Electron-Photon カスケードの確率モデル

崎　野　滋　樹

(1964年12月受付)

On a Stochastic Model in Electron-Photon Cascade

Shigeki Sakino

The stochastic theory of cascade processes is rather difficult and complex. The difficulties involved are due to the fact that, in addition to considering the numbers of one or more types of particles at a given depth of the absorbing medium, we must consider the energy distribution of the particles. As the energy state is continuous, it is very difficult to obtain the probability distribution of the number of particles with a given energy at a given depth in electron-photon cascade. The main problem in cascade theory has been that of determing the mean and variance of the number of particles with a given energy at a given depth.

Therefore, using the discrete depth parameter t and the discrete energy state E_j ($j=0, 1, 2, \cdots n$), we derived the probability distribution of the number of electrons with a given energy at a given depth. And, assuming that the transition probabilitions of Bremstrahlung and a pair creation are uniform, we gave the numerical results of the mean, variance, coefficient of variation of the number of electrons with a given energy at a depth. These results are given in Fig. 1, 2, 3.

Institute of Statistical mathmatics

1　Electron-Photon カスケードの問題点並にその発展

Electron-Photon カスケードにおける統計的研究は Bhabha, Heitler (1937)[1] によって始められた．すなわち，彼らは，エネルギー区間 (E_1, E_1+dE_1) に入る secondary electron をたたきだす確率とエネルギー区間 (E_2, E_2+dE_2) に入る secondary electron をたたきだす確率とが互いに独立であるとして，深さ t のところで，エネルギーが E 以上の n コの electron を見出す確率を，

$$P_n(E, t)=\frac{(\lambda t)^n}{n!}\exp(-\lambda t) \qquad \lambda=\lambda(E)$$

で与えた．このポアッソン過程において，$X(t)$ を，深さ t で，エネルギーが E 以上なる particle の数をあらわす確率変数とすれば，

$$\mathcal{E}\{X(t)\}=V\{X(t)\}=\lambda t$$

となる．ただし，$\mathcal{E}$ は期待値を，Vは分散をあらわす．ところで，この平均個数が必らずしも吸収体の厚さに比例しないことが実験的に認められたのであろう．このことから，Bahbha, Heitler は Furry (1937)[2]によって批判を受けた.

彼は, Furry モデル

$$P_n(t)=\{\exp(-\lambda t)\}\{1-\exp(-\lambda t)\}^{n-1} \qquad n=1,2,\cdots \qquad t\geqq 0$$

を発表し,

$$\mathcal{E}\{X(t)\}=\exp(\lambda t)$$

$$V\{X(t)\}=\{\exp(\lambda t)\}\{\exp(\lambda t)-1\}$$

を与えたけれども, collison によるエネルギー loss を無視した点ではポアッソン・モデルと余り変りばえがしない. Coefficient of Variation を考えても, t が小さくないところではポアッソン・モデルの方が遙かに小さい.

これらの一般化として Arley[3] は Electron-Photon カスケードにポリヤのモデルを適用した. 彼のモデルは

$$P_n(t)=\frac{(\lambda t)^n}{n!}(1+\alpha\lambda t)^{-n-(1/\alpha)}\prod_{i=1}^{n-1}(1+\alpha i) \qquad n=1,2,\cdots$$

であるが, これは $\alpha=0$, $\alpha=1$ とおけばポアッソン分布, Furry 分布になる.

現実的なカスケード過程の最初のモデルは Scott, Uhlonbeck[4] らしい. 彼らは, radiation loss, pair production についての量子力学的断面積(衝突の確率)を取り入れた. 更に, 比較的現実的なモデルは, 以下において述べる人たちによって与えられたわけである. ところで, これらの人たちの共通の困難な点は, エネルギー state が連続体であるために, マルコフの理論の範囲で真の確率密度を定義することが非常に困難なことである.

さて, これまで, 現実的といわれている electron-photon カスケード・モデルについて紹介しよう.

(イ) Regeneration Point Method

Jánossy[5] は Regeneration Point Method を用いて Bellman-Harris[6],[7] の式を用いた. この Jánossy によって導かれた拡散方程式は G-equation と名づけられている. この G-equation は, 始め nucleon カスケードに導入され, つづいて, electron-photon カスケードにも応用された. この G-equation について簡単に述べよう.

いま, nucleon collison の断面積(確率)を

$$w(E_0,E',E'')dE'dE''dt=w\left(\frac{E'}{E_0},\frac{E''}{E_0}\right)\frac{dE'dE''}{E_0{}^2}dt$$

と仮定した. すなわち, これは, エネルギー E_0 の primary particle が深さ $(t,t+dt)$ でエネルギー区間 $(E',E'+dE')$, $(E'',E''+dE'')$ にある secondary particle を作る確率と考える. いま, $\varepsilon'=E'/E_0$, $\varepsilon''=E''/E_0$ とおくと, $\varepsilon'+\varepsilon''>1$, $\varepsilon'<\varepsilon''$ なるときは,

$$w(\varepsilon',\varepsilon'')=0$$

であるから, 物質中の単位長さ当りの全断面積は,

$$\int_0^1\int_0^1 w(\varepsilon',\varepsilon'')d\varepsilon'd\varepsilon''=\alpha \qquad (\alpha \text{ は常数})$$

である.

次に, $\Phi(\varepsilon,n_1,n_2;t)$ をカスケードが深さ t の所でエネルギー $E(=\varepsilon E_0)$ 以上の particle n_1 個と E 以下の particle n_2 個を含む確率とする. そのとき, $\Phi(\varepsilon,n_1,n_2;t)$ についての積分方

程式

$$\Phi(\varepsilon, n; t)=\Phi(\varepsilon, n_1, n_2; t)$$
$$=\int_0^t \exp\{-\alpha(t-\tau)\}d\tau \sum_{\substack{n_1'+n_1''=n_1 \\ n_2'+n_2''=n_2}} \int_0^\infty\int_0^\infty \Phi\left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}, n_1', n_2'; \tau\right)$$
$$\times\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon''}, n_1'', n_2''; \tau\right)w(\varepsilon' \varepsilon'')d\varepsilon' d\varepsilon''$$

を導くことができる．更に，$\Phi(\varepsilon, n; t)$ の generating function を $G(\varepsilon, z; t)$

$$G(\varepsilon, z; t)=\sum_{n=0}^{\infty}\Phi(\varepsilon, n; t)z^n$$

とするとき，上式において $n=(n_1, n_2)$, $z=(z_1, z_2)$ として，G に関する積分方程式

$$G(\varepsilon, z; t)=\int_0^t \exp\{-\alpha(t-\tau)\}\int_0^\infty\int_0^\infty G\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}, z; \tau\right) G\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon''}, z; \tau\right)w(\varepsilon', \varepsilon'')d\varepsilon' \varepsilon'' d\tau$$

初期条件　　$\varepsilon<1$ ならば　$G(\varepsilon, z_1, z_2; 0)=z_1$

　　　　　　$\varepsilon>1$ ならば　$G(\varepsilon, z_1, z_2; 0)=z_2$

を与えた．これが Jánossy の G-equation である．

同じように，この考え方を electron-photon カスケードに用いた．$\Phi^{(i)}(\varepsilon, n; t)$ を深さ t のところで，n 個の particle の存在確率をあらわすとする．ただし，$i=1$ は primary particle が electron, $i=2$ は primary particle が photon である場合をあらわす．上の確率 $\Phi^{(i)}(\varepsilon, n; t)$ において，n は $n=(n_1, n_2, n_3\, n_4)$ をあらわす．但し，n_1 は εE_0 より大きなエネルギーをもつ electron 数，n_2 は εE_0 以下の electron 数，n_3, n_4 はエネルギーが εE_0 以上，εE_0 以下の photon 数をあらわす．そして Bremstrahlung (photon を出す)，pair production (electron, positron の pair を作る) についての Bethe, Heitler の遷移確率を用いて Approximation A (ionization によるエネルギー損失のない場合)，Approximation B (ionization によるエネルギー損失のある場合) について，$\Phi^{(i)}(\varepsilon, n; t)$, $G^{(i)}(\varepsilon, z; t)$ に関する微積分方程式を導いた．これら一連の式を Jánossy の G-equation と呼んでいる．

Lopuszański[8], Messel[9] は Approximation A, B の下で，G-equation の解の漸近的性質について述べた．

(ロ) 特性汎函数の方法

特性汎函数の方法は，特性函数と同じように，連続無限個の確率変数の同時分布を研究するのに役立つ．これは，Bartlett, Kendall[10] によって展開された．

いま，深さ t でエネルギーが E 以上の particle 数をあらわす確率変数を $X(E; t)$，E の任意の実函数を $\alpha(E)$ とするとき，特性汎函数は，

$$\varphi[\alpha(E); t]=\mathcal{E}\left\{\exp\left\{-i\int_E \alpha(E)d_E X(E; t)\right\}\right\}$$

によって定義される．また，electron-photon カスケードについても同じように特性汎函数が定義される．上に対応した electron 数，photon 数をあらわす確率変数を $X^{(i)}(E; t)$, $Y^{(i)}(E; t)$, 任意の実函数，$\mu(E)$, $\eta(E)$ とすると，

$$\varphi^{(i)}[\mu(E), \eta(E); t]=\mathcal{E}\left\{\exp\left\{-i\int_E [\mu(E)d_E X^{(i)}(E; t)+\eta(E)d_E Y^{(i)}(E; t)]\right\}\right\}$$

で与えられる．ただし，$i=1$ は，カスケードが electron で始められたとき，$i=2$ は photon

で始められた場合をあらわす．regeneration point method の方法により，特性汎函数の微積分方程式を導いた．

(ハ) Product Density Function による方法

Bhabha[10], Ramakrishnan[11],[12] によって始められた product density function による方法について述べよう．

