を定義しておく．

i) $\vec{X}(2m+1)$: $\vec{x}_{m+1},\ \vec{x}_{m+2},\ \cdots\cdots\cdots$

これは $(2m+1)$ 項(月)移動平均値を示し，第 i 番目の項は，

$$\vec{x}_i=\frac{1}{2m+1}\sum_{j=i-m}^{i+m} x_j$$

である．また単に移動平均だけを示し項数の必要のないときはカッコをはぶく．$(2m+1)$ 項の移動平均では，はじめの m 項と最後の m 項はその値を求めることができない．移動平均の項数は特別な場合のほか奇数であって偶数項の移動平均が必要の場合は次の中心化が用いられる．

ii) $\vec{\vec{X}}(2m)$: $\vec{\vec{x}}_{m+1},\ \vec{\vec{x}}_{m+2},\ \cdots\cdots\cdots$

これは中心化移動平均で第 i 番目の項は，

$$\overset{\Rightarrow}{x}_1=\frac{1}{4m}\left(\sum_{j=i-m}^{i+m-1}x_j+\sum_{j=i+1-m}^{i+m}x_j\right)$$

である．中心化移動平均は 12 項目移動平均のように偶数項の移動平均が必要の場合に用いられるが，これは $2m$ 項移動平均は $2m$ 項移動平均の 2 項目移動平均で，形式的に書けば，

$$\overset{\Rightarrow}{X}(2m)=[\overrightarrow{\overrightarrow{X}(2m)}](2)$$

となる．この場合の欠項数はやはり前後とも m こである．

iii) $\overset{\twoheadrightarrow}{X}(2m+1)$: $\overset{\twoheadrightarrow}{x}_{m+1}$, $\overset{\twoheadrightarrow}{x}_{m+2}$, ………

これは X の $2m+1$ 項加重移動平均で第 i 項は，

$$\overset{\twoheadrightarrow}{x}_i=\sum_{j=i-m}^{i+m}w_jx_j$$

ただし，w_{i-m}, ……, w_{i+m} はウエイトで

$$\sum_{j=i-m}^{i+m}w_j=1$$

である．例えば 12 ケ月中心化移動平均 $\overset{\Rightarrow}{X}(12)$ は $\overset{\twoheadrightarrow}{X}(13)$ においてウエイトが，

$$\frac{1}{24},\ \frac{2}{24},\ \frac{2}{24},\ \frac{2}{24},\ \frac{2}{24},\ \frac{2}{24},\ \frac{2}{24},\ \frac{2}{24},\ \frac{2}{24},\ \frac{2}{24},\ \frac{2}{24},\ \frac{2}{24},\ \frac{1}{24}$$

となる．

iv) $X\!\downarrow\!(2m+1)$: $x\!\downarrow_{m+1}$, $x\!\downarrow_{m+2}$, ………

X の月別移動平均で

$$x\!\downarrow_i=\frac{1}{2m+1}\sum_{j=-m}^{m}x_{i+12j}$$

v) $X\!\Downarrow\!(2m+1)$: $x\!\Downarrow_{m+1}$, $x\!\Downarrow_{m+2}$, ………

同じく X の月別加重移動平均で

$$x\!\Downarrow_i=\sum_{j=i-m}^{i+m}w_jx_{i+12j}$$

ただし，w_{i-m}, ……, w_{i+m} はウエイトで，$\sum_{j=i-m}^{i+m}w_j=1$

vi) $\overrightarrow{X}(k\cdot l)$

これは X を k 項目移動平均した系列を更に l 項目移動平均した系列を示す．一般にカッコの中は $(k\cdot l\cdot m)$ のようにいくつあってもよいとする．例えば，

$$\overset{\Rightarrow}{X}(12)=\overrightarrow{X}(12\cdot 2)$$

である．

これらの記号によって，センサス局法の系統に属する調整法の概略を述べれば次のようになろう．

原データの系列を O とすれば，

$$O=T*S*I$$

ただし，T: トレンドおよび景気変動の系列

S: 季節変動の系列

I: 不規則変動の系列

で，各要素の結びつきを示す記号 * は乗算または加算を示す．つまり §2 のモデルの形でいえば A 型または M2 型である．

予備段階

$\boldsymbol{T}=\overrightarrow{\boldsymbol{O}}(12)$:　原データに中心化12ケ月移動平均をほどこしたものをもって $\boldsymbol{T}$ とする.

第1段階

$\boldsymbol{S}*\boldsymbol{I}=\boldsymbol{O}/\boldsymbol{T}$ (M2型):　原データの各項をこれに対応する $\boldsymbol{T}$ でわる (A型ではひく)

または

$\boldsymbol{S}*\boldsymbol{I}=\boldsymbol{O}-\boldsymbol{T}$ (A 型)

第2段階

$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{S}*\boldsymbol{I}\!\downarrow$:　前段階で得た $\boldsymbol{S}$ の系列を月別移動平均したものをもって $\boldsymbol{S}$ の第1近似とする.

第3段階

$\boldsymbol{T}*\boldsymbol{I}=\boldsymbol{O}/\boldsymbol{S}$:　$\boldsymbol{O}$ を $\boldsymbol{S}$ でわる (または $\boldsymbol{O}$ から $\boldsymbol{S}$ をひく)

または

$\boldsymbol{T}*\boldsymbol{I}=\boldsymbol{O}-\boldsymbol{S}$

第4段階

$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}\overset{\Rightarrow}{*}\boldsymbol{I}$:　$\boldsymbol{T}*\boldsymbol{I}$ を移動平均して $\boldsymbol{T}$ の第1近似とする.

第5段階

$\boldsymbol{I}=\boldsymbol{T}*\boldsymbol{I}/\boldsymbol{T}$:　$\boldsymbol{T}*\boldsymbol{I}$ を $\boldsymbol{T}$ でわったもの (またはひいたもの) をもって $\boldsymbol{I}$ の第1近似とする.

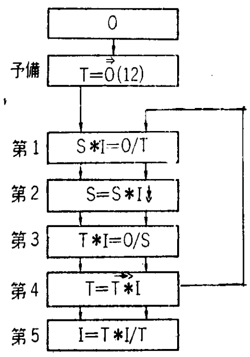
または

$\boldsymbol{I}=\boldsymbol{T}*\boldsymbol{I}-\boldsymbol{T}$

第6段階:　第4段階の $\boldsymbol{T}$ を用いて第1段階にもどり $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{I}$ の第2近似をつくる.

第7段階:　第6段階の $\boldsymbol{T}$ を用いて第1段階にもどり $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{I}$ の第3近似をつくる.

以上のことをブロック・ダイヤグラムで書けば第1図のようになる.



加法モデルでは／の代りに−になる

第1図　センサス局法の概略

実際の計算にあたっては，第1図では不充分であって，このほかに細部についていろいろの規定を設けなければならない．例えば

i)　平均移動による欠項はどうするか

a)　そのままにしておく.

b)　適当にデータを外挿しておいてから移動平均する.

c)　移動平均してから欠項を外挿する.

d)　その他の方法をとる.

ii)　移動平均の長さ，加重移動平均のウエイトはどうするか

a)　12ケ月，スペンサーなど，どこで何を使うかを決めておく.

b)　いくつかのタイプを予め用意しておいてデータの性質により適当にそのうちからえらぶ.

c)　その他の方法をとる.

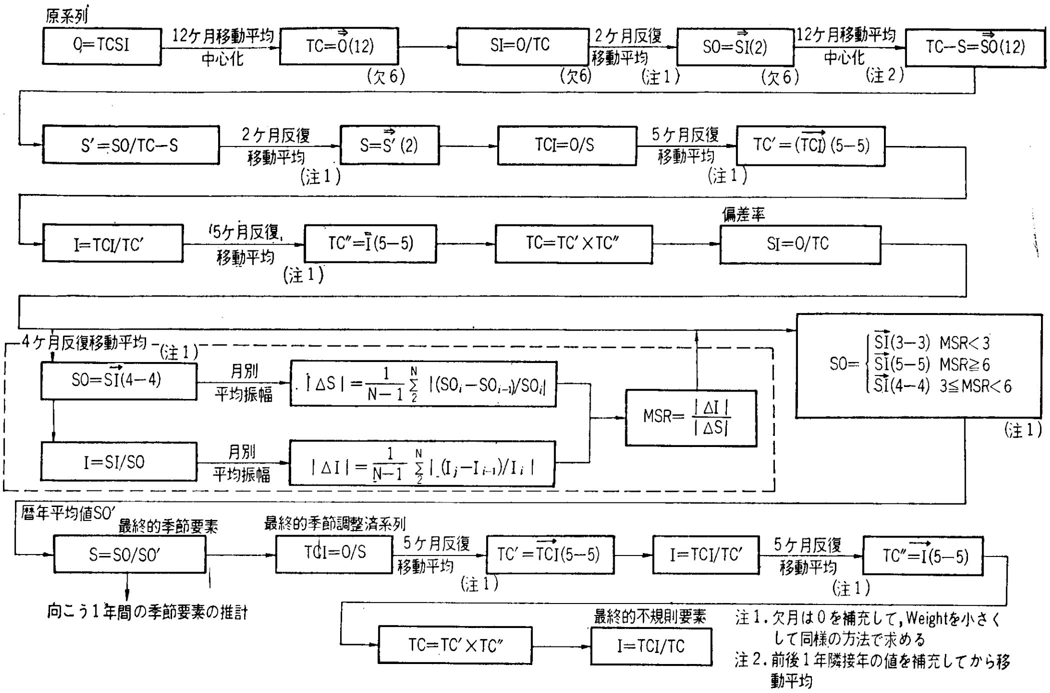
iii)　不規則変動の特別な値によって，生じたと思われる $\boldsymbol{T}$ や $\boldsymbol{S}$ の局所的デコボコはどう処置するか

a)　そのままにしておく.

b)　$\boldsymbol{I}$ の値が大きいと思われる時点の値は除くか，または補正してから計算する.

c)　移動平均の長さ，ウエイトを変えて，できるだけデコボコを小さくする.

d)　その他の方法をとる.



第2-1図　E.P.A. (X-4A) ダイヤグラム

E.P.A.　注 1.

