装置の信頼性モデル

多　賀　保　志

(1964 年 12 月受付)

Reliability Models for Maintenance Policy

Yasushi Taga

A reliability model is considered not only applicable to various systems, but also is useful in representing changes of the system. Moreover, a cost model for life test is presented. (Life distribution is considered to be a kind of reliability.)

Institute of Statistical Mathematics

§1. はじめに

種々の装置の使用にあたっては，どの程度確実に作動するか，ということが大切な問題である．たとえば，ロケットを発射して所要の軌道にのせたいとしたとき，その成功度(成功確率) R がどのくらいか，ということが問題となろう．この場合には，そのロケットが N 個の部品から成り，その各々が発射時において確実に作動する確率が $\{R_i; 1 \leqq i \leqq N\}$ で，それらは互いに独立であると仮定すれば，$R=\prod_{i=1}^{N} R_i$ と表わされる．しかし，各部品の作動が互いに独立である，という仮定は必らずしも妥当でない（つまり互いに相関関係がありうる）と考えられるときには，上の表現は適用できない．ただし従来は部品テストより R_i を推定し，それを上式に入れて R の値を求め，それをもって R の近似的な推定値として扱ってきた．

一般的には自動車，電子計算機，工作機械などの装置をある期間にわたって使用するとき，時刻における作動確率 $R(t)$ が問題となるであろう．このような作動確率 $R(t)$ が，その装置の（時刻 t における）信頼性と呼ばれている（ロケットはごく短い時間しか作動しないから，$t=0$ と考えてよい）．この場合にも前と同様な表現はできるが，部品テストによって $R_i(t)$ を推定することは，現実の使用条件の下での部品の信頼性と異なったものを推定することになるので，あまり意味がない．したがって，実際には完成された装置を使って，$R(t)$ そのものを推定することが行なわれている（たとえば自動車のロード・テストなど）．しかし上のような定式化はあくまで設計や製作の立場にたっての信頼性であるが，われわれとしては使用者としての立場から装置の信頼性モデルを構成して行きたい．そのために，装置全体について検証可能な r ケの状態 $\{E_i; 1 \leqq i \leqq r\}$ を考える．ただし E_1 から E_{r-1} までは動作可能の状態，E_r は動作不能の状態を表わすものとする．たとえば，N 個の同一部品が並列しており，その各々には 0（動作可能）または 1（動作不能）の二つの状態があり，N ケの部品のうち少なくとも 1 ケが動作可能ならば装置全体として動作可能とすると，$r=2^N$，$E_1=(0, 0, \cdots, 0)$，$E_2=(1, 0, \cdots, 0)$，$\cdots$，$E_{2^N}=(1, 1, \cdots, 1)$ と表わすことができる．

以下われわれは次のようなモデルを考える．

1) 初期 ($t=0$) における状態の確率分布 $(a_1, \cdots, a_r)$ が与えられている．

2)　状態 E_i が初まってから終るまでの継続時間 T は，それ以前の経歴には無関係で，分布函数 $H_i(t)$ にしたがう確率変数である．

3)　状態 E_i の継続が終った時，次に状態 E_j にうつる条件付き確率（推移確率）は，E_i と E_j だけに依存し（時刻 t などに無関係），それを p_{ij} とする．また $P=(p_{ij})$ で推移確率行列を表わす．

このような定式化は必ずしも現実のものと一致するとは限らないが，$\{E_i\}$ を適当に設定し，$\{H_i(t)\}$ や $\{p_{ij}\}$ をうまく推定すれば，十分に現実の近似として役立つモデルになりうると考えられる（1，2 の例でモデルの妥当性が実際に検討された）．ただし，ふつうの意味での信頼性を考えるときには $p_{rj}=0\,(1\leqq j\leqq r-1)$ とすればよく，冗長度のある複雑な場合もふくめて一般的な取扱いができる．また $p_{rj}>0\,(1\leqq j\leqq r-1)$ とすると，動作不能の状態 E_r から動作可能な状態 E_j にもどりうること，すなわち，故障を修理（部品の再生やとりかえをふくむ）してある動作可能な状態にもどすことにあたり，どの程度の修理をするかによって E_j がきまる（すなわち $p_{rj}=1$）と考えればよい．また動作不能の状態にも色々な場合が考えられるときは，$\{E_1, \cdots, E_q\}$ が動作可能の状態，$\{E_{q+1}, \cdots, E_r\}$ が動作不能の状態とすればよい．このような定式化によって，信頼性だけでなく，装置の状態一般の時間的な経過をマルコフ再生過程として表現することができるわけである．以下このモデルのもとで，次のような問題を考えてみよう．

(a)　時刻 t までに何回動作不能の状態が起るか？

(b)　時刻 t までに動作不能である延べ時間はどの位か？

(c)　そのような延べ時間の極限分布はどうなるか？

(d)　装置の保守を行なう場合，最適な保守方法はどうすべきか？　すなわち，動作不能による損失と保守の費用を考え，単位時間当りの平均損失を最小にする方法は何か？

(e)　寿命試験において試験装置の償却費を考慮に入れたときの最適な方法は何か？

§2.　時刻 t までに状態 E_j にあった回数と延べ時間の極限分布

$[0, t]$ の間に状態 E_j になった（訪問）回数を $N_j(t)$，$N(t)=\sum_{j=1}^{r} N_j(t)$ とし，P の正則性と各 $H_i(t)$ の $(2+\delta)$ 次の絶対モーメント $(\delta>0)$ の存在を仮定すると，