確率変数 $X(E;t)$ はエネルギーが E 以上の particle 数をあらわし，確率変数 $d_EX(E;t)$ はエネルギーが $(E, E+dE)$ にある particle 数をあらわす．そして $d_EX(E;t)$ の平均を

$$f_1(E;t)dE=\mathcal{E}\{d_EX(E;t)\}$$

とし，n 個の particle がエネルギー区間 $(E, E+dE)$ に入る確率 P_n を

$$P_1=f_1(E;t)dE+O(dE)^2=\mathcal{E}\{d_EX(E;t)\}+O(dE)^2$$

$$P_0=1-P_1$$

$$P_n=O(dE)^n \qquad n>1$$

で与えるとき，

$$\mathcal{E}[\{d_EX(E;t)\}^K]=\mathcal{E}\{d_EX(E;t)\}$$

となることは明らかである．この $f_1(E;t)$ を degree 1 の product density といい，ついで二つの確率変数 $d_{E_1}X(E_1;t)$, $d_{E_2}X(E_2;t)$ について，

$$f_2(E_1, E_2;t)dE_1dE_2=\mathcal{E}\{d_{E_1}X(E_1;t)d_{E_2}X(E_2;t)\}$$

とおき，この $f_2(E_1, E_2;t)$ を degree 2 の product density とした．更に，一般に n 個の確率変数 $d_{E_1}X(E_1;t),\cdots, d_{E_n}X(E_n;t)$ について，

$$f_n(E_1, E_2,\cdots, E_n;t)dE_1dE_2\cdots dE_n=\mathcal{E}\{d_{E_1}X(E_1;t)d_{E_2}X(E_2;t)\cdots d_{E_n}X(E_n;t)\}$$

なるように degree n の product density function を定義した．

cosmic ray の問題においては，主として2種の particle (例えば electron, photon) を扱うのであるから，electron については，

$$f_n(E_1, E_2,\cdots, E_n;t)$$

を，photon については，

$$g_n(E_1, E_2,\cdots, E_n;t)$$

なる degree n なる product density function を定義し，electron, photon について degree (n, m) の mixed product density function

$$fg_{n,m}(E_1, E_2,\cdots, E_{n+m};t)$$

を定義する．そして，Ramakrishman[12] は degree 2 の場についての f, g, fg の微積分方程式を与え，あるエネルギー以上の electron 数をあらわす確率変数の平均，分散を与えた．

また，Bhabha, Ramakrishnan の product density function に対して，Jánossy[13] もこれに類した J-function を発表している．すなわち，$dE_1, dE_2,\cdots, dE_n$ の各々のエネルギー区間に各一つづつ存在して，他のエネルギー state には存在しない確率をあらわす函数

$$J_h(E_1, E_2,\cdots, E_h)dE_1dE_2\cdots dE_h$$

を与えたけれども，Ramakrishnan の product density function との関係はどうか．この関係は，

$$f_h(E_1, E_2, \cdots, E_h; t) = \sum_n \frac{1}{(n-h)!} \int_{E_n} \cdots \int_{E_{h+1}} J_n(E_1, E_2, \cdots, E_n; t) dE_{h+1} \cdots dE_n$$

であって，Ramakrishnan によつて与えられたものである．ところで，Ramakrishnan のいっているごとく，Jánossy の J-function は確かに計算に技術的困難をともなう．がしかし，particle の存在するあらゆるエネルギー state について同時分布を考えているという点では，Ramakrishnan のモデルよりはより多くの information が得られるという利点をもっている．がしかし，現実に J_n を計算する手続きが非常に面倒であるという点では Ramakrishnan の意見に同感である．

product density function による方法だと，degree 1, 2 の場合については解かれているが，一般には，(イ) (ハ) (ロ) の解を見つけだすことは，非常に困難である．Lopuzanski[8] は，Jánossy の G-equation について，t における particle の平均個数ならびにエネルギーが εE 以上の electron 数 n_1，photon 数 n_2 を見出す確率 $\Phi(\varepsilon, n_1, n_2; t)$ の漸近的性質を導いているけれども，$\Phi(\varepsilon, n_1, n_2; t)$ の explicit な形を見出すまでには至っていない．

そのほか，homogeneous な核物質中での nucleon カスケード，ならびに吸収体中での nucleon カスケート・モデルが，Messel, Plotts によって導かれたけれども，ここでは electron-photon カスケードの問題に限定したので省略する．

以上，私の理解の範囲で，electron-photon カスケードの三つの型について紹介した．さて，以上三つの型について共通した困難な問題は，解析的に真の確率密度を求めることが困難であるということである．その理由は，エネルギー空間が連続体になっているからである．エネルギー変数が離散型になれば，カスケード・モデルもマルコフの理論で処理できるのみならず更に実用的になる．そこで，深さのパラメータ t もエネルギー state E も共に離散型変数として，ポアッソン過程の一般化を試みた．次節で詳しく述べることにしょう．

2 新しいカスケード・モデル

先ず，深さの単位を，1個の photon が pair creation によって2個の electron（1つは electron，他の1つは positron）に分れる平均距離とする．そして，t における photon b_t 個は pair creation によって $t+1$ では $b_{t+1}=2b_t$ 個の electron (b_t 個は electron，残りの b_t 個は positron) に分れるものとする．electron についても同じように考える．例えば，t における1個の electron は，$t+1$ では Bremstrahlung により1個の electron と1個の photon に分れると考える．深さの単位は，1個の photon が2つの electron に分れる平均距離を unit にしたのであるから，この単位では，1個の electron はエネルギーがそのままの状態である場合が考えられる．その場合には，t に於けるエネルギー E の1個の electron は，$t+1$ でエネルギー E の1個の electron とエネルギー0の1個の photon が生じたと考える．このように考えると，t において electron a_t 個，photon b_t 個あるとき，$t+1$ における electron, photon の個数は a_t+2b_t, a_t になる．そこで，$t=0$ で1個の electron があったとき，$t=1, 2, 3, \cdots, t$ における electron 数，photon 数はどうなるか．その関係は次のごとくである．

種類 \ 深さ(t)	0	1	2	3	4	………	t
electron	1	1	3	5	11	………	$f(t)$
photon	0	1	1	3	5	………	$g(t)$
計	1	2	2^2	2^3	2^4	………	2^t

そして，深さ t における electron 数 $f(t)$，photon 数 $g(t)$ は

$$f(t)=\frac{2^{t+1}}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{t+1}\right\},$$

$$g(t)=f(t-1)=\frac{2^t}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^t\right\}$$

で与えられる．そして，エネルギー state を離散型変数と考えたとき，深さ t における electron $f(t)$ 個について，エネルギー state j にある electron の平均個数ならびに分散を求めることにしよう．エネルギー state を整数値 $0, 1, 2, \cdots, n$ とする．いま，これを深さ t と区別するために，$E_0, E_1, \cdots, E_n$ と表現する．$t=0$ においてエネルギー $E_n=n$ の1個の electron から出発して，シャワーの深さ t におけるエネルギー state E_j の平均，分散を求めよう．

モデルの設定の前に，基本事象の性質ならびにそれらに関係した確率について述べる．

(1) 吸収体の単位距離を走った1個のエネルギー E_i の electron が，エネルギー E_i-E_j の1個の photon を放射する確率を μ_{ij} とすると，$\sum_{j=0}^{i}\mu_{ij}=1$．ただし，$i<j$ ならば $\mu_{ij}=0$．

(2) エネルギー E_i の1個の photon が electron 対を作り，その一つが E_j，他の一つが E_i-E_j である確率を λ_{ij} とすると，$\sum_{j=[(i+1)/2]}^{i}\lambda_{ij}=1$．ただし，$i<j$ ならば $\lambda_{ij}=0$，かつ [ ] はガウスの記号を示す．

(3) t でエネルギー E_i の electron が a 個あるとき，$t+1$ でそのうち l 個がエネルギー E_i-E_j なる photon を生ずる確率を，二項分布

$$\frac{a!}{l!(a-l)!}(\mu_{ij})^l(1-\mu_{ij})^{a-l} \qquad (l=0, 1, 2, \cdots, a),$$

同じように，エネルギー E_i の photon が b 個あるとき，そのうち m 個が E_j，E_i-E_j なる electron 対を生ずる確率を

$$\frac{b!}{m!(b-m)!}(\lambda_{ij})^m(1-\lambda_{ij})^{b-m} \qquad (m=0, 1, \cdots, b)$$

で与える．しかも，E_j 乃至，それ以上のエネルギーをもったすべての particle は互いに独立にエネルギー state E_j に移る．

以上の基本事象ならびにそれらの確率を基にして，$t=0$ でエネルギー $E_n(=n)$ の1個の electron から出発してカスケード・シャワーを得たとする．そのとき，$t=1, 2, \cdots$ におけるエネルギー $E_j(=j)$ $(j=0, 1, 2, \cdots, n)$ の electron の個数の分布を求めることにしよう．

先づ，深さ t において，エネルギー E_j なる electron が l 個存在する確率を，$P_l(E_j, t)$ であらわすことにする．$t=0$ でエネルギー E_n なる1個の electron で始められたとしたとき，$t=1, 2, \cdots$ における $P_l(E_j, t)$，ならびに平均 $\pi(E_j, t)=\sum_l lP_l(E_j, t)$，分散 $V_\pi(E_j, t)=\sum_l\{l-\pi(E_j, t)\}^2P_l(E_j, t)$ を計算しよう．

$t=1$

$$P_1(E_j, 1)=\mu_{nj}$$

$$P_0(E_j, 1)=1-\mu_{nj}$$

従って，$t=1$ におけるエネルギーが E_j $(j=0, 1, 2, \cdots, n)$ なる electron 数 l の平均，分散は

$$\pi(E_j, 1)=\mu_{nj}\,,$$

$$V_\pi(E_j, 1)=\mu_{nj}(1-\mu_{nj})=\pi(E_j, 1)\{1-\pi(E_j, 1)\} \qquad j=0, 1, 2, \cdots, n\,.$$