〔n ケ月反復移動平均の計算法〕

$n=5$ の場合

$$A_i=\frac{1}{25}\sum_{j=0}^{4}\sum_{m=-4}^{0}(A'_{i+m+j})\quad i=5,\ \cdots\cdots,\ n-4$$

(前後4ケ月　A_{-3}, A_{-2}, A_{-1}, A_0, A_{n+1}, ……, $A_{n+4}=0$ を入れておく)

5項反復移動平均の場合のウエイト表

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…	…	…	ウエイト計
1	5	4	3	2	1									15
2	4	5	4	3	2	1								19
3	3	4	5	4	3	2	1							22
4	2	3	4	5	4	3	2	1						24
5	1	2	3	4	5	4	3	2	1					25
6		1	2	3	4	5	4	3	2	1				25
7			1	2	3	4	5	4	3	2	1			25
⋮														⋮
⋮														⋮

$$\left\{\begin{aligned}
A_1&=\frac{1}{15}\sum_j\sum_m(A'_{i+m+j})=A_n\\
A_2&=\frac{1}{19}\sum_j\sum_m(A'_{i+m+j})=A_{n-1}\\
A_3&=\frac{1}{22}\sum_j\sum_m(A'_{i+m+j})=A_{n-2}\\
A_4&=\frac{1}{24}\sum_j\sum_m(A'_{i+m+j})=A_{n-3}
\end{aligned}\right.$$

$n=2$ の場合

$$A_1=\frac{1}{3}(2A_1'+A_2')=A_n$$

$$A_i=\frac{1}{4}(A'_{i-1}+2A'_i+A'_{i+1}) \qquad i=2,\ \cdots\cdots,\ n-1$$

$n=3$ の場合

$$A_1=\frac{1}{6}\sum_{j=0}^{2}\sum_{m=-2}^{0}(A'_{i+m+j})=A_n$$

$$A_2=\frac{1}{8}\sum_{j}\sum_{m}(A'_{i+m+j})=A_{n-1}$$

$$A_i=\frac{1}{9}\sum_{j}\sum_{m}(A'_{i+m+j}) \qquad i=3,\ \cdots\cdots,\ n-2$$

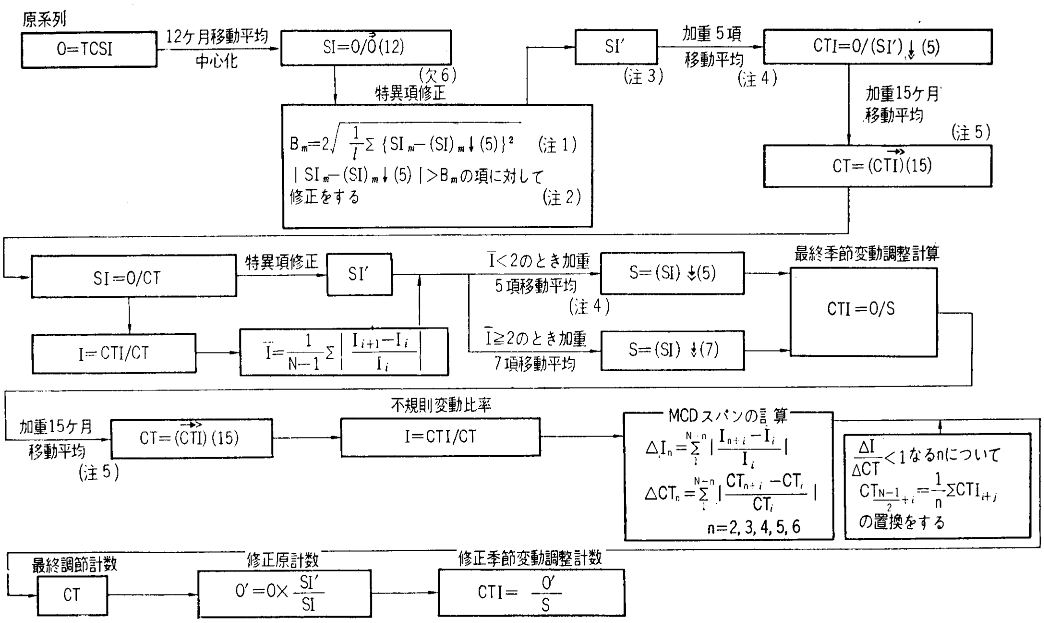
$n=4$ の場合

$$A_1=\frac{1}{10}\sum_{j=0}^{3}\sum_{m=-3}^{0}(A'_{i+m+j})=A_n$$

$$A_2=\frac{1}{13}\sum_{j}\sum_{m}(A'_{i+m+j})=A_{n-1}$$

$$A_3=\frac{1}{15}\sum_{j}\sum_{m}(A'_{i+m+j})=A_{n-2}$$

$$A_i=\frac{1}{16}\sum_{j}\sum_{m}(A'_{i+m+j}) \qquad i=4,\ \cdots\cdots,\ n-3$$



注 1．前後欠月2年は同月の値を延長して補充してから平均
注 2．3項，4項移動平均値で修正する
注 3．前後欠月6ケ月は隣接月の値で補充
注 4．前後2年分を3年平均で補充してから移動平均
注 5．3年，5年平均で欠月補充

第2-2図　センサス局法 X-8 ダイヤグラム

センサス X-8

注 2．特異項修正の方法

$|SI-(SI)\downarrow(5)|>B$ なる項で

$7\leqq i\leqq 18$ のとき　　$SI_i'=\frac{1}{3}\{SI_{i+12}+SI_{i+24}+SI_{i+36}\}$

$19\leqq i\leqq 30$ のとき　　$SI_i'=\frac{1}{3}\{SI_{i-12}+SI_{i+12}+SI_{i+24}\}$

$31 \leqq i \leqq N-24$ のとき　$SI_i'=\frac{1}{4}\{SI_{i-24}+SI_{i-12}+SI_{i+12}+SI_{i+24}\}$

$N-23 \leqq i \leqq N-12$ のとき　$SI_i'=\frac{1}{3}\{SI_{i-24}+SI_{i-12}+SI_{i+12}\}$

$N-11 \leqq i \leqq N$ のとき　$SI_i'=\frac{1}{3}\{SI_{i-36}+SI_{i-24}+SI_{i-12}\}$

注 4.　加重のウエイトは，$\left(\frac{1}{7},\ \frac{1.5}{7},\ \frac{2}{7},\ \frac{1.5}{7},\ \frac{1}{7}\right)$

注 5.　欠月補充

$$CT_1=CT_2=\frac{1}{3}(CTI_1+CTI_2+CTI_3)$$

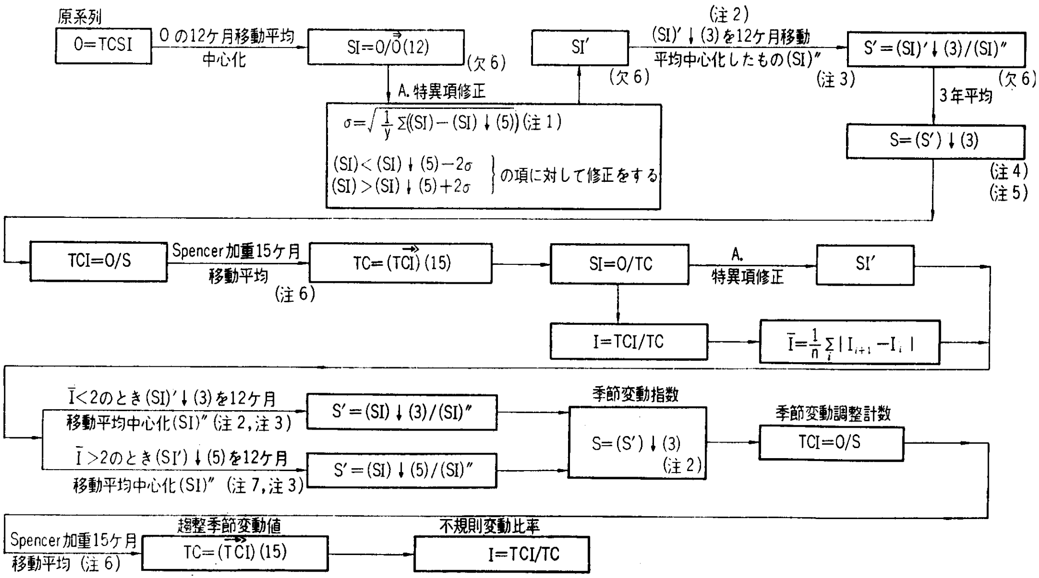
$$CT_{2+i}=\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{4}(CTI)_{i+n} \quad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 5)$$

$$CT_{N-7+i}=\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{4}(CTI)_{N-9+i+n} \quad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 5)$$

$$CT_{N-1}=CT_N=\frac{1}{3}(CTI_{N-2}+CTI_{N-1}+CTI_N)$$

加重のウエイトは

$$\left(\frac{-3}{320},\ \frac{-6}{320},\ \frac{-5}{320},\ \frac{3}{320},\ \frac{21}{320},\ \frac{40}{320},\ \frac{67}{320},\ \frac{74}{320},\ \frac{67}{320},\ \frac{40}{320},\ \frac{21}{320},\ \frac{3}{320},\ \frac{-5}{320},\ \frac{-6}{320},\ \frac{-3}{320}\right)$$