1°　t を十分大きくすると，$N(t)$ の分布は平均 t/τ，分散 $\sigma^2 t/\tau^3$ なる正規分布で近似される．ただし，$\tau=\sum_{j=1}^{r}\alpha_j\tau_j$，$\sigma^2=\sum_{j=1}^{r}\alpha_j\sigma_j^2+\sum_{j,k=1}^{r}\gamma_{jk}\tau_j\tau_k$，　となる．ここで　$\tau_j=\int_0^\infty t\,dH_j(t)$，$\sigma_j^2=\int_0^\infty (t-\tau_j)^2 dH_j(t)$，　$\gamma_{jk}=\delta_{jk}\alpha_j-\alpha_j\alpha_k+\alpha_j\sum_{n=1}^{\infty}(p_{jk}^{(n)}-\alpha_k)+\alpha_k\sum_{n=1}^{\infty}(p_{kj}^{(n)}-\alpha_j)$，　$P^n=(p_{ij}^{(n)})$，$(\alpha_1, \cdots, \alpha_r)P=(\alpha_1, \cdots, \alpha_r)$，$\delta_{jk}$ はクロネッカーのデルタである．

2°　$N_j(t)$ の極限分布についても同様な正規分布になることが予想されるが，まだ証明はできていない．

3°　n 回の推移が起ったとし（時刻 t は指定しないで），E_j にあった延べ時間（滞在時間）を $S_n^{(j)}$ とすると，$(S_n^{(1)}, \cdots, S_n^{(r)})$ は，平均が $(n\alpha_1\tau_1, \cdots, n\alpha_r\tau_r)$，共分散行列が $\{n(\delta_{jk}\alpha_j\sigma_j^2+\gamma_{jk}\tau_j\tau_k);\ 1\leqq j, k\leqq r\}$ なる r 次元の正規分布で近似される。(n が十分大きいとして)。

4°　$[0, t]$ の間で E_j に滞在した時間 $S_j(t)$ についても正規分布による近似ができる．

以上の証明については，〔1〕に述べてあるので参照されたい．このような事柄から問題 a, b, c についての回答がえられるわけである．また t があまり大きくないときの取扱いは，行列 $(p_{ij}H_i(t))$ のラプラス変換 $q(s)$ を利用すればよい（〔4〕参照）．

§3. 最適な保守計画・寿命試験

ここで扱われる問題では，部品とりかえによる手間や部品代，装置の停止による損失などをまず第1に損失函数として表わすこと，それから損失の期待値を最小にするような手続き（方法）を定めること，というような処理が必要である．したがって，個々の問題によって取扱いの方法が異なり，一般的な定式化はむつかしくまたあまり意味がない．そこで次の二つのケースを例示しておく．

1) 住宅の最適修繕計画——公団アパートの壁・ドア・浴槽などを定期的に巡回修理する問題であるが，故障や汚れの度合にいくつかの段階を定めればそれで住宅の状態が表現できる．これについては〔6〕を参照されたい．

2) 最適寿命試験——検査する品物の寿命分布を $F(t)=1-e^{-t/\theta}(\theta>0)$ とし，検査費用は品物を試験装置にセットする費用と試験装置の償却費等の和であるとする．検査方法としては，初めに n_1 ケをセットして r ケがだめになったときに試験を打切る取り代えなしの方法1と，初めに n_2 ケをセットし1ケだめになるごとに新しいものに取り代えてゆく方法2とを考える．検査費用がそれぞれ

$$C_1=c_1n_1+c_2n_1^{\alpha}T_r \qquad \left(\begin{array}{l} T_r\text{: 試験時間} \\ 0<\alpha<1 \end{array}\right)$$
$$C_2=c_1(n_2+r-1)+c_2n_2^{\alpha}T_r$$

で表わされるとし，平均検査費用 $\bar{C}_1$ と $\bar{C}_2$ を最小にする $n_1^*=n_1^*(\alpha,\beta,r)$, $n_2^*=n_2^*(\alpha,\beta,r)$ およびそのときの費用 $\bar{C}_1^*$, $\bar{C}_2^*$ が求められる．（ただし $\beta=C_1/C_2\theta$）．少し大まかにいうと，α が 0 に近いときには $\bar{C}_1^*<\bar{C}_2^*$ であり，α が 1 に近いときには $\bar{C}_1^*>\bar{C}_2^*$ である．くわしくは〔2〕を参照されたい．

3) 取り換え個数の高次モーメント——ある特定の部品に注目し，時刻 t までに取り換えられた個数を $N(t)$ とする．t が十分大きいと，$N(t)$ はほぼ正規分布で近似されるが，t がそれほど大きくないときには，$N(t)$ の2次以上のモーメントを求める必要がある．一般にそれはあまり容易ではないので，Weibull 分布と Γ 分布のときにそれらのモーメントが巾級数の形で計算できることを示した．（くわしくは〔3〕参照）

統計数理研究所

参考文献

〔1〕 Y. Taga, On the limiting distribntions in Markov renewal processes with finitely many states, Ann. Inst. Stat. Math., 15 (1963), 1-10.

〔2〕 Y. Taga, On the optimal life test procedures based on a cost model, Ann. Inst. Stat. Math., 14 (1962), 97-106.

〔3〕 Y. Taga, On high order moments of the number of renewals, Ann. Inst. Stat. Math., 15 (1964), 187-196.

〔4〕 R. Pyke, Markov renewal processes with finitely many states, Ann. Math. Stat., 32 (1961), 1243-1259.

〔5〕 G. H. Weiss, The reliability of components exhibiting cumulatire damage effects, Technometrics, 3 (1961), 413-422.

〔6〕 鈴木達三・高橋宏一，計画修繕資料作成に関する研究，日本住宅公団調研レポート，(1963).