$t=2$

$$P_0(E_j, 2)=\sum_{K_1} \mu_{nK_1}(1-\mu_{K_1 j})(1-\lambda_{n-K_1, j})$$

$$P_1(E_j, 2)=\sum_{K_1} \mu_{nK_1}\mu_{K_1 j}(1-\lambda_{n-K_1, j})+\sum_{K_1\neq n-2j} \mu_{nK_1}(1-\mu_{K_1 j})\lambda_{n-K_1, j}\,,$$

$$P_2(E_j, 2)=\sum_{K_1\neq n-2j} \mu_{nK_1}\mu_{K_1 j}\lambda_{n-K_1, j}+\mu_{n, n-2j}(1-\mu_{n-2j, j})\lambda_{2j, j}\,,$$

$$P_3(E_j, 2)=\mu_{n, n-2j}\mu_{n-2j, j}\lambda_{2j, j}\,,$$

$$\sum_{l=0}^{3} P_l(E_j, 2)=\sum \mu_{nK_1}=1\,.$$

平均 $\pi(E_j, 2)$, 分散 $V_\pi(E_j, 2)$ は

$$\pi(E_j, 2)=\sum_{K_1} \mu_{nK_1}\mu_{K_1 j}+\sum_{K_1} \mu_{nK_1}\lambda_{n-K_1, j}+\mu_{n, n-2j}\lambda_{2j, j}\,,$$

$$\begin{aligned} V_\pi(E_j, 2)=\pi(E_j, 2)\{1-\pi(E_j, 2)\}+2\sum_{K_1} \mu_{nK_1}\mu_{K_1 j}\lambda_{n-K_1, j}+2\mu_{n, n-2j}\lambda_{2j, j} \\ +2\mu_{n, n-2j}\mu_{n-2j, j}\lambda_{2j, j} \qquad j=0, 1, 2, \cdots, n. \end{aligned}$$

$t=3$

$$\begin{aligned} P_0(E_j, 3)=&\sum_{K_1, K_2, K_2'} \mu_{nK_1}\mu_{K_1K_2}(1-\mu_{K_2 j})\lambda_{n-K_1, K_2'}(1-\mu_{K_2' j})(1-\mu_{n-K_1-K_2', j}) \\ &\times(1-\lambda_{K_1-K_2, j})\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_1(E_j, 3)=&\sum_{K_1, K_2, K_2'} \mu_{nK_1}\mu_{K_1K_2}\lambda_{n-K_1, K_2'}\mu_{K_2 j}(1-\mu_{K_2', j})(1-\mu_{n-K_1-K_2', j})(1-\lambda_{K_1-K_2, j}) \\ &+\sum_{K_1, K_2, K_2'} \mu_{nK_1}\mu_{K_1K_2}\lambda_{n-K_1, K_2'}(1-\mu_{K_2 j})\mu_{K_2' j}(1-\mu_{n-K_1-K_2', j})(1-\lambda_{K_1-K_2, j}) \\ &+\sum_{K_1, K_2, K_2'} \mu_{nK_1}\mu_{K_1K_2}\lambda_{n-K_1, K_2'}(1-\mu_{K_2 j})(1-\mu_{K_2' j})\mu_{n-K_1-K_2', j}(1-\lambda_{K_1-K_2, j}) \\ &+\sum_{\substack{K_1, K_2, K_2' \\ K_2\neq K_1-2j}} \mu_{nK_1}\mu_{K_1K_2}\lambda_{n-K_1, K_2'}(1-\mu_{K_2 j})(1-\mu_{K_2', j})(1-\mu_{n-K_1-K_2, j})\lambda_{K_1-K_2, j}\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_2(E_j, 3)=&\sum_{K_1, K_2, K_2'} \mu_{nK_1}\mu_{K_1K_2}\lambda_{n-K_1, K_2'}\mu_{K_2 j}\mu_{K_2' j}(1-\mu_{n-K_1-K_2', j})(1-\lambda_{K_1-K_2, j}) \\ &+\sum_{K_1, K_2, K_2'} \mu_{nK_1}\mu_{K_1K_2}\mu_{n-K_1, K_2'}\mu_{K_2 j}(1-\mu_{K_2' j})\mu_{n-K_1-K_2', j}(1-\lambda_{K_1-K_2, j}) \\ &+\sum_{K_1, K_2, K_2'} \mu_{nK_1}\mu_{K_1K_2}\lambda_{n-K_1, K_2'}(1-\mu_{K_2 j})\mu_{K_2' j}\mu_{n-K_1-K_2', j}(1-\lambda_{K_1-K_2, j}) \\ &+\sum_{\substack{K_1, K_2, K_2' \\ K_2\neq K_1-2j}} \mu_{nK_1}\mu_{K_1K_2}\lambda_{n-K_1, K_2'}\mu_{K_2 j}(1-\mu_{K_2' j})(1-\mu_{n-K_1-K_2', j})\lambda_{K_1-K_2, j} \\ &+\sum_{\substack{K_1, K_2, K_2' \\ K_2\neq K_1-2j}} \mu_{nK_1}\mu_{K_1K_2}\lambda_{n-K_1, K_2}(1-\mu_{K_2 j})\mu_{K_2' j}(1-\mu_{n-K_1-K_2', j})\lambda_{K_1-K_2, j} \\ &+\sum_{\substack{K_1, K_2, K_2' \\ K_2\neq K_1-2j}} \mu_{nK_1}\mu_{K_1K_2}\lambda_{n-K_1, K_2'}(1-\mu_{K_2 j})(1-\mu_{K_2' j})\mu_{n-K_1-K_2', j}\lambda_{K_1-K_2, j} \\ &+\sum_{\substack{K_1, K_2, K_2' \\ K_2=K_1-2j}} \mu_{nK_1}\mu_{K_1K_2}\lambda_{n-K_1, K_2}(1-\mu_{K_2 j})(1-\mu_{K_2' j})(1-\mu_{n-K_1-K_2', j})\lambda_{K_1-K_2, j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_3(E_j, 3)=&\sum_{K_1, K_2, K_2'} \mu_{nK_1}\mu_{K_1K_2}\lambda_{n-K_1, K_2'}\mu_{K_2 j}\mu_{K_2' j}\mu_{n-K_1-K_2', j}(1-\lambda_{K_1-K_2, j}) \\ &+\sum_{\substack{K_1, K_2, K_2' \\ K_2\neq K_1-2j}} \mu_{nK_1}\mu_{K_1K_2}\lambda_{n-K_1, K_2'}\mu_{K_2 j}\mu_{K_2' j}(1-\mu_{n-K_1-K_2', j})\lambda_{K_1-K_2, j} \end{aligned}$$

$$+\sum_{\substack{K_1,K_2,K_2'\\K_2\neq K_1-2j}}\mu_{nK_1}\mu_{K_1K_2}\lambda_{n-K_1,K_2'}\mu_{K_2j}(1-\mu_{K_2'j})\mu_{n-K_1-K_2',j}\lambda_{K_1-K_2,j}$$

$$+\sum_{\substack{K_1,K_2,K_2'\\K_2\neq K_1-2j}}\mu_{nK_1}\mu_{K_1K_2}\lambda_{n-K_1,K_2'}(1-\mu_{K_2j})\mu_{K_2'j}\mu_{n-K_1-K_2',j}\lambda_{K_1-K_2,j}$$

$$+\sum_{\substack{K_1,K_2,K_2'\\K_2=K_1-2j}}\mu_{nK_1}\mu_{K_1K_2}\lambda_{n-K_1,K_2'}\mu_{K_2j}(1-\mu_{K_2'j})(1-\mu_{n-K_1-K_2',j})\lambda_{K_1-K_2,j}$$

$$+\sum_{\substack{K_1,K_2,K_2'\\K_2=K_1-2j}}\mu_{nK_1}\mu_{K_1K_2}\lambda_{n-K_1,K_2'}(1-\mu_{K_1j})\mu_{2'j}(1-{}_{n-K_1-K_2',j})\lambda_{K_1-K_2,j}$$

$$+\sum_{\substack{K_1,K_2,K_2'\\K_2=K_1-2j}}\mu_{nK_1}\mu_{K_1K_2}\lambda_{n-K_1,K_2'}(1-\mu_{K_2j})(1-\mu_{K_2'j})\mu_{n-K_1-K_2',j}\lambda_{K_1-K_2,j}\,,$$

$$P_4(E_j,4)=\sum_{\substack{K_1,K_2,K_2'\\K_2\neq K_1-2j}}\mu_{nK_1}\mu_{K_1K_2}\lambda_{n-K_1,K_2'}\mu_{K_2j}\mu_{K_2'j}\mu_{n-K_1-K_2',j}\lambda_{K_1-K_2,j}$$

$$+\sum_{\substack{K_1,K_2,K_2'\\K_2=K_1-2j}}\mu_{nK_1}\mu_{K_1K_2}\lambda_{n-K_1,K_2'}\mu_{K_2j}\mu_{K_2'j}(1-\mu_{n-K_1-K_2',j})\lambda_{K_1-K_2,j}$$

$$+\sum_{\substack{K_1,K_2,K_2'\\K_2=K_1-2j}}\mu_{nK_1}\mu_{K_1K_2}\lambda_{n-K_1,K_2'}\mu_{K_2j}(1-\mu_{K_2'j})\mu_{n-K_1-K_2',j}\lambda_{K_1-K_2,j}$$