注）欠月補充のしかた

注 1.　隣接年の値を2年補充してから移動平均

注 2.　3年平均で補充してから移動平均

注 3.　初月，終月を6ケ月延長してから移動平均

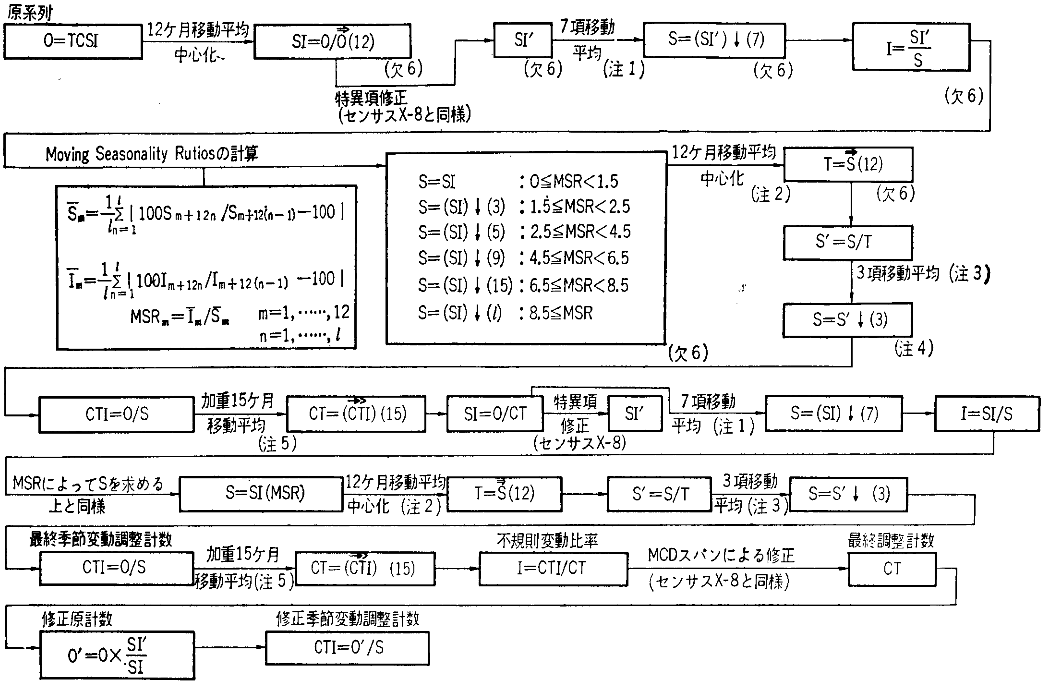
注 4.　両端の値を1年補充してから移動平均

注 5.　欠月6ケ月を隣接年同月で補充

注 6.　4ケ月平均を7ケ月分ずつ補充

注 7.　同月4年平均で2年補充

第2-3図　センサス局法 X-9 ダイヤグラム



$$\overline{S}_m=\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{l}|100S_{m+12n}/S_{m+12(n-1)}-100|$$

$$\overline{I}_m=\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{l}|100I_{m+12n}/I_{m+12(n-1)}-100|$$

$$MSR_m=\overline{I}_m/\overline{S}_m \quad m=1,\cdots\cdots,12 \quad n=1,\cdots\cdots,l$$

注 1. 3年平均を前後3年間補充してから移動平均

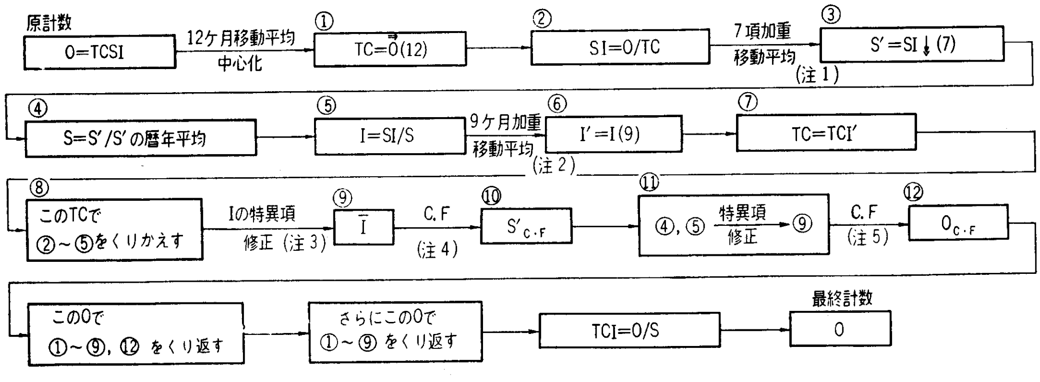
注 2. 平均後，欠月6ケ月を隣接年で補充

注 3. 前後1年間隣接年で補充してから移動平均

注 4. 欠月6ケ月を隣接年で補充

注 5. 欠月補充をしてから，移動平均

第2-4図 センサス局法 X-10 ダイヤグラム



注 1. ウェイトは〔0.120, 0.141, 0.157, 0.164〕

注 2. ウェイトは〔−0.050, 0.071, 0.157, 0.209, 0.226〕

注 3. $\vec{I}(61)$ の標準偏差 $\sigma(I)$ $3\sigma(I)<I$ なる I について 1.0 とおきかえる.

注 4. $H=|I-\overline{I}|/\sigma(I)$ $\overline{I}$: 特異項を修正したものの 61 ケ月平均
$CF=1.555-0.555\times H$
$SI'=SI\times(CF)$, $S'=SI'\downarrow(W7)$

注 5. $O'=O\left(CF+\dfrac{1-CF}{I}\right)$

第2-5図 BLS 法ダイヤグラム

第1表　Sensus Method II 計算内容の比較

計算内容	Original	X-3	X-8	X-10
特異項選定の基線（各月のSI比率の5項移動平均）の欠項処理	step 6a, 11a 両端の各2項平均を各2項外挿	ウエイト 1年目　2　2　1 2年目　1.5　1.5　1　1 3年目以降　1　1　1　1　1	step 6a, 11a 5項移動平均の両端の値をそのまま各2項延長	ウエイト 1年目　1　1　1　1　1 2年目　1　1　1　1　1 3年目　1　1　1　1　1 4年目　1　1　1　1　1
特異項の代替	step 6c, 11c 1 特異項とその前後各1項の3項平均 2 特異項が両端年の場合は特異項を含む端から3項平均	step 6c, 11c 1 特異項の前後各2項の4項平均 2 特異項が端から2番目のときは端の1項と前（または後）の2項の3項平均 3 特異項が端のときは特異項の前（または後）の3項平均		
12か月移動平均による欠項補充	step 6d SI 比率について欠月の隣接年の値を補項			step 6k SI 比率については補項せず季節変動指数について欠月の隣接年の値を補項
スペンサー15か月移動平均の欠項補充	step 8, 17 前後各4か月平均値を7か月分外挿		step 8, 17 前後の欠項各7か月のうち5か月は季節調整計数の5か月移動平均で，更に欠項2か月は前後各3か月の平均値を補充	sept 8, 17 original, X-3 と同じ
移動季節変動指数の移動平均期間選定基準の計算ステップ	step 10, 11e I 比率（季調済計数/季調済計数の15か月移動平均）の対前月増加率の絶対値平均（$\lvert\overline{\Delta I}\rvert$）を算出 $\lvert\overline{\Delta I}\rvert<2$　のときは加重5項移動平均 $\lvert\overline{\Delta I}\rvert\geqq 2$　のときは加重7項移動平均			step 6d〜h, 11d〜h　(step 10 は削除) d:　各月ごとに SI 比率の7項移動平均，初めと終りの各3項平均を各3項外挿 e:　月ごとにdの前年増加率の絶対値平均を求め $\bar{S}y$ とする f:　SI 比率/d g:　月ごとに f の前年増加率の絶対値平均を求め $\bar{I}y$ とする h:　$0\leqq\bar{I}y/\bar{S}y<1.5$ のとき 1×3項移動平均 $1.5\leqq$ 〃 <2.5　3×3項 〃 $2.5\leqq$ 〃 <4.5　5×3項 〃 $4.5\leqq$ 〃 <6.5　9×3項 〃 $6.5\leqq$ 〃 <8.5　15×3項 〃 $8.5\leqq$ 〃　総平均

<table>
<tr><th>計算内容</th><th>Original</th><th>X-3</th><th>X-8</th><th>X-10</th></tr>
<tr><td rowspan="4">SI 比率から季節変動指数を算出するステップ</td><td colspan="3">step 6e, 11d (SI 比率の各年平均を 100 に換算)(中心化 SI 比率)
初めと終りの年に欠月のある場合は欠月の隣接 2 年の平均を欠損にあて各年平均 100 に換算</td><td rowspan="4">step 6 i, 11 i (SI 比率について各月ごとに次の移動平均を行う)
0≦Iy/Sy<1.5 そのまま
1.7≦ 〃 <2.5 3 項 (両端各 2 項平均を各 1 年分外挿)
1 年目 1.5 1.5
2 年 以降 1 1 1
2.5≦ 〃 <4.5 5 項 (両端各 2 項平均を各 2 年分外挿)
1 年目 2 2 1
2 年目 1.5 1.5 1 1
3 年目以降 1 1 1 1 1
4.5≦ 〃 <6.5 9 項 (両端各 3 項平均を各 4 年分外挿)
2.3 2.3 2.3 1 1
2 2 2 1 1 1
1.7 1.7 1.7 1 1 1 1
1.3 1.3 1.3 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1
6.5≦ 〃 <8.5 15 項(両端各 3 項平均を各 7 年分外挿)
3.3 3.3 3.3 1 1 1 1 1
3 3 3 1 1 1 1 1 1
2.7 2.7 2.7 1 1 1 1 1 1 1
2.3 2.3 2.3 1 1 1 1 1 1 1 1
2 2 2 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1.7 1.7 1.7 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1.3 1.3 1.3 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
8.5≦ 〃 総平均

step 6 j, 11 j (i の 12 か月移動平均(中心化) 前後 6 か月の欠項は隣接年の値で補う)
中心化季節指数 i/j

step 6k, 11k (中心化季節指数の 3 項移動月ごとに 3 項移動平均 (両端各 1 項を各 1 項外挿)</td></tr>
<tr><td colspan="2">step 6f, 11f (中心化 SI 比率の加重 5 項移動平均)
両端各 2 項平均を各 2 項外挿
ウエイト (3×3)
1 年目 4.5 3.5 1
2 年目 2.5 3.5 2 1
3 年目以降 1 2 3 2 1</td><td>両端各 3 項平均を各 2 項外挿
ウエイト (1, 1.5, 2, 1.5, 1)
1年目 2.8 2.3 1.8
2年目 1.8 2.3 1.8 1
3年目以降 1 1.5 2 1.5 1</td></tr>
<tr><td>step 11g (中心化 SI 比率の加重 7 項移動平均)
両端各 2 項平均を各 3 項外挿
ウエイト (3×5)
1年目 6 6 2 1
2年目 4.5 4.5 3 2 1
3年目 2.5 3.5 3 3 2 1
4年目以降 1 2 3 3 3 2 1</td><td>両端各 4 項平均を各 3 項外挿
ウエイト (3×5)
4.5 4.5 3.5 2.5
3.8 3.8 3.8 2.8 1
2.2 3.2 3.2 3.2 2 1
1 2 3 3 3 2 1</td><td>ウエイト
(90,127,183,200,183,127,90)
300 283 227 190
237 254 237 181 90
149 205 222 205 127 90
90 127 183 200 183 127 90</td></tr>
<tr><td>3 項移動平均
1 年目 2 1
2 年目以降 1 1 1
3×3移動平均
1 年目 4 4 1
2 年目 2.5 3.5 2 1
3 年目以降 1 2 3 2 1
5×3移動平均
1 年目 5.5 5.5 3 1
2 年目 4.5 4.5 3 2 1
3 年目 2.5 3.5 3 3 2 1
4 年目以降 1 2 3 3 3 2 1</td><td colspan="2">9×3移動平均
1 年目 6.7 6.7 6.7 3 3 1
2 年目 6 6 6 3 3 2 1
3 年目 5 5 5 3 3 3 2 1
4 年目 4 4 4 3 3 3 3 2 1
5 年目 2.3 3.3 3.3 3 3 3 3 3 2 1
6 年目以降 1 2 3 3 3 3 3 3 3 2 1
15×3移動平均
1 年目 9.7 9.7 9.7 3 3 3 3 3 1
2 年目 9 9 9 3 3 3 3 3 2 1
3 年目 8 8 8 3 3 〃
4 年目 7 7 7 3 3 〃
5 年目 6 6 6 3 3 〃
6 年目 5 5 5 3 3 〃
7 年目 4 4 4 3 3 〃
8 年目 2.3 3.3 3.3 3 3 〃
9 年目以降 1 2 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 2 1</td></tr>
<tr><td>固定季節変動指数とその季節変動調整計数</td><td colspan="2">算出せず</td><td>step 11c′, c″ (SI 比率の各月平均を年平均 100 に調整固定季節指数とする)</td><td>算出せず</td></tr>
</table>

