

パレート分布とパレート曲線の分析

田 口 時 夫

(1964 年 12 月受付)

On Pareto's Distribution and Curve

Tokio TAGUTI

- | | |
|----------------|----------------|
| はしがき | § 4. パレート曲線の分析 |
| § 1. 既存モデルの再検討 | § 5. 実際のデータの検討 |
| § 2. 各種の形式的理解 | むすび |
| § 3. パレート分布の分類 | |

While Pareto's distribution is a standard form of the economic statistics in the historical point of view, Pareto's curve gives a principal method of quality control. In spite of the simplest feature of distribution, its substance is fairly complicated.

In this paper we tried not only to give some mathematical proof of the importance of Pareto's distribution and curve, especially in economic section, but to finding some remarkable facts.

Thus, for example, the value of saturation of Lorenz' curve which is defined by curvature-maximum, is often more useful than the Gini's coefficient.

Finally, we applied these results to some practical economic data.

Institute of Statistical Mathematics

は し が き

国民所得統計に代表されるごとく、経済統計における数量階級間の関係は、その人員構成やウェイトの面から、しばしば分布函数、あるいはローレンツ・カーブの形態で表現されている。ここではこれらの形式についての確率論的或は現象論的理解から一步構造分析に入るために既存のモデルデータの特性把握を主に数量的側面について試みた。すなわち、当面は従来 Yule 分布、Gini 法則等の名称の下に定式化された諸説に通有の性格を捉え、その分析から派生した事実を産業別および時系列資料に適用し、その結果を爾後の段階における基礎にすることにした。

なお、この稿に必要な集計、式の計算、資料の転写等の全面にわたって岡本紘子嬢の手を煩した。

§ 1. 既存モデルの再検討

分析の出発に当り、従来屢々用いられる諸仮設即分布およびローレンツ・カーブに対する連続性、微分可能性等の函数概念の成立を前提とする。

また、以下の論理の展開の便宜上次のごとく記号を導入する。

x : 数量標識 (一応正の実数値とする)。この拡張は拙稿 (10) で触れた。

$f(x)$: 分布函数

X : ローレンツ・カーブの横座標, グレード (M. G. Kendall (2) p. 268, (4)) を示す変数

$Y=\phi(X)$: ローレンツ・カーブの函数形式

$$y = \frac{d\phi}{dX} = \phi'(X) = \phi(X) \quad \text{グレードに対する相対的評価あるいはウェイト}$$

このとき分布函数のローレンツ・カーブへの変換は

$$\begin{aligned} X &= \int_0^x f(x) dx = F(x) \\ Y &= \frac{1}{m} \int_0^x x f(x) dx \quad m \text{ 平均値 } (\neq 0) \end{aligned} \quad (1)$$

によって、あるいは (1) にかえて、

$$\phi(X) = \frac{x}{m}, \quad \phi'(X) = \frac{1}{mf(x)} \quad (2)$$

又は直接

$$y = \frac{F^{-1}(X)}{m} \quad (3)$$

によって表わされることは周知のごとくである (拙稿 (11))。さて、相異なる一連の諸形式を類型として、その性格を統一的に把握するためには広汎に亘る分布、分配函数に適用される合理的形式、簡易化の方式が必要であるが、そのために本稿では甚だ初等的ではあるが、変換 (1), (2) あるいは (3) を通して成立する X, Y の関係から y, y', y'' 等を用いて x を消去することにする。且つこの方法が場合によって個体間のより本質的な関係を現わすと思われる。その結果は特に経済量に用いられるものについては第1表に示されるごとくである。

第1表 経済諸分布

種別 性質	Pareto	Zipf	Yule
$f(x)$	$\frac{A}{x^{1+\alpha}} \quad (x_0 \leq x < \infty)$	$\frac{A}{x^\rho}$	$\frac{K\Gamma(x)\Gamma(\rho+1)}{\Gamma(x+\rho+1)} = \frac{K\rho!}{(x+\rho)(x+\rho-1)\cdots x}$
X			
Y			
m	$\frac{Ax_0^{1-\alpha}}{1-\alpha}$		
y			
$\frac{dy}{dX} \quad (=y')$	$\frac{x^{1+\alpha}}{mA}$		$\frac{(x+\rho)\cdots x}{mK\rho!}$
$\frac{d^2y}{dX^2} \quad (=y'')$	$\frac{1+\alpha}{mA^2} x^{1+2\alpha}$		$\left(\frac{1}{x+\rho} + \frac{1}{x+\rho-1} + \cdots + \frac{1}{x}\right) \frac{(x+\rho)\cdots x}{K\rho!}$
型	$yy'' = (1+\alpha)y'^2$	$yy'' = \rho y'^2$	$yy'' = y'^2 \left[\frac{x}{x+\rho} + \cdots + 1 \right]$
備考			$y \rightarrow 0$ 又は $y \rightarrow \infty$ に於いて $yy'' = y'^2$

第1表 経済諸分布(つづき)

性質 \ 種別	Gibrat	Gini's law		
$f(x)$	$\phi'\left(\frac{\log X - \lambda}{\theta}\right)$			
X	$\phi\left(\frac{\log x - \theta}{\lambda}\right)$			
Y	$\phi\left(\frac{\log x - \theta}{\lambda} - \lambda\right)$	$1 - X = (1 - Y)^\delta$	$X^n, (n \neq 2)$	$\frac{e^{\alpha x} - 1}{e^\alpha - 1}$
m	$e^{\theta + (1/2)\lambda^2} \cdot \text{var} = m^2(e^{\lambda^2} - 1)$			
y	$e^{-\lambda\xi} e^{\lambda^2/2}, \quad \frac{\log x - \theta}{\lambda} = \xi$ $-\infty < \xi < \infty$			
$\frac{dy}{dX} (=y')$	$-\sqrt{2\pi} \lambda e^{(1/2)(\xi - \lambda)^2}$			
$\frac{d^2y}{dX^2} (=y'')$	$-2\pi\lambda(\xi - \lambda)e^{(1/2)(\xi - \lambda)^2 + (1/2)\xi^2}$			
型	$yy'' = y'^2 \left[\frac{\log y}{\lambda^2} + \frac{1}{2} \right]$	$yy'' = \frac{y'^2}{1 - \delta}$	$y'' = \frac{n-1}{n-2} y'^2$	$yy'' = y'^2$
備考	$y \rightarrow 1$ つまり $x \rightarrow m$ (平均) に於て又は λ が充分大なる時 $yy'' = \frac{1}{2} y'^2$			

