一 様 確 率 収 束 に つ い て

鈴　木　雪　夫

(1964年12月受付)

On Uniform Convergence in Probability

Yukio Suzuki

Wilks [1] defined the uniform convergence in probability and gave a theorem in his celebrated book. However, in this paper we will give a counterexample in section 2 and two revised theorems in section 3. A proof is given to Theorem 1, but the proof of Theorem 2 is omitted. The results are as follows.

Theorem 1. Let $(x_1(\theta), x_2(\theta), \cdots, x_n(\theta), \cdots)$ be a stochastic process depending on a parameter θ such that the following assumptions are satisfied:

(i) For some θ_0 and any θ in a parameter space Θ (for simplicity we assume that Θ is an open interval in the real line), $(f_1(x_1(\theta_0), \theta), f_2(x_1(\theta_0), x_2(\theta_0), \theta), \cdots, f_n(x_1(\theta_0), \cdots, x_n(\theta_0), \theta), \cdots)$ is a stochastic process and for any positive number ε there exist $n_\varepsilon > 0$ and $\delta(\varepsilon) > 0$ such that for any $n \geqq n_\varepsilon$ there holds

$$P\{|f_n(x_1(\theta_0), \cdots, x_n(\theta_0), \theta) - f_n(x_1(\theta_0), \cdots, x_n(\theta_0), \theta_0)| > \varepsilon\ , \quad \text{for all} \quad \theta \in (\theta_0 - \delta(\varepsilon), \theta_0 + \delta(\varepsilon))\} < \varepsilon\ .$$

(ii) $f_n(x_1(\theta_0), \cdots, x_n(\theta_0), \theta_0)$ converges to $g(\theta_0)$ in probability as $n \to \infty$.

(iii) $\theta_n^*(x_1(\theta_0), \cdots, x_n(\theta_0))$ converges to θ_0 in probability as $n \to \infty$.

Then, $f_n[x_1(\theta_0), \cdots, x_n(\theta_0), \theta_n^*(x_1(\theta_0), \cdots, x_n(\theta_0))]$ converges to $g(\theta_0)$ in probability when $n \to \infty$.

Theorem 2. Let $(x_1(\theta), x_2(\theta), \cdots, x_n(\theta), \cdots)$ be a stochastic process depending on a parameter θ $(\in \Theta)$ such that the following assumptions are satisfied:

(i) For any θ and θ' in Θ, $(f_1(x_1(\theta), \theta'), f_2(x_1(\theta), x_2(\theta), \theta'), \cdots, f_n(x_1(\theta), \cdots, x_n(\theta), \theta'), \cdots)$ is a stochastic process which satisfies the following condition: For any $\varepsilon > 0$, there exist n_ε and $\delta(\varepsilon) > 0$ such that for any $n \geqq n_\varepsilon$ and any $\theta \in \Theta$ there holds

$$P\{|f_n(x_1(\theta), \cdots, x_n(\theta), \theta') - f_n(x_1(\theta), \cdots, x_n(\theta), \theta)| > \varepsilon \quad \text{for all} \quad \theta' \in (\theta - \delta(\varepsilon), \theta + \delta(\varepsilon))\} < \varepsilon\ .$$

(ii) $f_n(x_1(\theta), \cdots, x_n(\theta), \theta)$ converges in probability to a function $g(\theta)$ defined on Θ uniformly with respect to θ in Θ.

(iii) $\theta_n^*(x_1(\theta), x_2(\theta), \cdots, x_n(\theta))$ converges in probability to θ uniformly with respect to θ in Θ.

Then, as $n \to \infty$, $f_n[x_1(\theta), x_2(\theta), \cdots, x_n(\theta), \theta_n^*(x_1(\theta), \cdots, x_n(\theta))]$ converges in probability to $g(\theta)$ uniformly with respect to θ in Θ.