$$+\sum_{\substack{K_1,K_2,K_2'\\K_2=K_1-2j}}\mu_{nK_1}\mu_{K_1K_2}\lambda_{n-K_1,K_2'}(1-\mu_{K_2j})\mu_{K_2'j}\mu_{n-K_1-K_2',j}\lambda_{K_1-K_2,j}\,,$$

$$P_5(E_j,3)=\sum_{\substack{K_1,K_2,K_2'\\K_2=K_1-2j}}\mu_{nK_1}\mu_{K_1K_2}\lambda_{n-K_1,K_2'}\mu_{K_2j}\mu_{K_2'j}\mu_{n-K_1-K_2',j}\lambda_{K_1-K_2,j}\,,$$

$$\sum_{l=0}^{5}P_l(E_j,3)=1$$

平均 $\pi(E_j,3)$, 分散 $V_\pi(E_j,3)$ は,

$$\pi(E_j,3)=\sum_{K_1,K_2,K_2'}\mu_{nK_1}\mu_{K_1K_2}\lambda_{n-K_1,K_2}(\mu_{K_2j}+\mu_{K_2'j}+\mu_{n-K_1-K_2',j}+\lambda_{K_1-K_2,j})$$
$$+\sum_{K_1}\mu_{nK_1}\mu_{K_1,K_1-2j}\lambda_{2j,j}\,,$$

$$V_\pi(E_j,3)=\pi(E_j,3)\{1-\pi(E_j,3)\}$$

$$+2\sum_{K_1,K_2,K_2'}\mu_{nK_1}\mu_{K_1K_2}\lambda_{n-K_1,K_2'}(\mu_{K_2j}\mu_{K_2j}+\mu_{K_2j}\mu_{n-K_1-K_2',j}+\mu_{K_2'j}\mu_{n-K_1-K_2',j}\lambda_{K_1-K_2},$$
$$+\mu_{K_2'j}\lambda_{K_1-K_2,j}+\mu_{K_2'j}\lambda_{K_1-K_2,j}+\mu_{n-K_1-K_2',j}\lambda_{K_1-K_2,j})$$

$$+2\sum_{K_1,K_2'}\mu_{nK_1}\mu_{K_1,K_1-2j}\lambda_{n-K_1,K_2'}(\mu_{K_1-2j,j}+\mu_{K_2'j}+\mu_{n-K_1-K_2',j})\lambda_{2j,j}$$

$$+2\sum_{K_1}\mu_{nK_1}\mu_{K_1,K_1-2j}\lambda_{2j,j}\,.$$

同様にして, $t=4$ におけるエネルギー E_j の electron の個数の平均, 分散は,

$$\pi(E_j,4)=\sum_{\substack{K_1,K_2,K_3\\K_2,K_3',K_3'',K_3'''}}\mu_{nK_1}\mu_{K_1K_2}\mu_{K_2K_3}\lambda_{n-K_1,K_2'}\mu_{K_2'K_3'}\mu_{n-K_1-K_2',K_3''}\lambda_{K_1-K_2,K_3'''}$$
$$\times(\mu_{K_3j}+\mu_{K_3'j}+\mu_{K_3''j}+\mu_{K_3'''j}+\mu_{K_1-K_2-K_3''',j}+\lambda_{K_2-K_3,j}$$
$$+\lambda_{K_2'-K_3',j}+\lambda_{n-K_1-K_2'-K_3'',j})$$

$$+\sum_{K_1,K_2}\mu_{nK_1}\mu_{K_1K_2}\mu_{K_2,K_2-2j}\lambda_{2j,j}+\sum_{K_1,K_2}\mu_{nK_1}\lambda_{n-K_1,K_2'}\mu_{K_2',K_2'-2j}\lambda_{2j}$$

$$+\sum_{K_1,K_2'}\mu_{nK_1}\lambda_{n-K_1,K_2'}\mu_{n-K_1-K_2'-2j}\lambda_{2j,j}$$

$$V_\pi(E_j,4)=\pi(E_j,4)\{1-\pi(E_j,4)\}$$

$$
\begin{aligned}
&+2\sum_{\substack{K_1,K_2,K_3\\K_2,K_3'K_3'',K_3'''}}\mu_{nK_1}\mu_{K_1K_2}\mu_{K_2K_3}\lambda_{n-K_1,\,K_2'}\mu_{K_2'K_3'}\mu_{n-K_1-K_2',\,K_3''}\lambda_{K_1-K_2,\,K_3'''}\\
&\qquad\times\{\mu_{K_3j}\mu_{K_3'j}+\mu_{K_3j}\mu_{K_3''j}+\mu_{K_3j}\mu_{K_3'''j}+\mu_{K_3j}\mu_{K_1-K_2-K_3''',\,j}+\mu_{K_3'j}\mu_{K_3''j}\\
&\qquad\quad+\mu_{K_3'j}\mu_{K_3'''j}+\mu_{K_3'j}\mu_{K_1-K_2-K_3''',\,j}+\mu_{K_3''j}\mu_{K_3'''j}+\mu_{K_3''j}\mu_{K_1-K_2-K_3''',\,j}\\
&\qquad\quad+\mu_{K_3'''j}\mu_{K_1-K_2-K_3''',\,j}+(\mu_{K_3j}+\mu_{K_3'j}+\mu_{K_3''j}+\mu_{K_3'''j}+\mu_{K_1-K_2-K_3''',\,j})\\
&\qquad\quad\times(\lambda_{K_2-K_3,\,j}+\lambda_{K_2'-K_3',\,j}+\lambda_{n-K_1-K_2'-K_3'',\,j})\}\\
&+2\sum_{\substack{K_1,K_2\\K_2',K_3',K_3'',K_3'''}}\mu_{nK_1}\mu_{K_1K_2}\mu_{K_2,\,K_2-2j}\lambda_{n-K_1,\,K_2'}\mu_{K_2'K_3'}\mu_{n-K_1-K_2',\,K_3''}\lambda_{K_1-K_2,\,K_3'''}\\
&\qquad\times(\mu_{K_2-2j,\,j}+\mu_{K_3'j}+\mu_{K_3''j}+\mu_{K_3'''j}+\mu_{K_1-K_2-K_3''',\,j}+\lambda_{K_2'-K_3',\,j}\\
&\qquad\quad+\lambda_{n-K_1-K_2'-K_3'',\,j})\lambda_{2j,\,j}\\
&+2\sum_{\substack{K_1,K_2,K_3\\K_2',K_3'',K_3'''}}\mu_{nK_1}\mu_{K_1K_2}\mu_{K_2K_3}\lambda_{n-K_1,\,K_2'}\mu_{K_2',\,K_2'-2j}\mu_{n-K_1-K_2',\,K_3''}\lambda_{K_1-K_2,\,K_3'''}\\
&\qquad\times(\mu_{K_3j}+\mu_{K_2'-2j,\,j}+\mu_{K_3''j}+\mu_{K_3'''j}+\mu_{K_1-K_2-K_3''',\,j}+\lambda_{K_2-K_3,\,j}\\
&\qquad\quad+\lambda_{n-K_1-K_2'-K_3'',\,j})\lambda_{2j,\,j}\\
&+2\sum_{\substack{K_1,K_2,K_3\\K_2',K_3',K_3'''}}\mu_{nK_1}\mu_{K_1K_2}\mu_{K_2K_3}\lambda_{n-K_1,\,K_2'}\mu_{K_2'K_3'}\mu_{n-K_1-K_2',\,n-K_1-K_2'-2j}\lambda_{K_1-K_2,\,K_3'''}\\
&\qquad\times(\mu_{K_3j}+\mu_{K_3'j}+\mu_{n-K_1-K_2-2j,\,j}+\mu_{K_3'''j}+\mu_{K_1-K_2-K_3''',\,j}+\lambda_{K_2-K_3,\,j}\\
&\qquad\quad+\lambda_{K_2'-K_3',\,j})\lambda_{2j,\,j}\\
&+2\sum_{K_1,K_2,K_2'}\mu_{nK_1}\mu_{K_1K_2}\lambda_{n-K_2'}\mu_{K_2',\,K_2'-2j}\lambda_{2j,\,j}{}^2\\
&+2\sum_{K_1,K_2,K_2'}\mu_{nK_1}\mu_{K_1K_2}\mu_{K_2,\,K_2-2j}\lambda_{n-K_1,\,K_2'}\mu_{n-K_1-K_2,\,n-K_1-K_2'-2j}\lambda_{2j,\,j}{}^2\\
&+2\sum_{K_1,K_2'}\mu_{nK_1}\lambda_{n-K_1,\,K_2'}\mu_{K_2',\,K_2'-2j}\mu_{n-K_1-K_2',\,n-K_1-K_2'-2j}\lambda_{2j,\,j}{}^2\\
&+2\sum_{K_1,K_2}\mu_{nK_1}\mu_{K_1K_2}\mu_{K_2,\,K_2-2j}\lambda_{2j,\,j}\\
&+2\sum_{K_1,K_2'}\mu_{nK_1}\lambda_{n-K_1,\,K_2'}\mu_{K_2',\,K_2'-2j}\lambda_{2j,\,j}\\
&+2\sum_{K_1,K_2'}\mu_{nK_1}\lambda_{n-K_1,\,K_2'}\mu_{n-K_1-K_2',\,n-K_1-K_2'-2j}\lambda_{2j,\,j}\,.
\end{aligned}
$$

一般に深さ t のところでの平均 $\pi(E_j, t)$, 分散 $V_\pi(E_j, t)$ はつぎのようになる．表で説明したように，深さ t における electron 数，photon 数は

$$
\text{electron:}\qquad f(t)=\frac{2^{t+1}}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{t+1}\right\}
$$

$$
\text{photon :}\qquad f(t-1)=\frac{2^t}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{t}\right\}
$$