iv) 長い項目の移動平均による $\boldsymbol{T}$ の歪みはどうするか
　a) そのままにしておく．
　b) $\boldsymbol{T}$ の曲率の大きいところだけ補正する．
　c) その他の方法をとる．
v) 何回逐次近似を行なうか
　a) 2回とか3回にする．
　b) 結果をながめながら何回繰り返すかまたどのループを通すかを決める．
vi) 曜日や休日などによる $\boldsymbol{S}$ 以外の規則的変動についてはどのような処置をとるか
　a) 何もせず，それらの変動はすべて $\boldsymbol{I}$ と考える．
　b) 予めそれらの変動を除き去るような調整をしてから本計算に入る．

以上のほかにも，規定すべきことはいろいろあるであろうが，その規定のしかたの違いによって，それぞれの調整法が生まれてきたといえる．センサス局法に属する調整法のうちセンサス局法II（$\boldsymbol{X}$-8, $\boldsymbol{X}$-9, $\boldsymbol{X}$-10），BLS 法，EPA 法，のブロック・ダイヤグラムを示したものが第2図で，第1表はセンサス局法IIのうちのオリジナル，$\boldsymbol{X}$-3, $\boldsymbol{X}$-8, $\boldsymbol{X}$-10 について，その相異点を一覧表にしたものである．

§5. モデル系列とテストのための計算

各種の調整法の評価を行なうため，従来のよく用いられた方法は実際の経済時系列について計算を行ない，その結果として得られた $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{I}$ の姿が概念的に描かれてきたイメージに似つかわしいかどうかを調べることであった．しかし今ここに二つの調整法があって，

$$\text{甲}:\quad \boldsymbol{O}=\boldsymbol{T}*\boldsymbol{S}*\boldsymbol{I}$$
$$\text{乙}:\quad \boldsymbol{O}=\boldsymbol{T}'*\boldsymbol{S}'*\boldsymbol{I}'$$

と二つの違った結果が得られ，しかもどちらの要素も，それぞれそれらしい姿をしていた場合，甲と乙とどちらがよいかは判断がつかない．

そこで，ここでは日本の経済時系列でよく現われるようなタイプの $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{I}$ の四つの要素を選び，これらをかけあわせることによって得られるモデル時系列についてテストを行なうことにした．モデル系列を作るための要素として実際の経済時系列をある特定の調整法で分解した結果をそのまま用いた研究があるが，これは用いた調整法特有のゆがみを含んでいるので具合が悪い．A という調整法で得た $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{I}$ をもって要素とすれば，A の方法は常に一番よいという結果が得られるのは当然であるが，三種類の時系列を分解してそれぞれから $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{I}$ のうちの一つを選んでモデル系列をつくってもやはり同じような結果となる．つまり各要素はそれをつくり出した調整法では変化を受けないような姿になっている．

各要素の選び方は次の通りである．

i) $\boldsymbol{T}$: 日本の経済時系列はかなり急なトレンドをもっているものが多いので一応指数型，つまり

$$\boldsymbol{T}=be^{at}\quad (t\text{: 時間})$$

とした．勿論，時系列の中には直線的なトレンドのものもあるが，指数型でうまくいくような調整法は直線でもまず心配はない．

ii) $\boldsymbol{C}$: これは二年以上の周期をもつゆるやかな曲線と考え，

$$\boldsymbol{C}=A\sin(\omega t+\phi)$$

とした．ここで ω, ϕ, A を t の函数とすることや適当に不規則性を入れることもできるが，これはテストにおいてはあまり本質的でない．

iii) $\boldsymbol{S}$: 実際の経済時系列の季節性変動をいくつかながめて，モデル的な型を作り出したも

の（ある調整法で得られた S をそのまま用いることは前に述べた理由で面白くない）と，形式的に定めたものの二つを S とした．

iv) I: これは平均値 0，分散 1 で系列相関のないようなを乱数表によって作り，これにパラメータを乗じて I とした

$$I=k\varepsilon$$

ただし，$E(\varepsilon)=0$

$E(\varepsilon^2)=1$

この四つをくみ合わせて得た函数

$$O=[be^{at}][A\{1+\sin(\omega t+\phi)\}\{1+kI\}]$$

において各パラメーターを動かすことにより，いろいろなモデル系列を作ることができる．

このモデル系列について行なったテスト計算の種類は，

a) 再現性のテスト

これは単純な再現性をみるためのもので，既知の T, S, I によって原系列 O を作り，これを各種の調整法によって分解してその結果得られた T', S', I' ともとの T, S, I を比較する．

$$\left.\begin{matrix} T \\ S \\ I \end{matrix}\right\} \longrightarrow O \longrightarrow \left\{\begin{matrix} T' \\ S' \\ I' \end{matrix}\right.$$

b) 歪みのテスト

一般にいかなる調整法でもその再現性は完全なものではなく，分解結果の歪みの性質や大きさは各調整法でそれぞれ違うものと考えられる．勿論歪みは調整法ばかりではなく原時系列の性質にも大きく左右されるものであるが，ここではいくつかのモデル系列によって次のような計算を行なってみる．

まず，T, S, I から O を作り，これをある調整法で T_1, S_1, I_1 に分解する．次にもとの T と分解によって得られた S_1, I_1 から新たなモデル系列 O_1 を作り，これを同じ調整法で再び T_2, S_2, I_2 に分解する．前と同じようにもとの T と S_2, I_2 から O_2 をつくってこれを分解する．このような操作を n 回くり返す．

$$\left.\begin{matrix} T \\ S \\ I \end{matrix}\right\} \longrightarrow O \longrightarrow \begin{matrix} T_1 & & T \\ S_1 & \longrightarrow & S_1 \\ I_1 & \longrightarrow & I_1 \end{matrix}\left.\vphantom{\begin{matrix} T \\ S \\ I \end{matrix}}\right\} \longrightarrow O_1 \longrightarrow \begin{matrix} T_2 & & T \\ S_2 & \longrightarrow & S_2 \\ I_2 & \longrightarrow & I_2 \end{matrix}\left.\vphantom{\begin{matrix} T \\ S \\ I \end{matrix}}\right\} \longrightarrow O_2 \longrightarrow \cdots\cdots$$

この計算の結果，S, I に対する歪みが計算の回数を増していった場合に，もとの S, I のまわりのある範囲にとどまるのか，それとも累積的に一定の方向に次第に大きくなっていくのかの様子をみることができる．

c) 逐次近似の効果のテスト

センサス局法に属する調整法は第2図にもあるように，まず 12 ケ月移動平均によって第一近似としての T を求め，これをもとにして第2近似，第3近似を行なっていくが，果してこの逐次近似が効果のあるものか，また逆に次第に歪みを大きくしているものかを確かめるために，ここではその回数を増してみた場合の結果を動きをみることにする．

$$O \longrightarrow T \longrightarrow \underbrace{SI \longrightarrow S \longrightarrow TI \longrightarrow T}_{n\text{回}}$$

d) 原データの長さによる変化のテスト

センサス局法においては数多くの移動平均を各所に利用するために，結果として得られた

T, S の系列でかなり長期的な間隔をもつ値の間でも従属性が強い．このことは n 年間のデータでの調整結果と $n+1$ 年間のそれとを比較した場合，新たに加えられた1年間のデータが全体に影響を及ぼすために S や T にひらきが生ずることを意味する．もしこのひらきが大きいときは，同じある時期の経済状勢の判断がみる年々によって大幅にかわってしまうことになろう．

この問題を検討するために，比較的長いテスト系列について最初は計算可能の最小の年数 n_0（これはそれぞれの調整法によって違う）を用い，次は n_0+1, n_0+2 と逐次データの長さを伸ばしながら，その度々の結果を求めてみる．

$$O(n_0) \longrightarrow \begin{cases} T_0 \\ S_0, \ O(n_0+1) \longrightarrow \begin{cases} T_1 \\ S_1, \ O(n_0+2) \longrightarrow \begin{cases} T_2 \\ S_2, \ \cdots\cdots \\ I_2 \end{cases} \\ I_1 \end{cases} \\ I_0 \end{cases}$$

§6. 妥当性の問題（その 1）
（移動平均について）

オリジナルの Census Method II では加法モデルと乗法モデルがまったく平行的に考えられていたが，その後乗法モデルのみについていろいろな調整法の変型が発表され加法モデルは現在でもオリジナルのタイプが用いられているようである．

加法モデル

$$O=T+S+I$$

については §2 で述べた仮定が満たされる限り移動平均によるアプローチは妥当なものであって，ただ問題となるのは，

i)　最終的に S や T の中に残る不規則変動をどの程度までスムージングする必要があるか

ii)　T, S の年次変化の大きさや型に現われる調整の歪みをどれくらいにおさえたいか

といったことから，どの部分でどんな型の移動平均を使うべきか，移動平均によって生ずる欠項をどのように補足するのが可能な範囲で最良であるかを原系列をながめて合理的に定めることくらいである．勿論 i) と ii) の条件を共に満足させることは不可能なので，実際にはどちらか一方にある制限を加え，その制限内で他方を最良にするといった方法をとらなければならない．

乗法モデル

$$O=T\cdot S\cdot I$$

の場合はまず移動平均というものが果して妥当性のある方法であるかどうかは疑わしくなってくる．まず中心化12ケ月移動平均による S, I の除去について少し検討してみよう．

センサス局法においては通常 S について

$$\sum_{j=1}^{12} S_{ij}=12 \qquad (i\text{: 年},\ j\text{: 月})$$

を仮定している．今，

$$S_{ij}=1+s_j \quad \left(\sum_{j=1}^{12} s_j=0\right)$$

$$I=1+\varepsilon \quad (E(\varepsilon)=0,\ E(\varepsilon^2)=k^2)$$

とすれば，

$$O=T+T\cdot s+T\cdot\varepsilon+s\cdot\varepsilon$$

である．ここで T はかなりスムーズな曲線で 1ケ年程度の範囲ではほぼ直線とみなせるとする．つまり任意の 13 ケ月間について，

$$T=a+bt \quad (t=t_0+i,\ i=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ 12)$$

と仮定しておく.