The Institute of Statistical Mathematics

§1. 序

Samuel S. Wilks の著書 Mathematical Statistics (1963) の 104 頁と 105 頁において，一様確率収束が定義され，一つの定理 (4. 3. 8) が証明されている．本論文では，その定理の反例をあげ，次に，それを修正した定理に証明を与える．

まず，順序として，一様確率収束の定義をしておく．Wilks の本の記号に沿って記述する．確率変数は x とか x_i で表わされる．基礎になる確率空間の元 ω をつけて，$x(\omega)$ とか $x_i(\omega)$ と書くこともできるが，ω は省略しておく．パラメータを θ で表わし，パラメータの空間を Θ とする．しかし，話を簡単にするために，Θ としては実数空間の開区間 (θ_1,θ_2) を考える．確率変数は実数値をとるものとする．

$(x, x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$ を確率過程とする．

$g(z, \theta)$ は $R\times\Theta$ の上で定義された実数値をとる関数とする．ここに，R は一次元の Euclid 空間である．

〔定義〕 $(g(x, \theta), g(x_1, \theta), g(x_2, \theta), \cdots)$ が Θ の任意の元 θ に対して確率過程であるとする．このとき，もし，任意の $\varepsilon>0$ に対して n_ε を定めて，$n\geqq n_\varepsilon$ ならば，Θ の任意の θ に対して，

$$P(|g(x_n, \theta)-g(x, \theta)|>\varepsilon)<\varepsilon$$

が成立つようにできるとき，$g(x_n, \theta)$ は Θ で一様に $g(x, \theta)$ に確率収束するという．

確率過程を支配する確率法則が θ をパラメータとしてもつとき，この確率過程を $(x_1(\theta), x_2(\theta), x_3(\theta), \cdots)$ と表わすことができる．θ は確率空間の元ではないことに注意．

Wilks の本にある定理 (4. 3. 8) は次の通り．

〔定理〕 $(x, x_1, x_2, \cdots)$ をパラメータ θ に依存する確率過程とし，次の仮定が満足されるものとする：

(i) 確率過程 $\{f_n(x_1, \cdots, x_n, \theta)\ n=1, 2, \cdots\}$ は Θ で定義された連続関数 $g(\theta)$ に Θ の θ に関して一様に確率収束する．

(ii) 確率過程 $\{\theta_n^*(x_1, \cdots, x_n)\ n=1, 2, \cdots\}$ は θ に Θ に属する θ に関して一様に確率収束する．

このとき，$\{f_n(x_1, \cdots, x_n, \theta_n^*(x_1, \cdots, x_n))\ n=1, 2, \cdots\}$ は $g(\theta)$ に確率収束する．

§2. 反　例

本節では，前節で述べた定理の反例をあげる．

$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ を独立で同一の分布 $N(0, 1)$ に従がう確率変数例（確率過程）とする．

$h(\theta)$ を Θ 上の関数とし，パラメータ θ に依存する確率変数 $x_i(\theta)$ を

$$x_i(\theta)=x_i-h(\theta) \qquad i=1, 2, \cdots \tag{2·1}$$

で定義する．明らかに $x_i(\theta)$ の分布は $N(-h(\theta), 1)$ である．$\{x_i(\theta), i=1, 2, \cdots\}$ を定理における θ に依存する確率過程と考える．

関数 $f_n(z_1, \cdots, z_n, \theta)\ n=1, 2, \cdots$ を次のように定義する：

$$f_n(z_1, \cdots, z_n, \theta)\equiv\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}z_i+h(\theta)\ . \tag{2·2}$$

(2·1) によると，

$$f_n(x_1(\theta), \cdots, x_n(\theta), \theta)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\ . \tag{2·3}$$

従って，前節の定理の $g(\theta)$ を $\equiv0$ とすると，(2·3) の右辺が 0 に確率収束することから，(i) の仮定が満足されていることが分る．(ii) の仮定については，$\theta_n^*(x_1(\theta), x_2(\theta), \cdots, x_n(\theta))$

が θ に一様に確率収束するものとする．以上で，仮定はすべて満足されていることになる．さて，$h(\theta)$ を Θ の一点 θ_0 で第一種の不連続とし，Θの他の点では連続とする．すなわち，

$$\lim_{\theta\to\theta_0-0} h(\theta)<h(\theta_0)=\lim_{\theta\to\theta_0+0} h(\theta) \tag{2·4}$$

とする．

$\theta=\theta_0$ においては，(2·2) により，

$$\begin{aligned} &f_n[x_1(\theta_0), \cdots, x_n(\theta_0), \theta_n^*(x_1(\theta_0), \cdots, x_n(\theta_0))] \\ &=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i-h(\theta_0)+h[\theta_n^*(x_1(\theta_0), \cdots, x_n(\theta_0))] \end{aligned} \tag{2·5}$$