第2表 経済外的諸分布

性質 \ 種別	Exponential	Gauß	Poisson
$f(x)$	$\lambda e^{-\lambda x}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right], m \neq 0$	$e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$
X			
Y			
m	$\frac{1}{\lambda}$	m	λ
y			
y'	$e^{\lambda x}$	$\frac{\sqrt{2\pi}\sigma}{m} \exp\left[\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right]$	$\frac{x!}{e^{-\lambda}\lambda^{x+1}} (x! \sim \sqrt{2\pi} x^{x+1/2} e^{-x} \text{ としたものの})$
y''	$e^{2\lambda x}$	$\frac{2\pi\sigma}{m}(x-m) \exp\left[\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right]$	$y' \left[\log x + \frac{1}{2x} - \log \lambda \right] m y'$
型	$y'' = y'^2$	$y'' = \frac{m^2}{\sigma} y'^2 (y-1)$	$yy'' = \frac{y'^2}{2} \lambda y y' \log y$
備考		$x < 0$ なる場合このローレンツカーブの拡張については拙稿 [11] [12] による	$y \rightarrow 1 (x \rightarrow \lambda)$ のとき $yy'' = \frac{y'^2}{2}$ の如くであるがこのとき $x!$ に対する上記の近似が成立するか疑問である。

従ってこれらの形式上に於いては

$$yy'' = k \cdot y'^2$$

を共通部分として一つの基本形式とすることができる。この一般化を、

$$yy'' = y'^2 \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i y^i \right\}$$

とする前に経済外の諸分野で適用例の多い分布型について同様の算定を試みたのが第2表である。

§2. 各種の形式的理解

第1表にみるごとく経済分布における際立って著しい特徴の一つは yy''/y'^2 によって与えられると考えることができる。ここにこの形式を弾力性係数になぞらえる方法で独立して分析することは後節の諸演算においても参考となるであろう。

$$(1) \quad y = \frac{x}{m} \quad y' = \frac{1}{mf(x)} \quad y'' = -\frac{f'(x)}{mf(x)^2} \cdot \frac{1}{f(x)} = -y'^2 \cdot \frac{xf'(x)}{f(x)}$$

従って、

$$\frac{yy''}{y'^2} = -\frac{d \log f(x)}{d \log x}$$

この関係はパレート分布の分析に直接有効である。

$$(2) \quad \frac{d \log y}{dX} = \frac{y'}{y} \quad \frac{d^2 \log y}{dX^2} = \frac{y'(y-y')^2}{y^2} = \left(\frac{y''y}{y'^2} - 1 \right) \left(\frac{y'}{y} \right)^2$$

従って、

$$\frac{y''y}{y'^2} = \frac{\frac{d^2 \log y}{dX^2}}{\left(\frac{d \log y}{dX} \right)^2} + 1$$

この関係はパレート外の分布・曲線分析に有効である。

$$(3) \quad \frac{d \log y}{dX} = \frac{y'}{y} \quad \frac{(d \log)^2 y}{dX^2} = \frac{1}{y'} \cdot \frac{y''y - y'^2}{y^2} = \left(\frac{y''y}{y'^2} - 1 \right) \frac{y'}{y}$$

従って、

$$\frac{y''y}{y'^2} = \frac{\frac{(d \log)^2 y}{dX^2}}{\frac{d \log y}{dX}} + 1$$

$$(4) \quad \frac{d \log y}{d \log X} = \frac{X}{y} y' \\ \frac{(d \log)^2 y}{(d \log X)^2} = \frac{y}{y'} \cdot \frac{yy'' + Xyy'' - Xy'^2}{y^2} = 1 + \frac{x(yy'' - y'^2)}{yy'} \\ = 1 + \left(\frac{y''y}{y'^2} - 1 \right) \frac{y'x}{y}$$

故に、

$$\frac{yy''}{y'^2} = \frac{\frac{(d \log)^2 y}{(d \log X)^2} - 1}{\frac{d \log y}{d \log X}}$$

(1) はパレート常数算出の形式そのものであり、(2)、(3)、(4) は限界値計算にしばしば用いら

れる形式である。これらの利用は本文の基本的立場として後に触れる予定である。

§3. パレート分布の分類

問題を再び第1表に移すとき、

$$yy'' = ky'^2$$

のとき §2 (1) により、

$$\frac{d \log f(x)}{d \log x} = -k \quad k > 0$$

となるから、容易にパレート分布^{*})

$$f(x) = \frac{A}{x^k} \quad A > 0, \quad x \geq x_0 > 0$$

を得る。

さて、パレート分布は最も単純な分布形式の一つであるが、同時に最も重要な分布に属するといえる。それは単に歴史的に価値あるのみでなく Juran (10) や Kendall (3) の指摘にもあるごとく、いまなお実用的近似を与えるとともに見通しの上で一つの根拠を与えることは、実はこれからの論題ともなる。

実際上記の k は >1 として充分とされているのであるが、理論的追求の上で一応 $-\infty < k < \infty$, $x > 0$, $A > 0$ としてつまり巾函数形式の分布として各型に分類する。

つまりパレート分布は一見 §1 (1), (2) の変換を通して容易に単一のパレート・カーブを得るごとくであるが、 k に対する変換の制約から、以下にみるごとく §2 のオペレーターによる表象を経て多様な形態をとることになるのである。

(I) 第一類型

$k < 0$, $x_0 < \varepsilon$ とする。

$$\begin{aligned} X &= \int_0^x \frac{A}{t^k} dt = A \frac{x^{1-k}}{1-k} \\ Y &= \frac{1}{m} \int_0^x A t^{-k+1} dt = \frac{A}{m(2-k)} x^{2-k} \\ \therefore \left\{ \frac{m(2-k)}{A} \right\}^{1/(2-k)} Y^{1/(2-k)} \\ &= \left(\frac{1-k}{A} \right)^{1/(1-k)} X^{1/(1-k)} \end{aligned}$$