で与えられる．従って，

$$
\begin{aligned}
\pi(E_j, t)=\;&\mu_{nK_1}\mu_{K_1K_2}\cdots\mu_{K_{t-2}K_{t-1}}\lambda_{n-K_1,\,l_2}\mu_{l_2l_3}\cdots\mu_{l_{t-2}l_{t-1}}\mu_{n-K_1-l_1,\,l_2'}\cdots\mu_{l'_{t-2},\,l'_{t-1}}\\
&\cdots\lambda_{K_{t-3}K_{t-2},\,p_{t-1}}\cdots(\underbrace{\mu_{K_{t-1}j}+\mu_{l_{t-1}j}+\mu_{l'_{t-1}j}+\cdots+\mu_{q_{t-1}j}}_{f(t-1)\text{ 個}}\\
&+\underbrace{\lambda_{K_{t-2}-K_{t-1},\,j}+\lambda_{l_{t-2}-l_{t-1},\,j}+\cdots+\lambda_{r_{t-1},\,j})}_{f(t-2)\text{ 個}}
\end{aligned}
$$

$$\left.\begin{array}{l} +\sum\limits_{K_1,K_2,\cdots,K_{t-2}} \mu_{nK_1}\mu_{K_1K_2}\cdots\mu_{K_{t-2},K_{t-2}-2j}\lambda_{2j,j} \\ +\sum\limits_{K_1,l_2,\cdots,l_{t-2}} \mu_{nK_1}\lambda_{n-K_1,l_2}\mu_{l_2,l_3}\cdots\mu_{l_{t-2}l_{t-2}-2j}\lambda_{2j,j} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ +\sum \mu_{nK_1}\cdots\mu_{q_{t-2},q_{t-2}-2j}\lambda_{2j,j}, \end{array}\right\} f(t-2)\text{ 個}$$

且

$$V_\pi(E_j,t)=\pi(E_j,t)\{1-\pi(E_j,t)\}$$

$$+2\sum \mu_{nK_1}\mu_{K_1K_2}\cdots\mu_{K_{t-2}K_{t-1}}\lambda_{n-K_1,l_2}\mu_{l_2l_3}\cdots\mu_{l_{t-2}l_{t-1}}\mu_{n-K_1-l_2,l_3'}\cdots\mu_{l'_{t-2}l'_{t-1}}$$

$$\cdots\lambda_{K_{t-3}-K_{t-2},p_{t-1}}\cdots\{\underbrace{\mu_{K_{t-1}j}\mu_{l_{t-1}j}+\mu_{K_{t-1}j}\mu_{l'_{t-1}j}+\cdots+\mu_{l_{t-1}j}\mu_{l'_{t-1}}+\cdots}_{\binom{f(t-1)}{2}\text{ 個}}$$

$$+(\underbrace{\mu_{K_{t-1}j}+\mu_{l_{t-1}j}+\mu_{l'_{t-1}j}+\cdots+\mu_{q_{t-1}j}}_{f(t-1)\text{ 個}})(\underbrace{\lambda_{K_{t-2}-K_{t-1},j}+\lambda_{l_{t-2}-l_{t-1},j}+\cdots+\lambda_{r_{t-1},j}}_{f(t-2)\text{ 個}})\}$$

$$\left.\begin{array}{l} +2\sum \mu_{nK_1}\mu_{K_1K_2}\cdots\mu_{K_{t-2},K_{t-2}-2j}\lambda_{n-K_1,l_2}\mu_{l_2l_3}\cdots\mu_{l_{t-2}l_{t-1}}\mu_{n-K_1-l_2,l_3'} \\ \quad\cdots\mu_{l'_{t-2}l'_{t-1}}\cdots\lambda_{K_{t-3}-K_{t-2},p_{t-1}}\cdots(\underbrace{\mu_{K_{t-2}-2j,j}+\mu_{l_{t-1}j}+\mu_{l'_{t-1}j}+\cdots}_{f(t-1)\text{ 個}} \\ \quad+\underbrace{\lambda_{l_{t-2}-l_{t-1},j}+\lambda_{l_{t-2}'-l_{t-1}',j}+\cdots}_{f(t-2)-1\text{ 個}})\lambda_{2j,j} \\ +2\sum \mu_{nK_1}\mu_{K_1K_2}\cdots\mu_{K_{t-2}K_{t-1}}\lambda_{n-K_1,l_2}\mu_{l_2l_3}\cdots\mu_{l_{t-2},l_{t-2}-2j}\mu_{n-K_1-l_2,l_3'} \\ \quad\cdots\mu_{l'_{t-2}l'_{t-1}}\cdots\lambda_{K_{t-3}-K_{t-2},p_{t-1}}\cdots(\underbrace{\mu_{K_{t-1},j}+\mu_{l_{t-2}-2j,j}+\mu_{l'_{t-1},j}+\cdots}_{f(t-1)\text{ 個}} \\ \quad+\underbrace{\lambda_{K_{t-2}-K_{t-1},j}+\lambda_{l'_{t-2}-l'_{t-1},j}+\cdots}_{f(t-2)-1\text{ 個}})\lambda_{2j,j}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} f(t-2)\text{ 個}$$

$$\left.\begin{array}{l} +2\sum \mu_{nK_1}\mu_{K_1K_2}\cdots\mu_{K_{t-2},K_{t-2}-2j}\lambda_{n-K_1,l_2}\mu_{l_2l_3}\cdots\mu_{l_{t-2},l_{t-2}-2j}\lambda_{2j,j}{}^2 \\ +2\sum \mu_{nK_1}\mu_{K_1K_2}\cdots\mu_{K_{t-2},K_{t-2}-2j}\lambda_{n-K_1,l_2}\mu_{n-K_1-l_2,l_3'}\cdots \\ \quad\mu_{l_{t-2},l_{t-2}-2j}\lambda_2{}^2{}_{j,j} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ +2\sum \mu_{nK_1}\lambda_{n-K_1,l_2}\mu_{l_2l_3}\cdots\mu_{l_{t-2},l_{t-2}-2j}\mu_{n-K_1-l_2,l_3'}\cdots \\ \quad\mu_{l'_{t-2},l'_{t-2}-2j}\lambda_{2j,j}{}^2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \binom{f(t-2)}{2}\text{ 個}$$

$$\left.\begin{array}{l} +2\sum \mu_{nK_1}\mu_{K_1K_2}\cdots\mu_{K_{t-2},K_{t-2}-2j}\lambda_{2j,j} \\ +2\sum \mu_{nK_1}\lambda_{n-K_1,l_2}\mu_{l_2l_3}\cdots\mu_{l_{t-2},l_{t-2}-2j}\lambda_{2j,j} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} f(t-2)\text{ 個}$$

で与えられることがわかる．但し，上式中の（ ）は組合わせをあらわす．そして，深さの単位が無限小であれば，上に得られたエネルギー E_j の分散 $V_\pi(E_j, t)$ は

$$V_\pi(E_j, t) = \pi(E_j, t)$$

となって，Ramakrishnan の product density function によるモデルと一致することがわかる．

次に，electron ならびに photon について，単位距離（ここでは，pair creation の平均距離）進んだときの Bremstrahlung, pair creation の遷移確率を仮定して，任意の深さ t におけるエネルギー E_j をもつ electron 数の平均，分散を計算することにしよう．

さて，実際に electron スペクトル，photon スペクトルを計算するのには，Bremstrahlung ならびに pair creation の確率 μ_{ij}, λ_{ij} をどのように与えるかが問題になる．エネルギー state が連続なる場合についての遷移確率は与えられているが，これらの確率を離散型の場合に，どう翻訳するかが問題である．がしかし，私は，エネルギー state が離散型の場合について，而も Bremstrahlung ならびに pair creation の確率が，エネルギーに関して一様分布をしているとして，深さ t における平均 electron 数ならびに分散を与えるとしよう．

先づ，Bremstrahlung について，$E_i = i$ なるエネルギーをもった1個の electron が，単位距離を進んだとき，エネルギー $E_j = j\ (i \geqq j)$ なる1個の electron とエネルギー $E_{i-j} = i-j$ なる1個の photon を作る確率を，

$$\mu_{ij} = \frac{1}{i+1} \qquad j = 0, 1, 2, \cdots, i$$

とすると，

$$\sum_{j=0}^{i} \mu_{ij} = 1\,.$$

また，pair creation については，エネルギー $E_i = i$ なる1個の photon が electron, positron 2個を作り，その一方のエネルギーが $E_j = j$，他方のエネルギーが $E_{i-j} = i-j$ なる確率を，

$$\lambda_{ij} = \frac{2}{i+1} \qquad i \neq 2j$$

$$\lambda_{ij} = \frac{1}{i+1} \qquad i = 2j$$

従って，i が奇数ならば

$$\sum_{i=(i+1)/2}^{i} \lambda_{ij} = 1$$

が偶数ならば，

$$\sum_{j=[(i+1)/2]+1}^{i} \lambda_{ij} + \lambda_{i,[(i+1)/2]} = \sum_{j=[(i+1)/2]+1}^{i} \frac{2}{i+1} + \frac{1}{i+1} = 1$$

となる．ただし，[ ] はガウスの記号を示す．

そこで，$t=0$ でエネルギー E_n の1個の electron で出発したとき，上の遷移確率を用いて $t = 1, 2, 3, \cdots, t$ におけるエネルギースペクトルを計算するとしよう．

先づ，$t=1$ では，エネルギー E_j の平均個数は，

$$\pi(E_j, 1) = \frac{1}{n+1}\,,$$

分散は

$$V_\pi(E_j, 1) = \frac{1}{n+1}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \qquad j = 0, 1, 2, \cdots, n$$