右辺の第一項は 0 に確率収束する．しかし，

$$h[\theta_n^*(x_1(\theta_0), \cdots, x_n(\theta_0))]-h(\theta_0) \tag{2·6}$$

は，$h(\theta)$ の θ_0 における不連続性のために必らずしも 0 に確率収束しないのである．(2·4) のごとく，$h(\theta)$ が右連続のときには，

$$\lim_{n\to\infty} P\{\theta_n^*(x_1(\theta_0), \cdots, x_n(\theta_0))\geqq\theta_0\}=1 \tag{2·7}$$

でない限り，(2·6) は 0 に確率収束しないのである．

以上で反例を終る．

§3. 定　　理

前節の反例から想像される如く，定理の証明には関数 $f_n(z_1, \cdots, z_n, \theta)$ に条件をおくことが必要である．次の定理はこの考えにもとずいている．

〔定理 1〕 $(x_1(\theta), x_2(\theta), \cdots, x_n(\theta), \cdots)$ をパラメータ θ に依存する確率過程とし，次の仮定が満足されているとする：

(i) $\Theta=(\theta_1, \theta_2)$ の中のある θ_0 と任意の θ に対して，$(f_1(x_1(\theta_0), \theta), f_2(x_1(\theta_0), x_2(\theta_0), \theta), \cdots, f_n(x_1(\theta_0), x_2(\theta_0), \cdots, x_n(\theta_0), \theta), \cdots)$ は確率過程となり，任意の $\varepsilon>0$ に対して $n_\varepsilon>0$ と$\delta(\varepsilon)>0$ が定まり，$n\geqq n_\varepsilon$ ならば，

$$\begin{aligned} P\{&|f_n(x_1(\theta_0), \cdots, x_n(\theta_0), \theta)-f_n(x_1(\theta_0), \cdots, x_n(\theta_0), \theta_0)|>\varepsilon \\ &\text{for all}\quad \theta\in(\theta_0-\delta(\varepsilon), \theta_0+\delta(\varepsilon)\}<\varepsilon \end{aligned} \tag{3·1}$$

を成り立たすことができる．

(ii) $f_n(x_1(\theta_0), \cdots, x_n(\theta_0), \theta_0)$ $n=1, 2, \cdots$ は $g(\theta_0)$ に確率収束する．

(iii) $\theta_n^*(x_1(\theta_0), \cdots, x_n(\theta_0))$ $n=1, 2, \cdots$ は θ_0 に確率収束する．

以上の仮定の下で，$f_n[x_1(\theta_0), \cdots, x_n(\theta_0), \theta_n^*(x_1(\theta_0), \cdots, x_n(\theta_0))]$ は $g(\theta_0)$ に確率収束する．

〔証明〕 (i) の ε の代りに ε_1 と書くと，(i) から，任意の $\varepsilon_1>0$ に対し，$n_{\varepsilon_1}>0$ と $\delta(\varepsilon_1)>0$ が定まり，$n\geqq n_{\varepsilon_1}$ ならば，

$$\underset{(E_n)}{\text{事象:}}\left\{\begin{aligned} &|f_n(x_1(\theta_0), \cdots, x_n(\theta_0), \theta)-f_n(x_1(\theta_0), \cdots, x_n(\theta_0), \theta_0)|\leqq\varepsilon_1 \\ &\qquad\text{for all}\quad \theta\in(\theta_0-\delta(\varepsilon_1), \theta_0+\delta(\varepsilon_1)) \end{aligned}\right\} \tag{3·2}$$

の確率が $1-\varepsilon_1$ 以上であるようにすることができる．

次に，(iii) により，任意の $\varepsilon_3>0$ に対して，n_{ε_3} が定まり，任意の $n\geqq n_{\varepsilon_3}$ に対して

$$\underset{(F_n)}{\text{事象:}}\quad \{\theta_n^*(x_1(\theta_0), \cdots, x_n(\theta_0))-\theta_0|\leqq\varepsilon_3\} \tag{3·3}$$