この系列に中心化 12 ケ月移動平均をほどこしたとすると T は直線の仮定から歪みは受けないし，また $s\cdot\varepsilon$ の項は通常他の項と比較して充分小さいと考えられるからまず問題はない. 残るのは $T\cdot s$ と $T\cdot\varepsilon$ の項が移動平均によってどのくらい 0 に近くなるかである.

$T\cdot s$ が移動平均によって常に 0 になるためには，T が一定（傾斜なし，$b=0$）ということになるが経済時系列を対象とする限り，これを期待することはできない. 次に $T\cdot s$ の項が一般にどの程度の大きさで結果の中に残るかを評価してみよう. 移動平均後における $T\cdot s$ の項の大きさは中心化しないとして（中心化しても結果はほとんど変らない）

$$\frac{1}{12}\sum T\cdot s$$

で，これは T と s との共分散であるから，T と s との区間1ケ年での相関係数を r としたとき r が1に近いときは正方向の歪みを，また r が -1 に近ければ負の方向の歪みをうけることになる. つまり歪みの大きさは，

$$r\cdot\sigma_T\cdot\sigma_s$$

となるから

i) $|r|$ が1に近いほど

ii) トレンドの傾斜が急なほど

iii) 季節変動が大きいほど

歪みはひどくなる. T と S が共に均等分布ならば，つまりトレンドが直線的に上昇し，S がのこぎりの歯状であれば，この歪みは近似的に

$$\frac{r}{12}\cdot(T\ のレインジ)\cdot(S\ のレインジ)$$

となる. 今 S のレインジが 1，r が1とするとトレンドはその1ケ月間の上り分だけ上方にずれる. また一般に r の値は時点によって周期的に変わるから，結果の中に移動平均したために生じた新たな周期性をもつ成分が生ずることになる. 例えばトレンドが直線的に上り，季節変動が第3図甲のようにトレンドに順方向に動く場合は r は確実に $+1$ の値をとることがあるので，その時点の歪みは特に大きくなる. しかも r はマイナス側にあるときよりもプラス側にある時の方が大きいのでトレンドは実際よりも上の方に出てくる. 単調増大的な動きをする経済時系列の中には盆で少し上って，暮で大きく上るような季節変動をするものが多いが，これらはすべて上記の傾向を示すことになる. また第3図乙のようなトレンドと逆方向の季節変動があれば結果もまた甲と反対になり，負の歪みが多くなる. もし第3図丙のようなジグザグ的季節変動の場合は r が常に小さい値をとるために歪みは小さいが，センサス局法ではこのような場合の歪みは時として不規則変動とみなされる傾向が強いということを明記しておかなければならない.

$T\cdot\varepsilon$ の項の影響は次のように評価できる. まず中心化しない単純な 12 ケ月移動平均（中心化しても結果はほとんど同じ）の場合で考えれば，ε と T とは独立で，

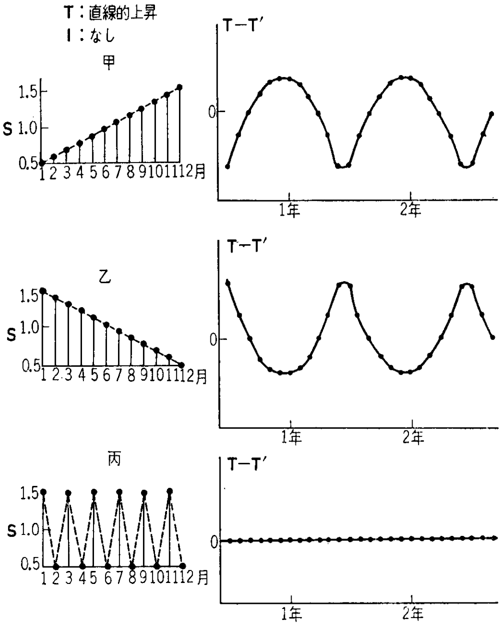
$$E(\varepsilon)=0$$

という仮定から $T\cdot\varepsilon$ の項の残留部分は平均的に 0 とみなせる. しかしその分散が大きいとすれば問題であるからその大きさを計算してみよう.

$$T=a+bt$$

として各時点に残る不規則変動の分散は，

$$E\left[\frac{1}{12}\{(a+b)\varepsilon_1+(a+2b)\varepsilon_2+\cdots\cdots+(a+12b)\varepsilon_{12}\}\right]^2$$



第3図　中心化 12 ケ月移動平均によるトレンドの歪み
T: 直線的上昇　　***I***: なし

$$=\frac{1}{144}[(a+b)^2+(a+2b)^2+\cdots\cdots+(a+12b)^2]\,\sigma^2$$

$$=\frac{1}{144}[12a^2+12\times 13ab+2\times 13\times 25b^2]\,\sigma^2$$

$$\fallingdotseq (a+7b)^2\frac{\sigma^2}{12}$$

となる．この計算では t の起点を 1 としたが任意の起点の場合はそれぞれ a の値を変えて考えればよい．$(a+7b)$ というのは平均を行なった範囲の中心時点に対するトレンドの高さを近似的に示すものである．つまりこの変動の大きさを変位係数の形でみれば，(相対的にみれば)

$$\frac{\sigma}{\sqrt{12}}$$

となり，t に関せず常に一定といえる．

これまでの結果では ε が T とまったく独立として取扱ってきたが，ε が確率変数である以上偶然的に ε と T の相関が高くなることも当然考えておかなければならない．

今まで述べてきたことは，原時系列の 12 ケ月移動平均による S, I の除去の問題であるが，これをまとめると次のようなことがいえよう．

加法モデル——移動平均による S, I の除去は妥当な方法である．

乗法モデル

i)　季節変動
- $|r|$ が大きい場合
  - a)　トレンドに一方向的な歪みを与える
  - b)　新たな周期性成分が生じる．
- $|r|$ が小さい場合

  残差は小さい．しかしそれはセンサス局法では不規則変動と分離し難いような，つまり不規則変動の中に繰り入れられてしまうようなもの

である.

ii)　不規則変動

相対的には加法モデルと同じように考えてよいが，偶然的に生ずるトレンドとの相関による局所的な歪みはどうすることもできない.

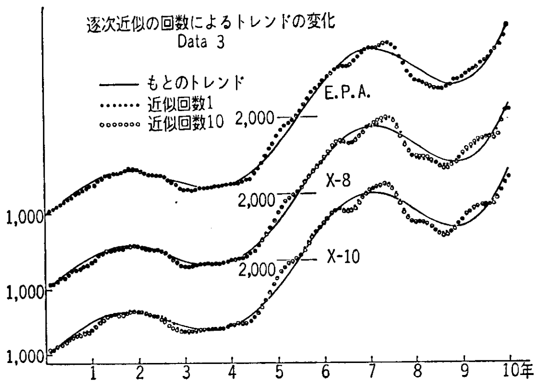
センサス局法では12ヶ月移動平均のほかにもいろいろなタイプの移動平均によって $\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{I}$ から $\boldsymbol{S}$ の分離，$\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{I}$ から $\boldsymbol{T}$ の分離を行なっているが本質的なことは今まで述べてきたことと大差はない.

このほか移動平均に関する問題としては $\boldsymbol{T}$ とか $\boldsymbol{S}$ の非直線性のために生ずる歪みがある．各調整法ではこの歪みを小さくするために加重移動平均を用いたり，また移動平均後の補正を考えたりしてかなり神経質になっているようであるが，始めに設けたトレンドや季節変動に関する仮定からみれば，これはそれほど本質的ではない．トレンドや季節変動に尖った山や谷ができるような急変化があるとすれば，移動平均によって $\boldsymbol{S}$ や $\boldsymbol{I}$ を除去するという考え自体が間違いである.

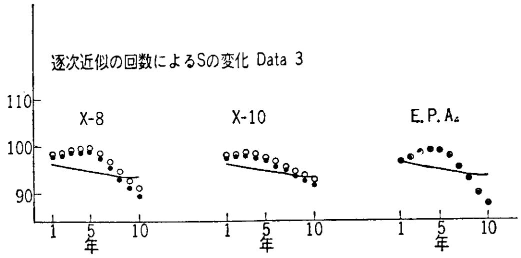
§7.　妥当性の問題（その2）
（逐次近似の効果について）

§5のc）で述べたテスト計算をData 3（実在の季節指数）について行なったときのトレンドの変化をグラフにしたものが第4図であり，季節指数の変化を示したものが第5図である.

この二つのグラフでみると，いずれの調整法でも $\boldsymbol{T}$ も $\boldsymbol{S}$ も第1回の計算でほとんどきまり，あとは近似を何回行なってもほとんど変わらない．つまり逐次近似の効果はないということになる.



第4図



第5図

逐次近似を行なって効果が上るための第1条件は計算の各段階での誤差評価が可能で，しかもその絶対量が常に小さくなる方向に毎回の結果が動いていくことであって，その計算の妥当性がなければ何回逐次近似を行なっても精度が上るということはない．計算手順を徒らにふやす前に乗法モデルにおける移動平均の使用，根拠のないデータの棄却（$\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{I}$ の修正）や外挿（移動平均による欠項の補充）など各段階での計算の内容をもっと深く吟味する必要があろう.