この場合、(1, 1) を通る連続なローレンツ・カーブとして、

$$Y = X^{(2-k)/(1-k)}$$

をうることができる。(Fig. 1. 参照)

(II) 第二類型 $k=0$

従って、

$$f(x) = A, \quad A \leq 1$$

(i) $A < 1$ 連続分布ならば、 $x_0 \leq x \leq x_0 + \frac{1}{A}$

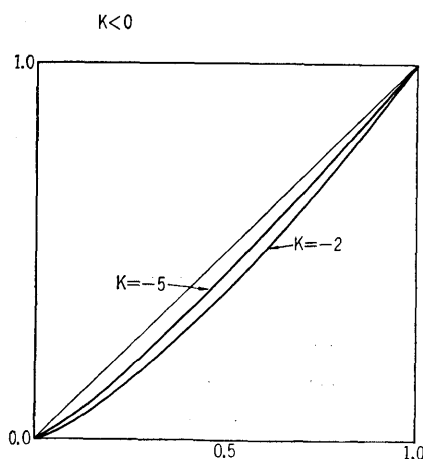


Fig. 1.

^{*}) 上掲表の区分に従うとき、寧ろチフ分布というべきであり、 k はチフ常数と称すべきであろうが、慣用上以下パレート分布、パレート常数の名称の下で取扱うことにする。

$$X = \int_0^x A dx = Ax$$

$$Y = \frac{1}{m} \int_0^x A x dx = \frac{A}{m} \frac{x^2}{2}$$

$$\frac{2m}{A} Y = \left(\frac{X}{A} \right)^2$$

(1, 1) を通る条件により,

$$Y = X^2$$

(ii) $A=1$ $x=x_0 \neq 0$

一点分布, 従って $Y=X$ 即均等線を与える

(III) 第三類型 $0 < k < 1$

(I) と同様に,

$$Y = X^{(2-k)/(1-k)}$$

をこの場合に対応する曲線形とすることができる. (Fig. 2. 参照)

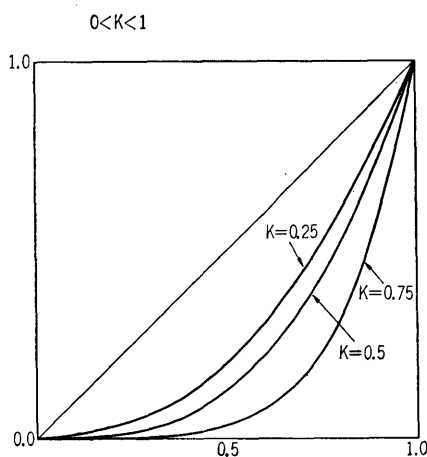


Fig. 2.

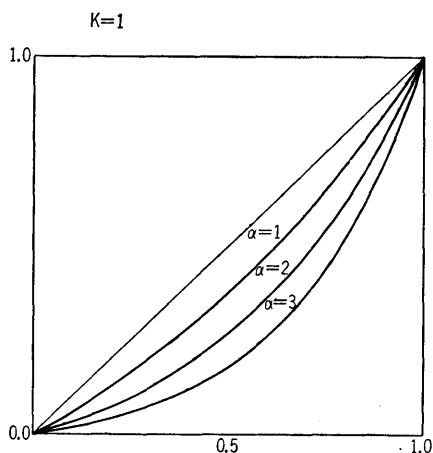


Fig. 3.

(IV) 第四類型 $k=1$

この場合, §1 (1), (2) の変換の適用は x の領域についての制約を伴うから一般的な関係 $yy'' = y'^2$ を用いる.

$$\frac{y''}{y'} = \frac{y'}{y} \quad \text{故に} \quad \log y' = \log y + C_1, \quad \text{すなわち, } y' = \alpha y; \alpha > 0$$

$$\frac{y'}{y} = \alpha, \quad \log y = \alpha X + C_2, \quad y = \beta e^{\alpha X}; \beta > 0$$

故に,

$$Y = \beta \int_0^X e^{\alpha X} dX = \frac{\beta}{\alpha} (e^{\alpha X} - 1)$$

(0, 0) (1, 1) を通る条件は,

$$\alpha = \beta(e^{\alpha} - 1)$$

故に,

$$Y = \frac{e^{\alpha X} - 1}{e^{\alpha} - 1}, \quad \alpha > 0$$

(V) 第五類型 $1 < k < 2$

前記 (IV) および次記 (VI) とともに変換 (1) を適用することは複雑であるから

$yy'' = ky'^2$ を基礎とする

$$\frac{y''}{y'} = k \cdot \frac{y'}{y} \quad \log y' = k \log y + C_1, \quad y' = \alpha y^k, \quad \alpha > 0$$

$$\frac{y'}{y^k} = \alpha \quad \frac{1}{1-k} y^{1-k} = \alpha X + C_2, \quad y = (\alpha' X + \beta)^{1/(1-k)}$$

$$\alpha' < 0 \quad y \geq 0 \quad \text{故に,} \quad \beta > 0 \quad \beta + \alpha > 0$$

これから,

$$\begin{aligned} Y &= \int_0^X (\beta + \alpha' X)^{1/(1-k)} dX \\ &= \frac{1-k}{2-k} \cdot \frac{1}{\alpha'} \{ (\beta + \alpha' X)^{(2-k)/(1-k)} - \beta^{(2-k)/(1-k)} \} \end{aligned}$$

または,

$$\begin{aligned} 1-Y &= \int_X^1 (\beta + \alpha' X)^{1/(1-k)} dX \\ &= \frac{1-k}{2-k} \cdot \frac{1}{\alpha'} \{ (\beta + \alpha')^{1/(1-k)} - (\beta + \alpha' X)^{(2-k)/(1-k)} \} \end{aligned}$$

点 (1, 1) を通る条件は,

$$\frac{\alpha' (2-k)}{-k+1} = (\beta + \alpha')^{(2-k)/(-k+1)} - \beta^{(2-k)/(-k+1)}$$