の確率を $1-\varepsilon_3$ 以上とすることができる．

いま，特に，$\delta(\varepsilon_1)>\varepsilon_3$ となる ε_3 をとると，$n\geqq\max(n_{\varepsilon_1}, n_{\varepsilon_3})$ なる任意の n に対して，

$$P(E_n\frown F_n)\geqq 1-\varepsilon_1-\varepsilon_3 \tag{3·4}$$

が成立つことが容易にわかる．

更に，(ii) から，$\varepsilon_2>0$ に対して，n_{ε_2} が存在し，$n\geqq n_{\varepsilon_2}$ ならば

(3・5)　　事象: $\{|f_n(x_1(\theta_0),\cdots,x_n(\theta_0),\theta_0)-g(\theta_0)|\leqq\varepsilon_2\}$
(G_n)

の確率が $1-\varepsilon_2$ 以上とすることができる．

従って，$n\geqq\max(n_{\varepsilon_1},n_{\varepsilon_2},n_{\varepsilon_3})$ ならば，

$$P(E_n\wedge F_n\wedge G_n)\geqq 1-\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3 \tag{3·6}$$

となることが容易にわかる．また，次のことが得られる．すなわち，事象 $E_n\wedge F_n$ は事象

$$\{|f_n[x_1(\theta_0),\cdots,x_n(\theta_0),\theta^*(x_1(\theta_0),\cdots,x_n(\theta_0)]-f_n(x_1(\theta_0),\cdots,x_n(\theta_0),\theta_0|<\varepsilon_1\} \tag{3·7}$$

に含まれ，また，事象 $E_n\wedge F_n\wedge G_n$ は事象（H_n とかく）

$$\{|f_n[x_1(\theta_0),\cdots,x_n(\theta_0),\theta_n^*(x_1(\theta_0),\cdots,x_n(\theta_0)]-g(\theta_0)|\leqq\varepsilon_1+\varepsilon_2\} \tag{3·8}$$

に含まれる．よって，

$$P(H_n)\geqq 1-\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3 \tag{3·9}$$

ここで，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ はいかほど小でもよいのであるから，定理が証明されたことになる．

定理は特定の θ_0 について述べられているが，(i), (ii), (iii) の仮定が，θ_0 だけでなく，任意の $\theta\in\Theta$ について成立つならば，

$$f_n[x_1(\theta),\cdots,x_n(\theta),\theta_n^*(x_1(\theta),\cdots,x_n(\theta))]$$

は，$n\to\infty$ のとき，任意の θ について，$g(\theta)$ に確率収束する．

次の定理は前述の定理と同様のやり方で証明されるので，定理だけを述べ，証明を省く．

〔定理 2〕 $(x_1(\theta),x_2(\theta),\cdots)$ を θ に依存する確率過程とし，次の仮定が満されているとする：

(i) $\Theta=(\theta_1,\theta_2)$ に属する任意の θ, θ' に対し，確率過程 $f_1(x_1(\theta),\theta')$, $f_2(x_1(\theta),x_2(\theta),\theta')$, $\cdots$ が次の条件を満すとする，すなわち，任意の $\varepsilon>0$ に対し，$n_\varepsilon>0$, $\delta(\varepsilon)>0$ を定めて，$n\geqq n_\varepsilon$ ならば，任意の θ に対して

$$P\left\{\begin{array}{c}|f_n(x_1(\theta),\cdots,x_n(\theta),\theta')-f_n(x_1(\theta),\cdots,x_n(\theta),\theta)|>\varepsilon\}\\ \text{for all}\quad \theta'\in(\theta-\delta(\varepsilon),\theta+\delta(\varepsilon))\end{array}\right\}<\varepsilon$$

とならしめうる．

(ii) $f_n(x_1(\theta),\cdots,x_n(\theta),\theta)$ $n=1,2,\cdots$ は Θ の中の θ に関して一様にある $g(\theta)$ (Θ 上で定義された) に確率収束する．

(iii) $\theta_n^*(x_1(\theta),x_2(\theta),\cdots,x_n(\theta))$ は Θ の θ に関して一様に θ に確率収束する．

このとき，$f_n^*[x_1(\theta),x_2(\theta),\cdots,x_n(\theta),\theta_n^*(x_1(\theta),\cdots,x_n(\theta))]$ は，$n\to\infty$ のとき，$g(\theta)$ に一様確率収束する．

統計数理研究所

参 考 文 献

[1] Wilks, S. S.: *Mathematical Statistics*, John Wiley and Sons, New York, 1963 (Second Printing with Corrections) pp. 104–105.