で与えられる．次に，$t=2,3,\cdots$ について求めよう．

$t=2$

$$\pi(E_j,2)=\frac{1}{n+1}\sum_{K_1\geqq j}\frac{3}{K_1+1}$$

$$V_\pi(E_j,2)=\pi(E_j,2)\{1-\pi(E_j,2)\}+\frac{2}{n+1}\sum_{\substack{K_1,M_1\geqq j\\K_1+M_1=n}}\frac{2}{(K_1+1)(M_1+1)}\cdot H(n-2j)$$
$$+\frac{2}{(n+1)(2j+1)}\cdot H(n-2j)\qquad j=0,1,2,\cdots,n$$

$t=3$

$$\pi(E_j,3)=\frac{1}{n+1}\sum_{K_1\geqq K_2\geqq j}\frac{5}{(K_1+1)(K_2+1)}$$

$$V_\pi(E_j,3)=\pi(E_j,3)\{1-\pi(E_j,3)\}+\frac{2}{n+1}\sum_{\substack{K_1+M_1=n\\K_1\geqq K_2\geqq j\\M_1\geqq M_2\geqq j}}\frac{2^2+2}{(K_1+1)(K_2+1)(M_1+1)(M_2+1)}$$
$$\cdot H(n-2j)$$
$$+\frac{2}{n+1}\sum_{\substack{K_2+M_2=K_1\\K_1\geqq K_2\geqq 2j\\M_2\geqq j}}\frac{2+1}{(K_1+1)(K_2+1)(M_2+1)}\cdot H(n-3j)$$
$$+\frac{2}{(n+1)(2j+1)}\sum_{K_1\geqq 2j}\frac{1}{K_1+1}\cdot H(n-2j)\qquad j=0,1,2,\cdots,n$$

$t=4$

$$\pi(E_j,4)=\frac{1}{n+1}\sum_{K_1\geqq K_2\geqq K_3\geqq j}\frac{11}{(K_1+1)(K_2+1)(K_3+1)}\qquad j=0,1,2,\cdots,n$$

$$V_\pi(E_j,4)=\pi(E_j,4)\{1-\pi(E_j,4)\}$$
$$+\frac{2}{n+1}\sum_{\substack{K_1+M_1=n\\K_1\geqq K_2\geqq K_3\geqq j\\M_1\geqq M_2\geqq M_3\geqq j}}\frac{2^4+2^2+2}{(K_1+1)(K_2+1)(K_3+1)(M_1+1)(M_2+1)(M_3+1)}\cdot H(n-2j)$$
$$+\frac{2}{n+1}\sum_{\substack{K_2+M_2=K_1\\K_1\geqq K_2\geqq K_3\geqq j\\M_2\geqq M_3\geqq j}}\frac{2(2^2+2)-1}{(K_1+1)(K_2+1)(K_3+1)(M_2+1)(M_3+1)}\cdot H(n-2j)$$
$$+\frac{2}{n+1}\sum_{\substack{K_3+M_3=K_2\\K_1\geqq K_2\geqq K_3\\M_3\geqq j}}\frac{2(2+1)-1}{(K_1+1)(K_2+1)(K_3+1)(M_3+1)}\cdot H(n-2j)$$
$$+\frac{2}{(n+1)(2j+1)}\sum_{\substack{K_1+M_1=n\\K_1\geqq K_2\geqq 2j\\M_1\geqq M_2\geqq M_3\geqq j}}\frac{2^2\times 2}{(K_1+1)(K_2+1)(M_1+1)(M_2+1)(M_3+1)}\cdot H(n-3j)$$
$$+\frac{2}{(n+1)(2j+1)}\sum_{\substack{K_2+M_2=K_1\\K_1\geqq K_2\geqq 2j\\M_2\geqq M_3\geqq j}}\frac{2^2\times 1}{(K_1+1)(K_2+1)(M_2+1)(M_3+1)}\cdot H(n-3j)$$
$$-\frac{2}{(n+1)(2j+1)^2}\sum_{\substack{K_1+M_1=n\\K_1\geqq K_2\geqq 2j\\M_1\geqq M_2\geqq 2j}}\frac{2}{(K_1+1)(K_2+1)(M_1+1)(M_2+1)}\cdot H(n-4j)$$
$$-\frac{2}{(n+1)(2j+1)^2}\sum_{\substack{K_2+M_2=K_1\\K_2\geqq 2j\\M_2\geqq 2j}}\frac{1}{(K_1+1)(K_2+1)(M_2+1)}\cdot H(n-4j)$$

$$+\frac{2}{(n+1)(2j+1)}\sum_{K_2\geqq 2j}\frac{3}{(K_1+1)(K_2+1)}\cdot H(n-2j).$$

同じように,

$t=5$

$$\pi(E_j,5)=\frac{1}{n+1}\sum_{n\geqq K_1\geqq\cdots\geqq K_4\geqq j}\frac{21}{(K_1+1)(K_2+1)(K_3+1)(K_4+1)}\qquad j=0,1,2,\cdots,n$$

$$\begin{aligned}
V_\pi(E_j,5)&=\pi(E_j,5)\{1-\pi(E_j,5)\}\\
&+\frac{2}{n+1}\sum_{\substack{K_1+M_1=n\\K_1\geqq K_2\geqq K_3\geqq K_4\geqq j\\M_1\geqq M_2\geqq M_3\geqq M_4\geqq j}}\frac{2^6+2^4+2^2+2}{(K_1+1)(K_2+1)(K_3+1)(K_4+1)(M_1+1)(M_2+1)(M_3+1)(M_4+1)}\\
&\cdot H(n-2j)\\
&+\frac{2}{n+1}\sum_{\substack{K_1+M_2=K_1\\K_1\geqq K_2\geqq K_3\geqq K_4\geqq j\\M_2\geqq M_3\geqq M_4\geqq j}}\frac{2(2^4+2^2+2)-1}{(K_1+1)(K_2+1)(K_3+1)(K_4+1)(M_2+1)(M_3+1)(M_4+1)}\\
&\cdot H(n-2j)\\
&+\frac{2}{n+1}\sum_{\substack{K_3+M_3=K_2\\K_1\geqq\cdots\geqq K_4\geqq j\\M_3\geqq M_4\geqq j}}\frac{2\{2(2^2+2)-1\}+1}{(K_1+1)(K_2+1)(K_3+1)(K_4+1)(M_3+1)(M_4+1)}\cdot H(n-2j)\\
&+\frac{2}{n+1}\sum_{\substack{K_4+M_4=K_3\\K_1\geqq\cdots\geqq K_4\geqq j\\M_4\geqq j}}\frac{2\{2(2+1)+1\}-1}{(K_1+1)(K_2+1)(K_3+1)(M_4+1)}\cdot H(n-2j)\\
&+\frac{2}{(n+1)(2j+1)}\sum_{\substack{K_1+M_1=n\\K_1\geqq K_2\geqq K_3\geqq 2j\\M_1\geqq M_2\geqq M_3\geqq M_4\geqq j}}\frac{2(5-1)6}{(K_1+1)(K_2+1)(K_3+1)(M_1+1)(M_2+1)(M_3+1)(M_4+1)}\\
&\cdot H(n-3j)\\
&+\frac{2}{(n+1)(2j+1)}\sum_{\substack{K_2+M_2=K_1\\K_1\geqq K_2\geqq K_3\geqq 2j\\M_2\geqq M_3\geqq M_4\geqq j}}\frac{2(5-1)3}{(K_1+1)(K_2+1)(K_3+1)(M_2+1)(M_3+1)(M_4+1)}\\
&\cdot H(n-3j)\\
&+\frac{2}{(n+1)(2j+1)}\sum_{\substack{K_3+M_3=K_2\\K_1\geqq K_2\geqq K_3\geqq 2j\\M_3\geqq M_4\geqq j}}\frac{2(5-1)}{(K_1+1)(K_2+1)(K_3+1)(M_3+1)(M_4+1)}\cdot H(n-3j)\\
&-\frac{2}{(n+1)(2j+1)^2}\sum_{\substack{K_1+M_1=n\\K_1\geqq K_2\geqq K_3\geqq 2j\\M_1\geqq M_2\geqq M_3\geqq 2j}}\frac{6}{(K_1+1)(K_2+1)(K_3+1)(M_1+1)(M_2+1)(M_3+1)}\\
&-\frac{2}{(n+1)(2j+1)^2}\sum_{\substack{K_1+M_2=K_2\\K_1\geqq K_2\geqq K_3\geqq 2j\\M_2\geqq M_3\geqq 2j}}\frac{3}{(K_1+1)(K_2+1)(K_3+1)(M_2+1)(M_3+1)}\cdot H(n-4j)\\
&-\frac{2}{(n+1)(2j+1)^2}\sum_{\substack{K_3+M_3=K_2\\K_1\geqq K_2\geqq K_3\geqq 2j\\M_3\geqq 2j}}\frac{1}{(K_1+1)(K_2+1)(K_3+1)(M_3+1)}\cdot H(n-4j)\\
&+\frac{2}{(n-1)(2j+1)}\sum_{K_1\geqq K_2\geqq 2j}\frac{5}{(K_1+1)(K_2+1)(K_3+1)}\cdot H(n-2j).\qquad j=0,1,2,\cdots,n
\end{aligned}$$

ただし, $H(x)$ は

$$\begin{aligned}H(x)&=1\qquad x\geqq 0\\&=0\qquad x<0\end{aligned}$$

なる Heaviside unit function である．

従って，一般に深さ t における electron 数の平均ならびに分散は，次式で与えられることは容易に証明できる．

すなわち，electron の平均個数 $\pi(E_j, t)$ については，凡ての t について

$$\pi(E_j, t) = \frac{1}{n+1} \sum_{K_1 \geqq \cdots \geqq K_{t-1} \geqq j} \frac{(2^{t+1}/3)\{1-(-1/2)^{t+1}\}}{(K_1+1)(K_2+1)\cdots(K_{t-1}+1)} \qquad j=0,1,2,\cdots,n$$