を与える。従って,

$$Y = \frac{(\beta + \alpha' X)^{(2-k)/(-k+1)} - \beta^{(2-k)/(-k+1)}}{(\beta + \alpha')^{(2-k)/(-k+1)} - \beta^{(2-k)/(-k+1)}}$$

$$-\frac{\alpha'}{\beta} = r \quad \text{とすれば,} \quad 1 > r > 0$$

$$Y = \frac{(1-rX)^{(2-k)/(-k+1)} - 1}{(1-r)^{(2-k)/(-k+1)} - 1}$$

(Fig. 4, 5 参照)

(VI) 第六類型 $k=2$

$$1 < K < 2 \quad r=0.5$$

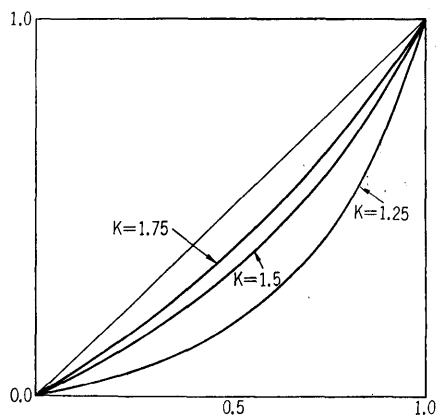


Fig. 4.

$$K=1.5$$

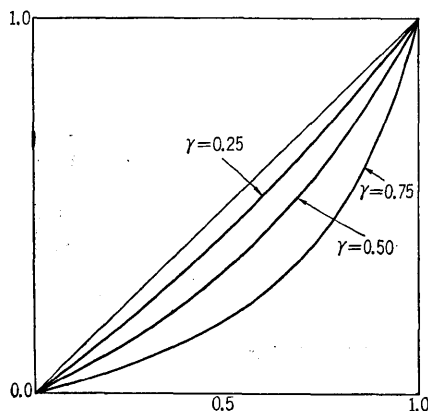


Fig. 5.

$$yy'' = 2y'^2$$

$$\frac{y''}{y'} = 2\frac{y'}{y}, \quad \log y' = 2 \log y + C_1, \quad y' = \alpha y^2; \alpha > 0$$

$$\frac{y'}{y^2} = \alpha, \quad -\frac{1}{y} = \alpha X + C_2, \quad y = \frac{1}{\beta + \alpha X}$$

$$\alpha > 0, \quad y \geq 0 \quad \text{から,} \quad \beta > 0 \quad \beta - \alpha > 0$$

$$Y = \int_0^x \frac{1}{\beta - \alpha X} dX = -\frac{\log(\beta - \alpha X)}{\alpha} + \frac{\log \beta}{\alpha}$$

(1, 1) を通る条件は,

$$1 = -\frac{\log(\beta - \alpha)}{\alpha} + \frac{\log \beta}{\alpha}$$

故に,

$$Y = \frac{\log(\beta - \alpha X) - \log \beta}{\log(\beta - \alpha) - \log \beta}$$

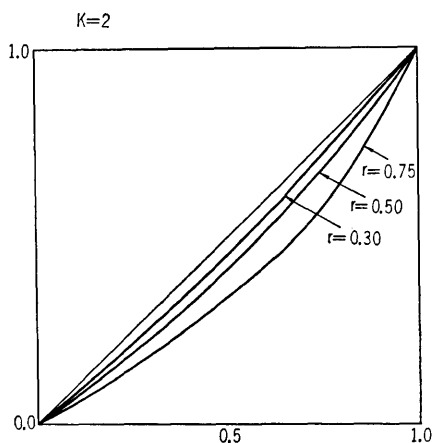


Fig. 6.

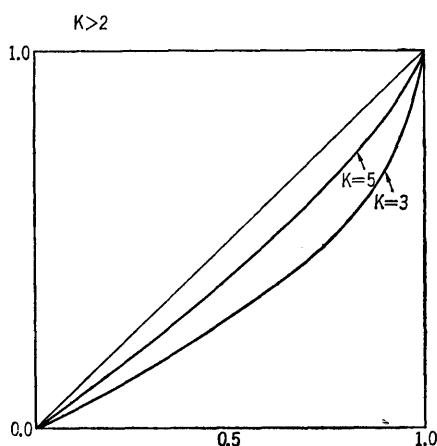


Fig. 7.

$\frac{\alpha}{\beta} = r$ とすれば,

$$0 < r < 1$$

$$Y = \frac{\log(1-rX)}{\log(1-r)}$$

(Fig. 6. 参照)

(VII) 第七類型 $k > 2$

$$1 - X = \int_x^\infty A x^{-k} dx = \frac{-A}{-k+1} x^{-k+1}$$

$$1 - Y = \frac{1}{m} \int_x^\infty A x^{-k+1} dx$$

$$\frac{m(k-2)}{A} (1-Y) = \left(\frac{k-1}{A} \right) (1-X)^{(k-2)/(k-1)}$$

点 (0, 0) を通る条件を与えると,

$$1 - Y = (1 - X)^{(k-2)/(k-1)}$$

Gini 法則といわれるこの形式はパレート分布の全体からみれば, このような特殊的位置に

留る (Fig. 6. 参照). 以上 (I) ~ (VII) の結果を纏めると, 次の第3表および Fig. 8 の変化を得る.

第3表 パレート分布の分類

	パレート常数	パレート曲線 (ローレンツ・カーブ)
(A)	$k < 0$	$Y = X^{(2-k)/(1-k)}$
(B)	$k = 0$	(i) $A < 1$ ならば $Y = X^2$ (ii) $A = 1$ ならば $Y = X$
(C)	$0 < k < 1$	$Y = X^{(2-k)/(1-k)}$
(D)	$k = 1$	$Y = \frac{e^{\alpha X} - 1}{e^{\alpha} - 1}; \quad \alpha > 0$
(E)	$1 < k < 2$	$Y = \frac{(1-\gamma X)^{(2-k)/(k+1)} - 1}{(1-\gamma)^{(2-k)/(k+1)} - 1} \quad 0 < \gamma < 1$
(F)	$k = 2$	$Y = \frac{\log(1-\gamma X)}{\log(1-\gamma)} \quad 0 < \gamma < 1$
(G)	$k > 2$	$1 - Y = (1 - X)^{(k-2)/(k-1)}$