しかしこれらの問題が完全に解決したとしてもなお逐次近似によって精度が上るかどうかはわからない．なぜならば，原時系列の中に偶然誤差的な成分が混入している限り，どんな長い時系列をとっても，それは我々にとって不完全な情報である．不完全情報での逐次近似は非常に難かしい問題で，どこまでその効果が期待できるかということについては簡単に答がだせない．どんなうまい調整法をもってきても偶然誤差を完全に除去した決定論的な

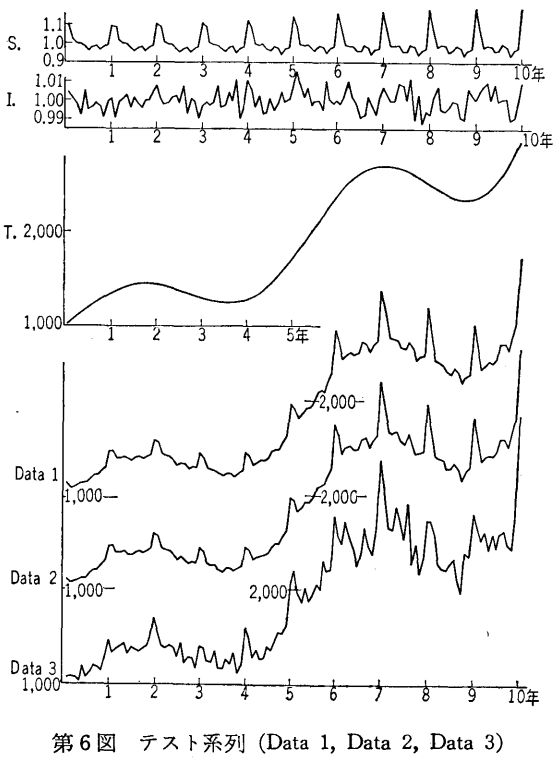
結果を得ることは不可能であって，我々にとってはその推定誤差を科学的に評価する方法を求めることが大きな課題である．

§8. 再現性について

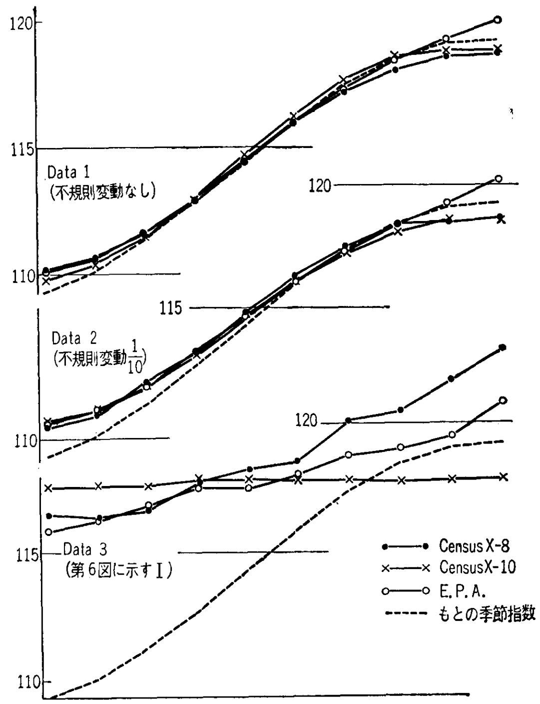
第6図に示すようなトレンド $\boldsymbol{T}$, 季節指数（日本銀行券発行高より）$\boldsymbol{S}$ および $\boldsymbol{I}$ を用いて，まず Data 1, Data 2, Data 3, の三つのテスト系列を作る．Data 1 は不規則変動なし，つまり $\boldsymbol{T\cdot S}$, Data 2 は図の通りの $\boldsymbol{T\cdot S\cdot I}$, Data 3 は図の I で標準偏差を 10 倍にしたのが入っている．これをセンサス局法 X-8, X-10 と EPA 法で調整し，得られた季節指数をグラフに画くと第7図のようになる．これでみると，不規則変動が小さい場合はかなり再現性があるが，これが大きくなると急に再現性がおちてくることがわかる．不規則変動の方は第8図に示すように Data 1 の $\boldsymbol{I}$ が全然入っていないテスト系列でも調整結果に擬似的な不規則変動が現われる．Data 2, Data 3, の場合で，もとの $\boldsymbol{I}$ と分解によって得た $\boldsymbol{I'}$ との相関係数を求めれば，いずれの方法でも 0.5 から高々 0.7 程度であって，不規則変動の再現性は極めて悪い．

歪みの性質をみるために，§5 のテスト計算 b) を行なってみる．

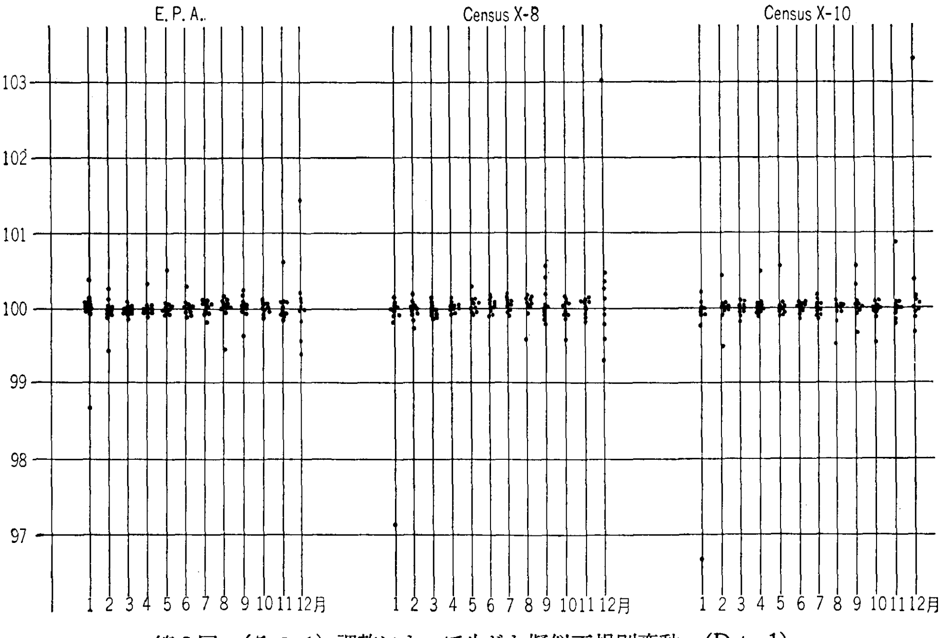
第9図は固定季節指数のテスト系列 (Data 4) での 1, 3, 5, 7, 9 回に現われた $\boldsymbol{S}$ の変化であるが，季節指数を固定しておいても調整結果の $\boldsymbol{S}$ は年々変化して現われる．また，歪みの大勢は，第1回目でほとんど決り，あとは回をふやすに従って歪みはある規則性をもって積み重ねられていくようであり，中にはある一定のところに収レンしていくかにみえるのもある．ことによるとテスト系列で $\boldsymbol{T}$ と $\boldsymbol{I}$ が同じであれば，ちがった $\boldsymbol{S}$ を用いても回が多くなるにつれて，$\boldsymbol{S}$ は次第に同じところに落ついてしまうこともあると考えられる．すなわち，Data 5 と Data 6 は全く逆のタイプの $\boldsymbol{S}$ を用いたテスト系列である．第10図は，この二つの系列



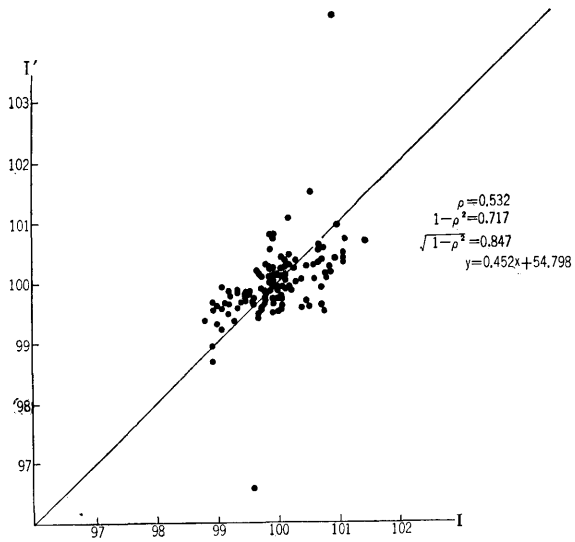
第6図　テスト系列 (Data 1, Data 2, Data 3)



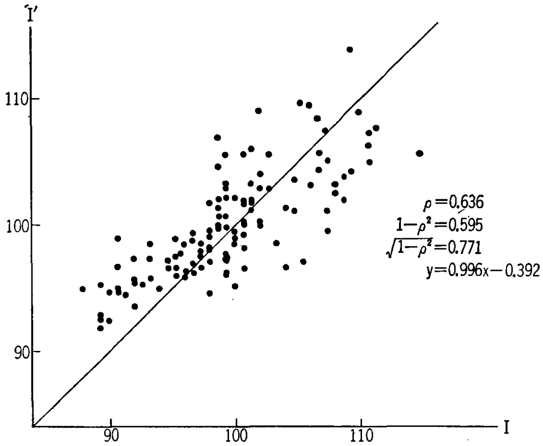
第7図 不規則変動による $\boldsymbol{S}$ の推定歪み
(ただし12月の季節指数のみを示す)



第8図 (その1) 調整によって生じた擬似不規則変動 (Data 1)



第 8 図　(その 2) 不規則変動の相関 (X-10)　(***I***−***I′***)　Data 2



第 8 図　(その 3) 不規則変動の相関 (X-10)　(***I***−***I′***)　(Data 3)

についてくり返しを 20 回行ない，そこで得られた ***S*** を示したものであるが，はじめは全く逆であったものが，何となく同じようなタイプに変ってきている．このようなことがどうして起るのかは大変に面白い問題であるが，今のところは明確でない．