で与えられる．分散については，$t \geqq 2$ とするとき，

$$\begin{aligned}
V_\pi(E_j, t) &= \pi(E_j, t)\{1-\pi(E_j, t)\} \\
&+ \frac{2}{n+1} \sum_{\substack{K_1+M_1=n \\ K_1 \geqq K_2 \geqq \cdots \geqq K_{t-1} \geqq j \\ M_1 \geqq M_2 \geqq \cdots \geqq M_{t-1} \geqq j}} \frac{u(1,t)}{(K_1+1)(K_2+1)\cdots(K_{t-1}+1)(M_1+1)(M_2+1)\cdots(M_{t-1}+1)} \\
&\quad \cdot H(n-2j) \\
&+ \frac{2}{n+1} \sum_{\substack{K_2+K_2=K_1 \\ K_1 \geqq K_2 \geqq \cdots \geqq K_{t-1} \geqq j \\ M_2 \geqq \cdots \geqq M_{t-1} \geqq j}} \frac{u(2,t)}{(K_1+1)(K_2+1)\cdots(K_{t-1}+1)(M_2+1)\cdots(M_{t-1}+1)} \cdot H(n-2j) \\
&+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+ \frac{2}{n+1} \sum_{\substack{K_{t-1}+M_{t-1}=K_{t-2} \\ K_1 \geqq \cdots \geqq K_1 \geqq j \\ M_{t-1} \geqq j}} \frac{u(t-1,t)}{(K_1+1)(K_2+1)\cdots(K_{t-1}+1)(M_{t-1}+1)} \cdot H(n-2j) \\
&+ \frac{2}{(n+1)(2j+1)} \sum_{\substack{K_1+M_1=n \\ K_1 \geqq K_2 \geqq \cdots \geqq K_{t-2} \geqq 2j \\ M_1 \geqq M_2 \geqq \cdots \geqq M_{t-1} \geqq j}} \frac{2\{f(t-1)-1\}v(1,t)}{(K_1+1)(K_2+1)\cdots(K_{t-1}+1)(M_1+1)(M_2+1)\cdots(M_{t-1}+1)} \\
&\quad \cdot H(n-3j) \cdot H(t-4) \\
&+ \frac{2}{(n+1)(2j+1)} \sum_{\substack{K_2+M_2=K_1 \\ K_1 \geqq \cdots \geqq K_{t-2} \geqq 2j \\ M_2 \geqq \cdots \geqq M_{t-1} \geqq j}} \frac{2\{f(t-1)-1\}v(2,t)}{(K_1+1)(K_2+1)\cdots(K_{t-2}+1)(M_2+1)(M_3+1)\cdots(M_{t-1}+1)} \\
&\quad \cdot H(n-3j) \cdot H(t-4) \\
&+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+ \frac{2}{(n+1)(2j+1)} \sum_{\substack{K_{t-1}+M_{t-2}=K_{t-3} \\ K_1 \geqq \cdots \geqq K_{t-1} \geqq 2j \\ M_{t-2} \geqq M_{t-1} \geqq j}} \frac{2\{f(t-1)-1\}v(t-2,t)}{(K_1+1)\cdots(K_{t-2}+1)(M_{t-2}+1)(M_{t-1}+1)} \\
&\quad \cdot H(n-3j) \cdot H(t-4) \\
&- \frac{2}{(n+1)(2j+1)^2} \sum_{\substack{K_1+M_1=n \\ K_1 \geqq \cdots \geqq K_{t-2} \geqq 2j \\ M_1 \geqq \cdots \geqq M_{t-2} \geqq 2j}} \frac{v(1,t)}{(K_1+1)(K_2+1)\cdots(K_{t-2}+1)(M_1+1)(M_2+1)\cdots(M_{t-2}+1)} \\
&\quad \cdot H(n-4j) \cdot H(t-4) \\
&- \frac{2}{(n+1)(2j+1)^2} \sum_{\substack{K_2+M_2=K_1 \\ K_1 \geqq \cdots \geqq K_{t-2} \geqq 2j \\ M_2 \geqq \cdots \geqq M_{t-1} \geqq 2j}} \frac{v(2,t)}{(K_1+1)(K_2 1+)\cdots(K_{t-2}+1)(M_2+1)\cdots(M_{t-2}+1)} \\
&\quad \cdot H(n-4j) \cdot H(t-4) \\
&- \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

$$-\frac{2}{(n+1)(2j+1)^2}\sum_{\substack{K_{t-2}+M_{t-2}=K_{t-3}\\ K_1\geqq\cdots\geqq K_{t-2}\geqq 2j\\ M_{t-2}\geqq 2j}}\frac{v(t-2,t)}{(K_1+1)(K_2+1)\cdots(K_{t-2}+1)(M_{t-2}+1)}$$

$$\cdot H(n-4j)\cdot H(t-4)$$

$$+\frac{2}{(n+1)(2j+1)}\sum_{K_1\geqq\cdots\geqq K_{t-2}\geqq 2j}\frac{(2^{t-1}/3)\{1-(-1/2)^{t-1}\}}{(K_1+1)(K_2+1)\cdots(K_{t-2}+1)}\cdot H(n-2j)$$

で与えられる．

ただし，上式における $u(L,t)$, $v(L,t)$ は，次のような関係を満す．

すなわち，$u(L,t)$ については，

$$u(1,2)=2$$

$$u(1,3)=2^2+2\,,\qquad u(2,3)=3$$

$$u(1,4)=2^4+2^2+2\,,\qquad u(2,4)=11\,,\qquad u(3,4)=7$$

……………………………………………………………

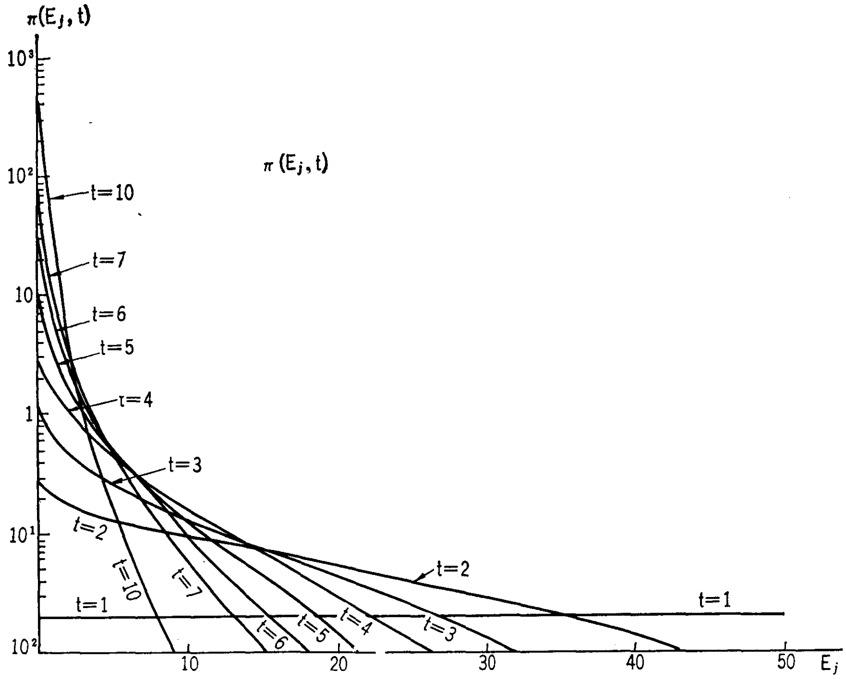
$$u(1,t)=\frac{2^{2(t-1)}}{3}(1-2^{-2(t-2)})+2\,,\qquad u(2,t)=2u(1,t-1)-1\,,\qquad \cdots\cdots\cdots,$$

$$u(t-1,t)=2u(t-2,t-1)+(-1)^{t-2}$$

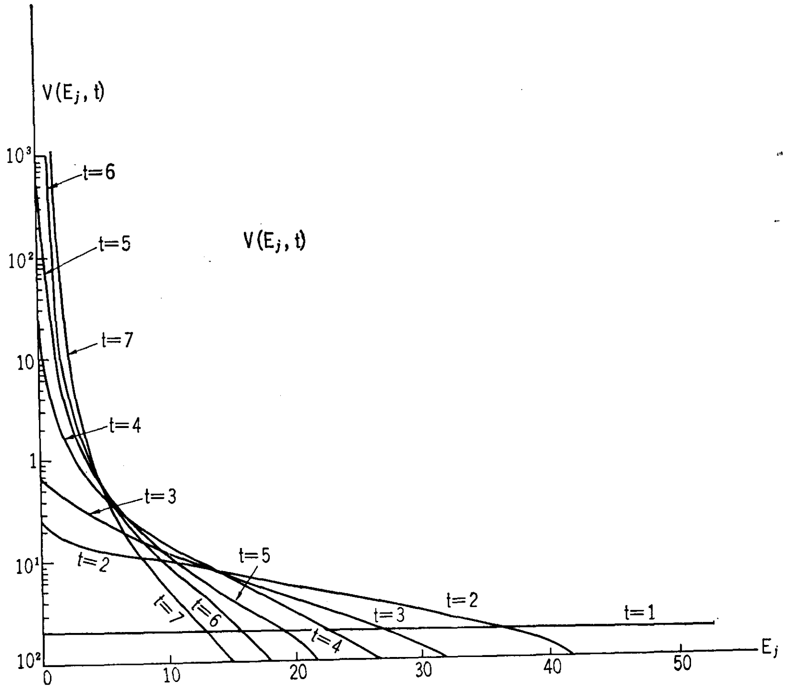
かつ $t\geqq 2$ では

$$\sum_{L=1}^{t-1}u(L,t)=2f(t-1)f(t-2)+\binom{f(t-1)}{2},\qquad f(t)=\frac{2^{t+1}}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{t+1}\right\}$$