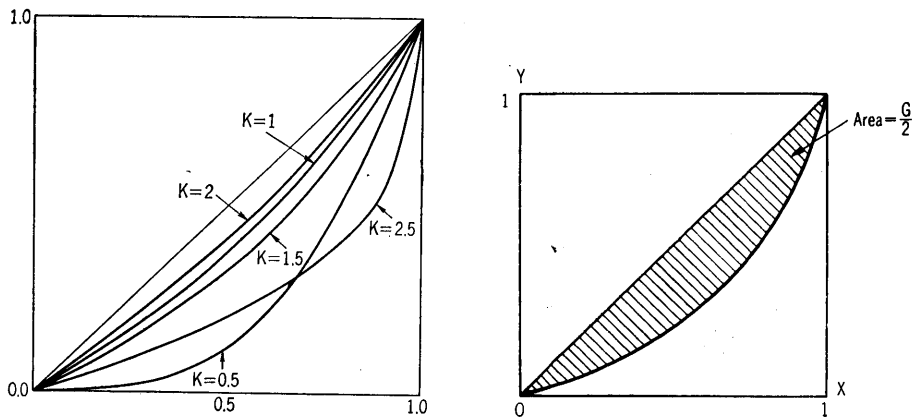


Fig. 8.

§4. パレート曲線の分析

実際のデータに当り, その時間的空間的構造変化を如実に示す有効適切な指標を得ることが必要であり, 且つこの節の目的の一つである. 形式的にはパレート常数で充分とみられるこの要求が, 各種の観点から再検討され, 具体化されうる. ただしここで採用された観点とは主に (i) ジニ係数, (ii) 平均点, (iii) 飽和値の三点に関するものである.

(I) Gini 係数 (G)

ジニ係数は総合的, あるいは平均的格差の指標ともなるものである. (拙稿 (10)) また G は平均差にも用いられるが, ここでは集中指数として $\frac{\text{平均差}}{2 \times \text{平均値}}$ の意味で用いる.

$$G = 1 - 2 \int_0^1 Y dX$$

すなわち, グラフィカルには均等線とともに囲む面積の二倍である. (M. G. Kendall (1))

(A) $k < 0 \quad Y = X^{(2-k)/(1-k)}$

$$G = 1 - 2 \int_0^1 X^{(2-k)/(1-k)} dX = 1 - 2 \left. \frac{1-k}{3-2k} X^{(3-2k)/(1-k)} \right|_0^1 = \frac{1}{3-2k}$$

$$\frac{dG}{dk} = \frac{2}{(3-2k)^2} > 0$$

(B) $k = 0$

(i) $A < 1 \quad Y = X^2$

$$G = 1 - 2 \int_0^1 X^2 dX = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

(ii) $A = 1 \quad Y = X$

$$G = 0$$

(C) $0 < k < 1 \quad Y = X^{(2-k)/(1-k)}$

$$G = \frac{1}{3-2k} \quad \frac{dG}{dk} > 0$$

(D) $k = 1, \quad Y = \frac{e^{\alpha X} - 1}{e^{\alpha} - 1}; \quad \alpha > 0$

$$G = 1 - 2 \int_0^1 \frac{e^{\alpha X} - 1}{e^{\alpha} - 1} dX = 1 - 2 \left. \frac{e^{\alpha X} - X}{e^{\alpha} - 1} \right|_0^1$$

$$= 1 - 2 \frac{(e^{\alpha}/\alpha) - 1 - (1/\alpha)}{e^{\alpha} - 1} = 1 - \frac{2}{\alpha} + \frac{2}{e^{\alpha} - 1}$$

$$\frac{dG}{d\alpha} = \frac{2}{\alpha^2} - \frac{2e^{\alpha}}{(e^{\alpha} - 1)^2}$$

(E) $1 < k < 2, \quad Y = \frac{(1-\gamma X)^{(2-k)/(-k+1)} - 1}{(1-\gamma)^{(2-k)/(-k+1)} - 1}; \quad 0 < \gamma < 1$

(i) $k \neq 1, 5$

$$G = 1 - 2 \int_0^1 \frac{(1-\gamma X)^{(2-k)/(-k+1)} - 1}{(1-\gamma)^{(2-k)/(-k+1)} - 1} dX$$

$$= 1 - 2 \left. \frac{-\frac{1}{\gamma} \frac{-k+1}{3-2k} (1-\gamma X)^{(3-2k)/(-k+1)} - X}{(1-\gamma)^{(2-k)/(-k+1)} - 1} \right|_0^1$$

$$= 1 - 2 \frac{-\frac{1}{\gamma} \frac{-k+1}{3-2k} (1-\gamma)^{(3-2k)/(-k+1)} - 1 + \frac{1}{\gamma} \frac{-k+1}{3-2k}}{(1-\gamma)^{(2-k)/(-k+1)} - 1}$$

$$= 1 - 2 \left[-\frac{1}{\gamma} \frac{-k+1}{3-2k} (1-\gamma) + \frac{-\frac{1}{\gamma} \frac{-k+1}{3-2k} \{(1-\gamma) - 1\} - 1}{(1-\gamma)^{(2-k)/(-k+1)} - 1} \right]$$

$$= 1 + \frac{2}{\gamma} \frac{-k+1}{3-2k} (1-\gamma) - 2 \frac{k-2}{3-2k} \frac{1}{(1-\gamma)^{(2-k)/(-k+1)} - 1}$$

$$= 1 + \frac{2}{\gamma} \frac{-k+1}{3-2k} - \frac{2}{3-2k} \frac{2k-3 + (-k+1)(1-\gamma)^{(2-k)/(-k+1)}}{(1-\gamma)^{(2-k)/(-k+1)} - 1}$$

$$= 1 + \frac{2}{\gamma} \frac{-k+1}{3-2k} + \frac{2}{(1-\gamma)^{(1-k)/(k+1)} - 1} - \frac{2(-k+1)}{3-2k}$$

$$- \frac{2(-k+1)}{3-2k} \frac{1}{(1-\gamma)^{(2-k)/(k+1)} - 1}$$

$$= \frac{1}{3-2k} + \frac{1}{\gamma} \left(1 - \frac{1}{3-2k} \right) + \frac{1}{(1-\gamma)^{(2-k)/(-k+1)} - 1} \left(1 + \frac{1}{3-2k} \right)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial k} &= -2 \int_0^1 \frac{\partial}{\partial k} \left\{ \frac{(1-\gamma X)^{(k-2)/(k-1)} - 1}{(1-\gamma)^{(k-2)/(k-1)} - 1} \right\} dX \\ &= -2 \int_0^1 \left[\log(1-\gamma X) (1-\gamma X)^{(k-2)/(k-1)} \cdot \frac{1}{(k-1)^2} \{ (1-\gamma)^{(k-2)/(k-1)} - 1 \} \right. \\ &\quad \left. - \log(1-\gamma) (1-\gamma)^{(k-2)/(k-1)} \cdot \frac{1}{(k-1)^2} \{ (1-\gamma X)^{(k-2)/(k-1)} - 1 \} \right] / \\ &\quad \{ (1-\gamma)^{(k-2)/(k-1)} - 1 \}^2 dX\end{aligned}$$