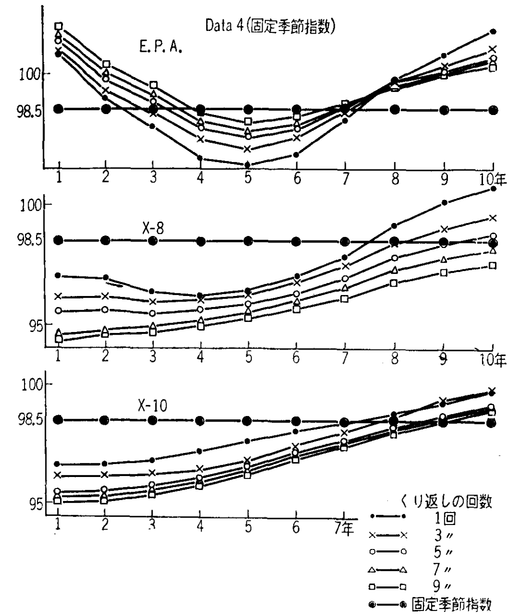
第 11 図はくり返し 10 回目の不規則変動のコレログラムであるが，ここでは次の三つの点に注意しなければならない．

i)　一般にもとの ***I*** よりも系列相関が大きくなる．

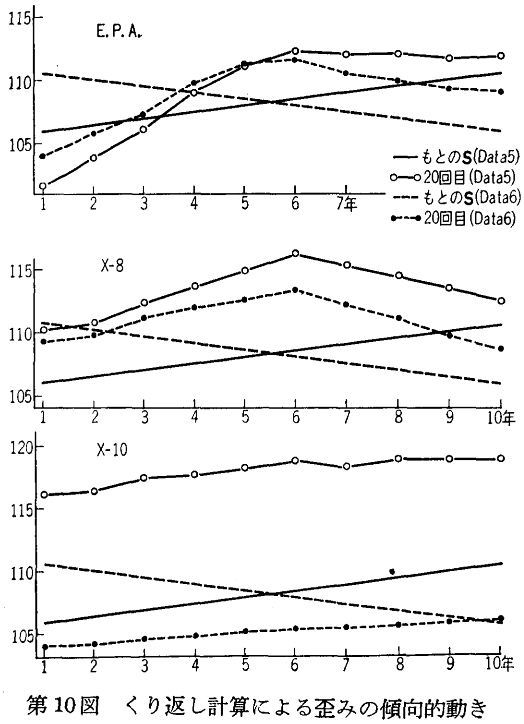
ii)　コレログラムのはじめは，どれもマイナスの値をとる．つまり調整によって得た ***I*** は ＼／＼／＼／ 的な動きが強い．

iii)　12 ヶ月目，24 ヶ月目はいずれもマイナスになる．つまり 12 ヶ月周期の波についてはフィルターのかけすぎが目立つ．

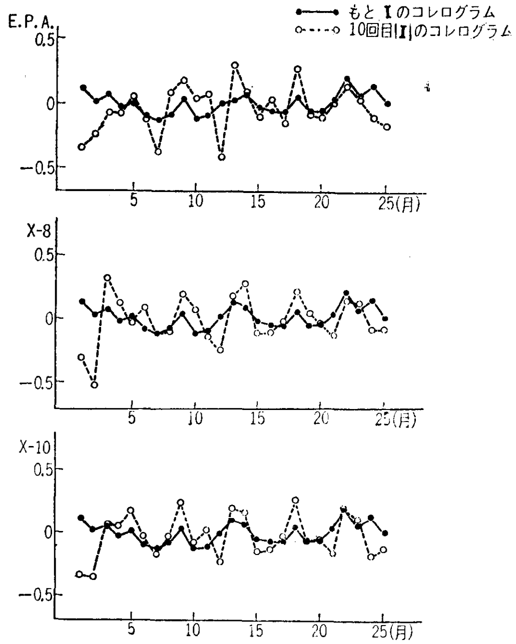
極言すれば，センサス局法によって得られる不規則変動は，いわばある特定の型をもった規則



第9図 くり返し計算による歪みの累積(5月)



第10図 くり返し計算による歪みの傾向的動き

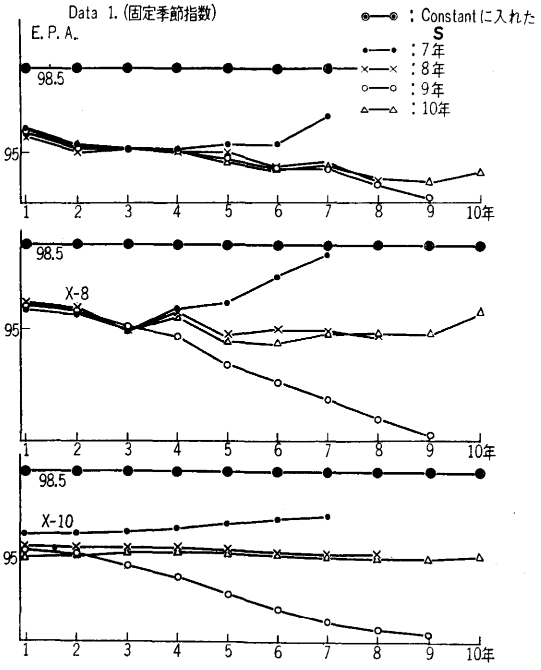


第 11 図　不規則変動のコレログラム

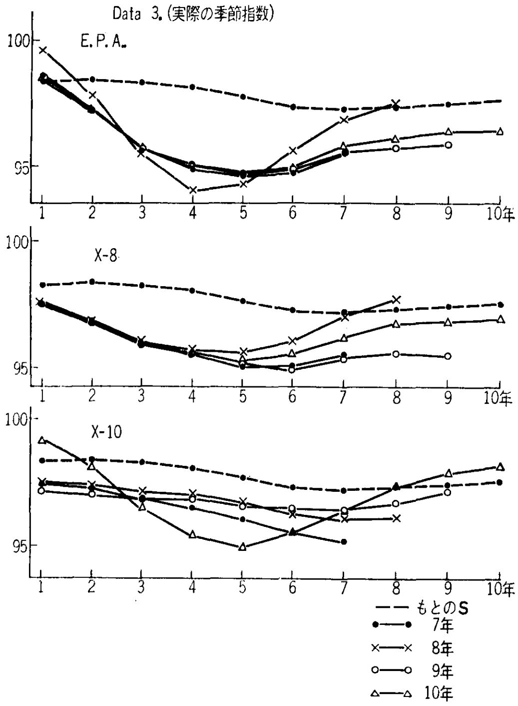
変動であって，これはセンサス局法特有のフィルター特性によって，不規則変動が攪乱されているものと思われる．

§ 9. 安定性について

調整結果の歪みが時系列の長さによってどう変ってくるかということは，方法論としても，



第 12 図　Data の長さによる S の歪み　(8 月)



第13図 Data の長さによる $\boldsymbol{S}$ の歪み (11月)

また，実用面からも大きな問題である.

第12図は固定季節指数テスト系列 Data 1 についての，第13図は実在の季節指数をもつテスト系列 Data 3 についての7年，8年，9年，10年分のデータによる調整結果の $\boldsymbol{S}$ の変化である．これを全般的に見渡したところ，時系列の長さによって，かなり大幅に $\boldsymbol{S}$ が動き時系列が長くなったからといって $\boldsymbol{S}$ の推定精度は一向に上らない．通常の推定の問題においてはサンプル数が増せば，それだけ推定精度が上るというのが常識であるが，センサス局法においてはデータの長さというものがサンプル数と同じようには考えられず，むしろデータが長くなればそれだけ不明の分が増えてくるような恰好である．これは季節調整そのものの宿命であって，あながちセンサス局法のみをせめることはできないのかもしれないが，構造がはっきりしたモデル系列で，しかも固定指数のような単純な場合でもその推定精度が雲を摑むようなものであるのは方法論的に何か大きな誤りがあると思わざるを得ない.

§10. センサス局法の問題点の要約

センサス局法系の調整法に関する問題点は，これまでのことで全部が論じつくされたわけではないが最後に一応の要点を簡単にまとめておきたい.

1. モデル構成について

センサス局法においては季節変動の型が年々で漸次連続的に変化していくという考えがその大きな特徴とされているが，季節変動ができるだけ一定に近いほど我々にとっては望ましいことであろう．従って時系列の調整にあたって，どんな型のモデル（加法モデルとか乗法モデルとか）を選ぶかは，「調整結果の $\boldsymbol{S}$ の型や $\boldsymbol{I}$ の分散の時点による変化がより小さく，そしてより単純になる」という基準によって定められるべきであって，すべての経済時系列をただ一つの型のモデル，（例えば乗法モデル）の中におしこめるというやり方は思わしくない．時系

列の中に負の値をとる時点があるという理由だけで単純に加法モデルでなければならぬというのもまた根拠がない．この点，センサス局法ではまず乗法モデル（時として加法モデルも用いるがその選択は任意的である）を前提とし，以後の操作でいろいろな小細工を労しているが，これではよい効果は望めない．むしろいくつかのモデルを用意しておいて，そのうちのどれを用いるかということに多くの努力がはらわれるべきであると思う．

2. 調整の方法について

乗法モデルにおいては移動平均が必らずしも妥当な武器ではない．また移動平均による欠項も大きな問題である．センサス局法における各種移動平均の選択，補項の方法も理論的裏付に乏しくトレンドがほとんど平坦で $\boldsymbol{S}$ の変化もゆるやかでない限り不都合な結果を招く心配がある．もし乗法モデルで移動平均を用いるのであるならば，それによって生ずる歪み（トレンドの山谷ばかりではない）の補正をもっと慎重に行なわなければなるまい．BLS 法などでは移動平均によるトレンドの極値附近の修正，$\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{I}$ に残るトレンド分の除去がある程度考慮されているが充分とはいえない．むしろ，より重要なことはトレンドの全体的なずれに対する考察であろう．

ある種の方法では $\boldsymbol{S\cdot I}$ から $\boldsymbol{S}$ を抽出する際に特異値の棄却というのを行なうことがある．これは $\boldsymbol{S}$ の変化の程度や $\boldsymbol{I}$ の分布に関する情報がかなりはっきりしている場合については気持として了解できないでもないが，一般には疑問の点もある．特に問題になるのは特異値が最終時点の近くにある場合で $\boldsymbol{S}$ の型の変化を前提としている以上，その変化の時点を見過すことになる．

逐次近似的方法の効果については，歪みを累積する危険は少ないとしても，これによってより正確な調整結果を得るという希望もいままでの方法においてほとんどない．デリケートな移動平均を用いるほど逐次近似による結果の動きは微小である．つまり大勢は始めにきまってしまって，あとは近似の回数をいくら増大しても目に見えるような変化はない．ロース肉をひき肉器にかけてでてくるものは誰がみてもひき肉であるが，ひき肉は何度ひいても多少の変化はあるにせよ，やっぱりひき肉にしかみえない．