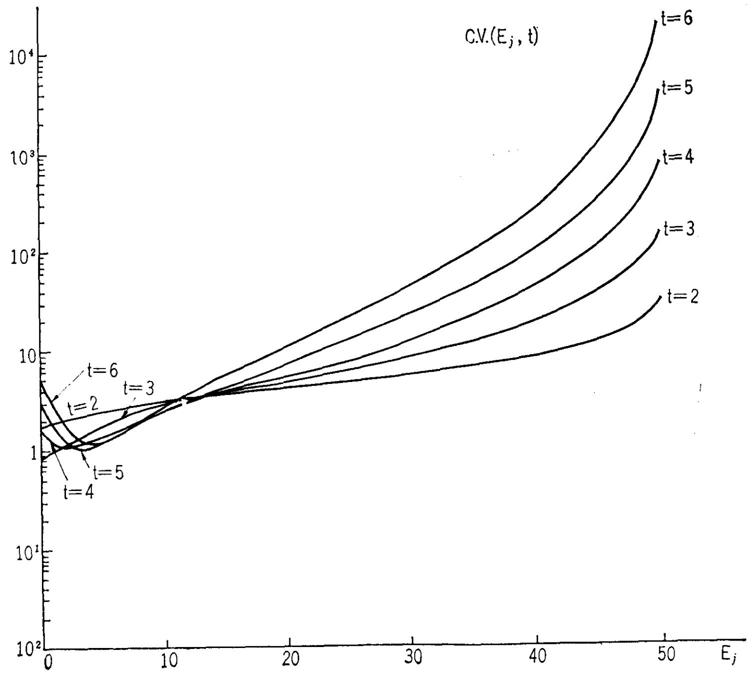
なる性質があり，また，$v(L,t)$ については，



第１図　$\pi(E_j,t)$ は深さ t に於けるエネルギー E_j のエレクトロンの平均個数をあらわす．



第2図　*V(Ej, t)* はエネルギーが *Ej* なるエレクトロン数の分散をあらわす.



第3図　*CV(Ej, t)* はエネルギー *Ej* の変異係数をあらわす.

$v(1,4)=2\,,\quad v(2,4)=1$

$v(1,5)=6\,,\quad v(2,5)=3\,,\quad v(3,5)=1$

$v(1,6)=30\,,\quad v(2,6)=15\,,\quad v(3,6)=9\,,\quad v(4,6)=1$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$v(1,t)\,,\quad v(2,t)\,,\quad \cdots\cdots\cdots,\quad 1$

ただし，$v(i,t)$ は，$t\geqq 5$ なるとき

$$v(1,t)=2f(t-3)f(t-4)$$

$$v(2,t)=v(2,t-1)+\frac{v(1,t)-v(1,t-1)}{2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$v(L,t)=v(L,t-1)+\frac{v(1,t)-v(1,t-1)}{2^{L-1}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$v(t-4,t)=v(t-4,t-1)+\frac{v(1,t)-v(1,t-1)}{2^{t-5}}$$

$$v(t-3,t)=2^{t-3}+(-1)^{t-2}$$

$$v(t-2,t)=1$$

で与えられ，かつ

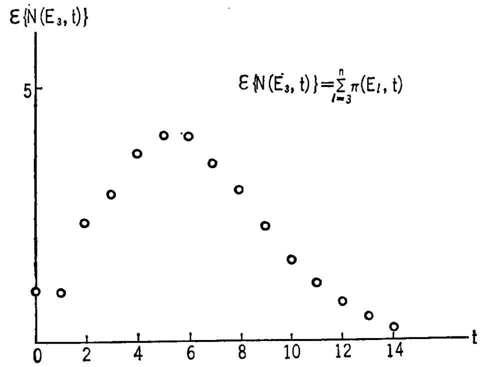
$$\sum_{L=1}^{t-1}v(L,t)=\binom{f(t-2)}{2},\qquad f(t-2)=\frac{2^{t-1}}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{t-1}\right\}$$

なる性質がある．

以上，Bremstrahlung，pair creation の確率がエネルギーに関して一様であるとして，エネルギー $E_n(=n)$ の1個の electron から出発したとき，任意の深さ t における electron 数の平均ならびに分散を与えた．そこで，試みにエネルギーが $E_{50}(=50)$ の1個の electron から出発したとき，深さ $t=1,2,\cdots$ におけるエネルギー E_j $(j=0,1,2,\cdots,50)$ の electron 数の平均 $\pi(E_j,t)$，分散 $V_\pi(E_j,t)$，変異係数 $C.V.(E_j,t)$ について，深さ t による変化を調べてみることにしよう．

先ず，エネルギー E_j の平均個数については第1図に示されたごとく，深さ t が大きくなるに従ってエネルギー E_0 の近くに多く集ってくることがわかる．

次に分散についても，平均個数の場合と，ほとんど類似した型を示し，深さ t が大きくなるに従って，エネルギーの低い方の分散が平均個数の傾斜より非常に大きくなる（第2図）．変異係数については，上の二つとは型が異なっており，エネルギーが大きくなるに従って大きくなり，深さ t が大きくなるに従



第4図　エネルギー E_3 以上の平均 electron 数と深さ t との関係

って更に傾斜が大きくなる（第3図）.

最後に，あるエネルギー E_l 以上の平均 electron 数の深さ t による変化について調べてみよう.

いま，深さ t において，エネルギーが E_l 以上の electron 数をあらわす確率変数を $N(E_l, t)$ とするとき，平均は

$$\mathcal{E}\{N(E_l, t)\}=\sum_{j=l}^{n}\pi(E_j, t) \qquad l=0, 1, 2, \cdots, n$$

で与えられる．そして，$l=3$ としたときの，各深さ t における平均個数は第4図に示されたごとくである.

3 結　　論

序文において述べたように，従来のカスケードの確率モデルは，エネルギー state を連続にして取扱われた．私は，これらのカスケード・モデルの取扱いを容易にするために，深さのパラメータ t ならびにエネルギー state を離散型にして，従来の electron-photon カスケードの確率モデルを，イオン化によるエネルギー損失を考えない単純な場合について，拡張することに努めた.

先ず，第1は，エネルギー path を考えた点である．すなわち，深さ t におけるエネルギー E_j の1個の electron は，始めのエネルギー E_n の electron から出発して，どのような経過をたどって E_j に到達したかを示した点にある.

第2は，深さ t におけるすべての particle (electron ならびに photon) は独立に，しかも多項分布に従って，深さ $t+1$ ではそれ自身，あるいは他のエネルギー state に移るとして確率モデルを構成した点にある.

そして，将来は，イオン化によるエネルギー損失を考えた場合について拡張を試みたい．さらに前節に述たあるエネルギー以上の electron 数についての分散

$$\begin{aligned} V\{N(E_l, t)\}\mathcal{E} &=\{N(E_l, t)-\sum_{j=l}^{n}\pi(E_j, t)\}^2 \\ &=\sum_{j=l}^{n}V_\pi(E_j, t)+2\sum_{i>j}^{n}\rho_{ij}\sqrt{V_\pi(E_i, t)\cdot V_\pi(E_j, t)} \end{aligned}$$

（ρ_{ij} は E_i と E_j の相関を示す）

は未だ計算されていない．これは，エネルギー E_i と E_j の同時分布を，上の二つの考えに従って求めねばならない．この問題もまもなく解決する心算である.

終始御世話になった林知己夫部長に心から謝意を表したい．また，数値計算に労を煩わした高橋耕貴君に謝意を表する.

この研究は総合科学研究費によるものである.

統計数理研究所

引用文献

[1] Bhabha, H. J. and W. Heitler: The Passage of Fast Electrons and the Theory of Cosmic-ray Showers, Proc. Roy. Soc. (London), ser. A, Vol. 159, p. 432, 1937.

[2] Furry, W. H.: On Fluctuation Phenomena in the Passage of High Energy Electrons through Lead, Phys. Rev., Vol. 52, p. 569, 1937.

[3] Arley, N.: On the Theory of Stochastic Processes and their Applications to the Theory of Cosmic Radiation, John Wiley & Sons New York, 1949.

[4] Scott, W. T. and G. E. Uhlenbeck: On the Theory of Cosmic-ray Sowers; II, Phys. Rev.,

Vol. 62, p. 497, 1942.

[5] Jánossy, L.: On the Absorption of a Nucleon Cascade, Proc. Roy. Irish. Acad., ser. A, Vol. 53, p. 181, 1950.

[6] Harris, T. E.: The Random Fluctuations of Cosmic-Ray Cascades, Proc. Natl. Acad. Sci. Vol. 43, p. 509, 1957.

[7] 〃 : Branching Processes, Springer-Verlag, Berlin in press, 1963.

[8] Lopuzanski, J.: Some Remarks on the Theory of the Electron-Photon Cascade, Acta Phys. Polon., Vol. 15, p. 177, 1956.

[9] Messel, H.: On the Solutions of the Fluctuation in Cascade Showers, Nuovo Cimento, ser. 10, Vol. 4, p. 1339, 1956.

[10] Bahbah, H. J. and Chakrabarty, S. K.: The Cascade Theory with Collision Loss, Proc. Roy. Soc. (London), ser. A, Vol. 181, p. 267, 1943.

[11] Ramakrishnan, A.: Stochastic Processes Relating to Particles Distributed in a Continuous Infinity of States, Proc. Cambridge Phil. Soc., Vo. 46, p. 596, 1950.

[12] 〃 : Elementary Particles and Cosmic Rays, Oxford in Pergamon press, 1962.

[13] 〃 : A Note on Jánossy's Mathematical Model of a Nucleon Cascade, Proc. Camb. Phil. Soc. Vol. 48, p. 451, 1952.