ところで,

$$\begin{aligned}|\log(1-\gamma X)| &< |\log(1-\gamma)|, \quad 1 < \frac{1}{(1-\gamma X)^{(k-2)/(k-1)}} < \frac{1}{(1-\gamma)^{(k-2)/(k-1)}} \\ 0 &< (1-\gamma)^{(k-2)/(k-1)} - 1 < (1-\gamma X)^{(k-2)/(k-1)} - 1\end{aligned}$$

故に,

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial k} &< 0 \\ \frac{\partial G}{\partial \gamma} &= -2 \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \gamma} \left\{ \frac{(1-\gamma X)^{(k-2)/(k-1)} - 1}{(1-\gamma)^{(k-2)/(k-1)} - 1} \right\} dX \\ &= -2 \int_0^1 \left[-X \cdot \frac{k-2}{k-2} (1-\gamma X)^{-1/(k-1)} \{ (1-\gamma)^{(k-2)/(k-1)} - 1 \} \right. \\ &\quad \left. + \frac{k-2}{k-1} (1-\gamma)^{-1/(k-1)} \{ (1-\gamma X)^{(k-2)/(k-1)} - 1 \} \right] / \{ (1-\gamma)^{(k-2)/(k-1)} - 1 \}^2 dX \\ &1 < \frac{1}{(1-\gamma X)^{1/(k-1)}} < \frac{1}{(1-\gamma)^{1/(k-1)}} \quad X < 1\end{aligned}$$

前の条件と併せて

$$\frac{\partial G}{\partial \gamma} > 0$$

(Fig. 9, Fig. 10 参照)

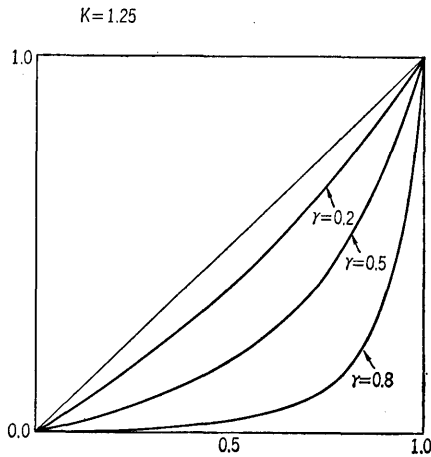


Fig. 9.

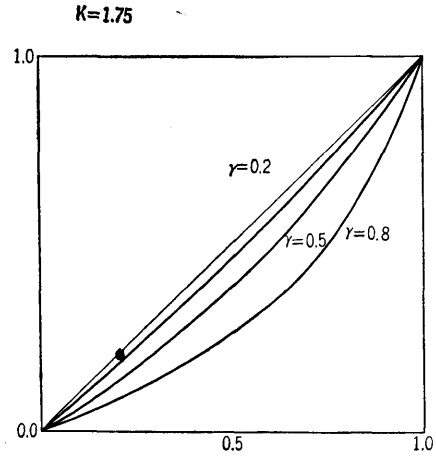


Fig. 10.

(ii) $k=1.5$

$$\begin{aligned}Y &= \frac{(1-\gamma X)^{-1} - 1}{(1-\gamma)^{-1} - 1} \\ G &= 1 - 2 \int_0^1 Y dX = 1 - \frac{2}{(1-\gamma)^{-1} - 1} \left\{ \int_0^1 \frac{dX}{1-\gamma X} - 1 \right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 + \frac{2}{(1-r)^{-1}-1} + \frac{2}{(1-r)^{-1}-1} \frac{1}{r} \log (1-rX) \Big|_0^1 \\
&= 1 + \frac{2(1-r)}{r} \left\{ 1 + \frac{\log (1-r)}{r} \right\} \\
\frac{dG}{dr} &= -\frac{2}{r^2} - \frac{2 \log (1-r)}{r^3} + \frac{-2r-2(1-r) \log (1-r)}{r^3} \\
&= \frac{-4r-4 \log (1-r)+2r \log (1-r)}{r^3} \\
&= -\frac{4}{r^2} + \frac{2 \log (1-r)}{r^2} - \frac{4 \log (1-r)}{r^3}
\end{aligned}$$

$$(F) \quad k=2 \quad Y = \frac{\log (1-rX)}{\log (1-r)}; \quad 0 < r < 1$$

$$\begin{aligned}
G &= 1 - 2 \int_0^1 \frac{\log (1-rX)}{\log (1-r)} dX \\
&= 1 - \frac{2}{\log (1-r)} \left[X \log (1-rX) + \int_0^1 \frac{rX}{1-rX} dX \right]_0^1 \\
&= 1 - \frac{2}{\log (1-r)} \left[X \log (1-rX) - X - \frac{1}{r} \log (1-rX) \right]_0^1 \\
&= 1 - \frac{2}{\log (1-r)} \left\{ \log (1-r) - 1 - \frac{1}{r} \log (1-r) \right\} \\
&= -1 + \frac{2}{r} + \frac{2}{\log (1-r)}
\end{aligned}$$