3. 結果の利用について

総じてセンサス局法系の調整結果をみると，通常，最も変化の大きいトレンドに関してはまずまず大局的にその姿を逸することはないが，$\boldsymbol{S}$ と $\boldsymbol{I}$ を適確に捕えることはほとんど不可能に近いようである．つまりこれらの調整法を単にデータのスムージングとみる限りでは結果はある程度使いようになるが，経済時系列の構成分析の手段としてはあまりにもひどすぎる．特に問題となるのは $\boldsymbol{S}$ の型の傾向的歪み（$\boldsymbol{S}$ の型を固定した場合でさえも歪みを生ずる）と $\boldsymbol{I}$ の構造的変化である．よく $\boldsymbol{S}$ だけを除去した $\boldsymbol{T\cdot I}$ の形で経済モデルなどに使うのを見受けるが，これはほとんど意味がないばかりでなく，時には誤った結論を導くことにもなる．つまり調整によって得られた $\boldsymbol{T\cdot I}$ の系列の中に含まれる見掛け上の $\boldsymbol{I}$ と本来の（モデル系列で用いた）$\boldsymbol{I}$ とはその性格がまったく違う可能性が多分にある．このような場合は，むしろ本来の（モデル系列での）$\boldsymbol{T}$ と調整によって得た $\boldsymbol{T}$ との差を何らかの方法で客観的に評価し，その大きさを考慮にいれながら調整後の $\boldsymbol{T}$, そのものを利用する方がよいであろう．

§11. 季節調整についての一つの試み

今まで考えられてきた経済時系列の季節変動の調整法においては，すべて Mitchell の経済時系列の構造モデルをリゴラスな函数関係の中に求め，その函数の型に準じた計算手段を作り上げるという行き方がとられてきた．ここではその出発が非常に観念的なものでありながら，以後の処理は本来の経済目的とはほとんど無関係な極端に狭い数式上の制約の中で行なわざる

を得ない．従って処理方法の数学的妥当性を重視すれば現実の時系列の姿とモデルとの距離は遠ざかり，またその距離を近づけようとして複雑なモデルを考えれば妥当性のある処理方法はみつからないという破目に陥る．Mitchell の経済時系列に対する見方は非常に意味のあるものであることは疑う余地がないとしても，これを単純に数式化するということがそもそも無理といわざるを得ない．

そこで次に経済時系列の季節調整の問題を Mitchell の考えに立ちもどって，ごく観念的な立場から考えてみよう．

今，経済時系列を構成する四つの要素について前の前提をおく．

i) $\boldsymbol{T}$ ($\boldsymbol{C}$ を含む)

これは経済指標の大局的な動きであり，各時点での平均的なレベルであって，大きなそして急激な経済上の変革や調査測定法の変更がない限り，かなり長い期間で単調で，不連続点や細かい上下変動はないと考える．もし，

$$\boldsymbol{T}=f(t)$$

という函数の型で表示できたとすれば，$f(t)$ は t についての少なくとも第2次微分まで連続で，

$$\frac{d\boldsymbol{T}}{dt}=0$$

なる時点の間隔は1年以上と仮定する．

ii) $\boldsymbol{S}$

12ケ月を周期としたかなり規則的な変動である．周期性とは一つの周期内の上り下りの型に関する性質であって，周期内全時点のレベルに関する性質ではない．故に，ある経済時系列

$$\boldsymbol{O}_{ij}\quad (i:\ 年,\ j:\ 月)$$

から，その季節変動を何らかの方法で完全に除去し得たと仮定し，その除去したあとの系列を

$$\boldsymbol{P}_{ij}\quad (i:\ 年,\ j:\ 月)$$

とおけば，各 i について，

$$\sum_{j=1}^{12}\boldsymbol{O}_{ij}=\sum_{j=1}^{12}\boldsymbol{P}_{ij} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

が成り立つものと考えておく．そして，

$$\boldsymbol{S}_{ij}=\boldsymbol{O}_{ij}-\boldsymbol{P}_{ij}$$

をもって季節変動部分と名づければ，$\boldsymbol{S}$ は，

$$\sum_{j=1}^{12}\boldsymbol{S}_{ij}=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

を満足する．これは季節変動そのものの加法モデルを強要するものではない．例えば乗法モデルであれば，

$$\boldsymbol{T}_{ij}\cdot\boldsymbol{S}_{ij}=\boldsymbol{T}_{ij}(1+\boldsymbol{s}_{ij})\quad (i:\ 年,\ j:\ 月)$$

において，

$$\sum_{j=1}^{12}\boldsymbol{T}_{ij}\cdot\boldsymbol{s}_{ij}=0$$

であることが便宜的な意味で望ましいというだけであって，ここではモデル函数の型は問題にしていない．

iii) $\boldsymbol{I}$

原系列 $\boldsymbol{O}$ から季節変動部分だけを除去した系列 $\boldsymbol{P}$ とトレンド $\boldsymbol{T}$ との差

$$\boldsymbol{I}_{ij}=\boldsymbol{P}_{ij}-\boldsymbol{T}_{ij}$$

として $\boldsymbol{I}$ を定義する．更に $\boldsymbol{I}$ は1年周期の成分は含まず，しかも充分長い期間をとれば任意

の t_0 について，

$$\frac{1}{12k}\sum_{i=t_0}^{t_0+k-1}\sum_{j=1}^{12} I_{ij}=O(0)$$

であると仮定する．

さて，このような前提のもとに，原系列，

$$O_{ij} \quad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n,\ j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 12)$$

について次のような操作を考えてみよう．(原系列は記述を簡便にするために 1 月からはじまり12月で終るものとする)．

a)
$$Q_0=0$$
$$Q_i=\sum_{i=1}^{i}\sum_{j=1}^{12} O_{ij} \quad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$$

つまり，O_{ij} の累積をつくり．そのうちから各年の 12 月に対応するものだけをとり出す．そうすると (1) 式から，

$$Q_i=\sum_{i=1}^{i}\sum_{j=1}^{12} P_{ij} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

が成立する．

b) $Q_0,\ Q_1,\ Q_2,\ \cdots\cdots,\ Q_n$ をできるだけスムーズな曲線 $F(t)$ でフィットさせる．フィットの方法は次の基準による．

1) ある区間の T の大略の函数型が既知であれば，その区間ではその函数を積分した形をとる．

2) これが分からなければ O_{ij} に関する条件を考え，できるだけスムーズにつなぐ．例えば $Q_0,\ Q_1,\ \cdots\cdots,\ Q_n$ を通る函数 $F(t)$ の各点の曲率を $\rho(t)$ としたとき，

$$\int_{Q_0}^{Q_n}\rho^2(t)dt \quad \text{または} \quad \int\rho^2(t)ds$$

(ただし，ds は $F(t)$ の線素)

が最小になるような $F(t)$ を変分によって求めるのも一つの方法かも知れない．勿論これはフィッティングの気持を述べただけで実際には $F(t)$ の一価函数の条件とか O_{ij} が non-negative なら $F(t)$ の単調増大の条件などを加えておく必要があろう．

3) 簡易法としては三点ないし四点ずつ適当なカーブでフィットさせ，繋ぎめをスムージングしてもよい．

c) $F(t)$ の定差

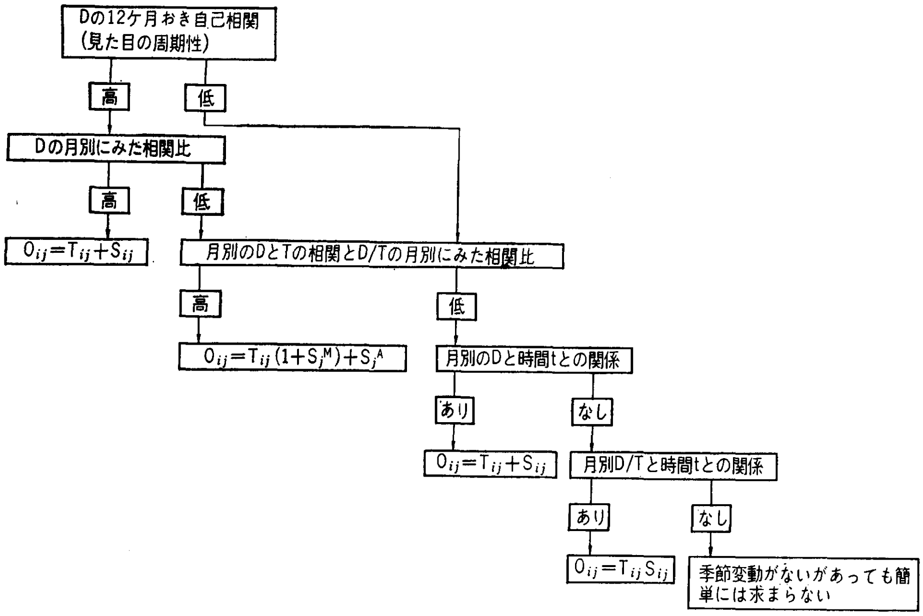
$$T_{11}=F(1)$$
$$T_{12}=F(2)-F(1)$$
$$T_{13}=F(3)-F(2)$$
$$\vdots$$
$$T_{1\ 12}=F(12)-F(11)$$
$$T_{2\ 1}=F(13)-F(12)$$
$$\vdots$$

を作って，これを T の近似値とする．この操作では 1 ケ年間の計と要素に関する仮定だけを情報として利用している．

d)
$$D_{ij}=O_{ij}-T_{ij}$$

とおき，第 14 図の手順に従って，時系列の構造モデルをさがす．

e) モデルの型をきめ，季節変動のパラメーターの推定を最小自乗法 (三次曲線のあてはめまで，それ以上複雑なものは使わない) によってきめ，これによって系列 P の推定値を作る．



第14図　モデルの型を探す手順

この場合 (1) 式の条件を入れる.

f) $\boldsymbol{P}$ の系列のうち連続した15項目程度の間隔に対して三次式をあてはめていき，これをスムーズにつないで $\boldsymbol{T}$ の推定値とする.

g) $\boldsymbol{P}-\boldsymbol{T}$ の移動平均，移動分散を作って，これらと $\boldsymbol{T}$ の相関を求め，これによって不規則変動の性質をみる.

h) f) で求まった $\boldsymbol{T}$ を用いて，d) 以下の計算を行ない，g) 項に対応する結果を比較することによって逐次近似の効果をみる.

以上の調整法の特徴は，

1) アプリオリにモデルを与えないで計算によって一番都合のよさそうなものをさがすこと

2) 移動平均の代りに，各要素に課せられた条件と曲線のあてはめを用いることによって移動平均の持つ難点をさける

3) 逐次近似の効果をIの性質によって評価し，意味のない計算をさけること

である．この調整法はまだ計算手段そのものにもいくつかの問題があるが，これらは近日中にそのほとんどが解決されるであろう．そしてこの方法と今まで考えられてきた種々の調整法との比較も近い将来に発表するつもりでいる.

統計数理研究所