ここで, $r \rightarrow 1$ のとき $G \rightarrow 1$

$r \rightarrow 0$ のとき

$$\begin{aligned}
G &= -1 + \frac{2}{r} + \frac{2}{\log (1-r)} = -1 + \frac{2}{r} - \frac{2}{r} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{r}{2} + \frac{r^2}{3} + \frac{r^3}{4} + \dots \right)} \\
&= -1 + \frac{2}{r} \left[1 - \left\{ 1 - \left(\frac{r}{2} + \frac{r^2}{3} + \dots \right) + \left(\frac{r}{2} + \frac{r^2}{3} + \dots \right)^2 - \dots \right\} \right] \\
&= -1 + \frac{2}{r} \left[\left(\frac{r}{2} + \frac{r^2}{3} + \dots \right) - \left(\frac{r}{2} + \frac{r^2}{3} + \dots \right)^2 \right] \\
&= -1 + 1 + \frac{2}{r} \left(\frac{r^2}{3} - \frac{r^2}{4} \right) + \frac{2}{r} \left(\frac{r^3}{4} - \frac{r^3}{3} \right) + \dots \\
&= \frac{r}{6} - \frac{r^2}{6} + \dots \rightarrow 0
\end{aligned}$$

$$(G) \quad k > 2 \quad 1 - Y = (1-X)^{(k-2)/(k-1)}$$

$$\begin{aligned}
G &= 1 - 2 \int_0^1 \{ 1 - (1-X)^{(k-2)/(k-1)} \} dX \\
&= -1 + 2 \int_0^1 (1-X)^{(k-2)/(k-1)} dX \\
&= -1 - 2 \left[\frac{k-1}{2k-3} (1-X)^{(2k-3)/(k-1)} \right]_0^1 \\
&= -1 + \frac{2(k-1)}{2k-3} = \frac{1}{2k-3} \\
\frac{dG}{dk} &= -\frac{2}{(2k-1)^2} < 0
\end{aligned}$$

以上を取り纏め第4表とする。

第4表 ジニ集中指数の変化

類型	パレート 常 数	G	
(A)	$k < 0$	$\frac{1}{3-2k}$	k と共に G は増大する
(B)	$k = 0$	(i) $A < 1$ ならば $\frac{1}{3}$ (ii) $A = 1$ " 0	
(C)	$0 < k < 1$	$\frac{1}{3-2k}$	k と共に増大する
(D)	$k = 1$	$1 - \frac{2}{\alpha} + \frac{2}{e^{\alpha}-1}$	
(E)	$1 < k < 2$	(i) $k \neq 1.5$ $\frac{1}{3-2k} + \frac{1}{r} \left(1 - \frac{1}{3-2k}\right) + \frac{1}{(1-r)^{(2-k)/(-k+1)}-1} \left(1 + \frac{1}{3-2k}\right)$ (ii) $k = 1.5$ $1 + \frac{2(1-r)}{r} \left\{1 + \frac{\log(1-r)}{r}\right\}$	
(F)	$k = 2$	$-1 + \frac{2}{r} + \frac{2}{\log(1-r)}$	$\begin{cases} r \rightarrow 0 & G \rightarrow 0 \\ r \rightarrow 1 & G \rightarrow 1 \end{cases}$
(G)	$k > 2$	$\frac{1}{2k-3}$	k が増大するとき G は減少する

(II) 平均点分析

平均値をとるグレードを仮りに平均点と称し、
 X_m で表わすことにすると、

$$y_m = 1$$

この位置はローレンツ・カーブにおいては接線
が均等線に平行する。(拙稿(11)).

$$(A) \quad k < 0 \quad Y = X^{(2-k)/(1-k)}$$

$$y = Y' = \frac{2-k}{1-k} X_m^{1/(1-k)} = 1$$

$$X_m = \left(\frac{1-k}{2-k}\right)^{1-k}$$

$k \rightarrow -\infty$ のとき、

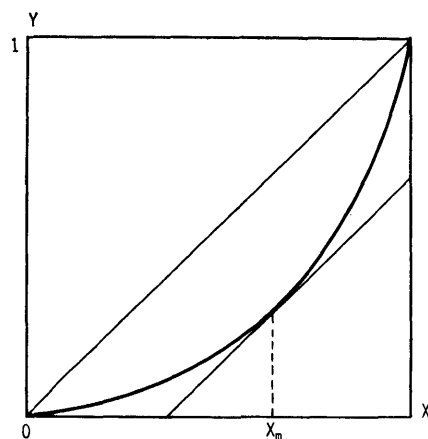
$$X_m = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{1-k}\right)^{1-k}} = \frac{1}{e}$$

また、

$$\log X_m = (1-k) \{ \log(1-k) - \log(2-k) \}$$

$$\frac{1}{X_m} \cdot \frac{dX_m}{dk} = -\log(1-k) + \log(2-k) + (1-k) \left(-\frac{1}{1-k} + \frac{1}{2-k} \right)$$

$$= \log \frac{2-k}{1-k} - \frac{1}{2-k}$$



$$= \log \left(1 + \frac{1}{1-k} \right) - \frac{1}{2-k}$$

$k \rightarrow -\infty$ に近いとき,

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{1-k} - \frac{1}{2-k} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-k} \right)^2 + O\left(\frac{1}{k^3}\right) \\ &= \frac{1}{(1-k)(2-k)} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-k} \right)^2 + O\left(\frac{1}{k^3}\right) \\ &= \frac{2(1-k) - (2-k)}{2(1-k)^2(2-k)} + O\left(\frac{1}{k^3}\right) \\ &= \frac{-k}{2(1-k)^2(2-k)} + O\left(\frac{1}{k^3}\right) > 0 \end{aligned}$$

(B) $k=0$

(i) $A < 1 \quad Y = X^2$

$$2X_m = 1 \quad X_m = \frac{1}{2}$$

この場合, 平均値とメディアンが一致する.

(ii) $A = 1 \quad Y = X$

$y_m = 1$ は不定である.

(C) $0 < k < 1 \quad Y = X^{(2-k)/(1-k)}$

$$X_m = \left(\frac{1-k}{2-k} \right)^{1-k} \quad \frac{dX_m}{dk} < 0$$

(D) $k=1 \quad Y = \frac{e^{\alpha X} - 1}{e^{\alpha} - 1}; \quad \alpha > 0$

$$\begin{aligned} \frac{\alpha e^{\alpha X_m}}{e^{\alpha} - 1} &= 1 \quad X_m = \frac{1}{\alpha} \log \frac{e^{\alpha} - 1}{\alpha} \\ \frac{dX_m}{d\alpha} &= \frac{-1}{\alpha^2} \log \frac{e^{\alpha} - 1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \frac{\alpha e^{\alpha} - e^{\alpha} + 1}{\alpha^2} \frac{\alpha}{e^{\alpha} - 1} \\ &= \frac{-1}{\alpha^2} \log \frac{e^{\alpha} - 1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha(e^{\alpha} - 1)} \\ &= -\frac{1}{\alpha^2} \left(\log \frac{e^{\alpha} - 1}{\alpha} + 1 \right) + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha(e^{\alpha} - 1)} \end{aligned}$$

(E) $1 < k < 2 \quad Y = \frac{(1-\gamma X)^{(2-k)/(-k+1)} - 1}{(1-\gamma)^{(2-k)/(-k+1)} - 1}; \quad 0 < \gamma < 1$

$$\begin{aligned} &\frac{-\gamma \frac{2-k}{-k+1} (1-\gamma X_m)^{1/(-k+1)}}{(1-\gamma)^{(2-k)/(-k+1)} - 1} = 1 \\ X_m &= \frac{1 - \left[-\frac{1}{\gamma} \frac{k+1}{2-k} \{ (1-\gamma)^{(2-k)/(-k+1)} - 1 \} \right]^{-k+1}}{\gamma} \end{aligned}$$

(F) $k=2 \quad Y = \frac{\log(1-\gamma X)}{\log(1-\gamma)}; \quad 0 < \gamma < 1$

$$\begin{aligned} \frac{-\gamma}{1-\gamma X_m} &= 1 \quad 1-\gamma X_m = \frac{-\gamma}{\log(1-\gamma)} \\ X_m &= \frac{1}{\gamma} \left\{ 1 + \frac{\gamma}{\log(1-\gamma)} \right\} = \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\log(1-\gamma)} \end{aligned}$$

$r \rightarrow 0$ のとき,

$$X_m = \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \left\{ 1 - \left(\frac{r}{2} + \frac{r^2}{3} + \cdots \right) + (\quad)^2 \right\} \\ = \frac{1}{2} + 0(r)$$

$$(G) \quad k > 2 \quad 1 - Y = (1 - X)^{(k-2)/(k-1)}$$

$$\frac{k-2}{k-1} (1 - X_m)^{-1/(k-1)} = 1$$

$$X_m = 1 - \left(\frac{k-2}{k-1} \right)^{k-1}$$

$k \rightarrow \infty$ のとき,

$$X_m = 1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{k-2} \right)^{k-1}} \rightarrow 1 - \frac{1}{e}$$

以上から第5表を得る.

第5表 平均点の変化

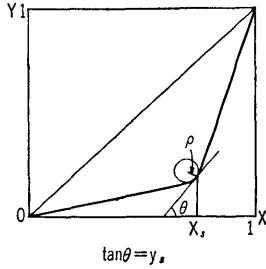
類型	パレート 常 数	平 均 点 (X_m)	特 性
(A)	$k < 0$	$\left(\frac{1-k}{k-2} \right)^{1-k}$	$\begin{cases} k \text{ が充分大きいと } G < 0 \\ \text{又 } k \rightarrow -\infty \text{ に於て} \\ X_m = \frac{1}{e} \text{ となる} \end{cases}$
(B)	$k = 0$	(i) $A < 1$ ならば $X_m = \frac{1}{2}$ (ii) $A = 1$ " 不定	平均値 = X メディアンである
(C)	$0 < k < 1$	$\left(\frac{1-k}{2-k} \right)^{1-k}$	k の増大に応じて下層部に移動する
(D)	$k = 1$	$\frac{1}{\alpha} \log \frac{e^\alpha - 1}{\alpha}$	
(E)	$1 < k < 2$	$\frac{1 - \left[-\frac{1}{r} \frac{-k+1}{2-k} \{ (1-r)^{(2-k)/(-k+1)} - 1 \} \right]^{-k+1}}{r}$	
(F)	$k = 2$	$\frac{1}{r} + \frac{1}{\log(1-r)}$	
(G)	$k > 2$	$1 - \left(\frac{k-2}{k-1} \right)^{k-1}$	$k \rightarrow \infty$ に於て $1 - \frac{1}{e}$ に接近する

(III) 飽和値分析

パレート曲線の飽和値 (現代統計学大辞典 (8)) をいかなる位置において求めるべきか詳かではないが, カーブが大きく旋回する最もバラエティに富んだ位置として, ここでは曲率最大の位置をもって飽和点とする. これは後にみるように構造上重要な k を端的に示すものとしていわば典型点ともいえるものである.

(i) この定義によれば逆に曲率半径 ρ は最小となる.

$$\rho = \frac{\{1 + Y'\}^{3/2}}{Y''} = \frac{(1 + y^2)^{3/2}}{y^2}$$



$$\rho' = \frac{3(1+y^2)^{1/2}yy'^2 - y''(1+y^2)^{3/2}}{y'^2}$$

$y' > 0$ であるから飽和値 y_s につき、

$$3y_sy_s'^2 = (1+y_s^2)y_s''$$

パレートに関する一般的な定義から、

$$yy'' = ky'^2$$

故に、

$$\left(\frac{3}{k} - 1\right)y_s^2y_s'' = y_s''$$

従って、

$$y_s'' = 0 \quad \text{または、} \quad \left(\frac{3}{k} - 1\right) = \frac{1}{y_s^2}$$

$y_s'' = 0$ は均等線の場合、従って、ここでは第 (II) 型 (ii) の場合のみであり、このとき X_s は不定である。

さて、 $y_s'' \neq 0$ のとき極値が存在する場合、

$$(ii) \quad \frac{3}{k} - 1 > 0 \quad \text{すなわち} \quad 0 < k < 3$$

$$y_s = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{k} - 1}} \quad \frac{dy_s}{dk} = \frac{\frac{3}{k^2} \cdot \frac{3}{k} - 1}{\frac{3}{k} - 1} = \frac{3}{2\left(\frac{3}{k} - 1\right)^{3/2} k^2} > 0$$

従って、飽和値は $\frac{m}{\sqrt{\frac{3}{k} - 1}}$ であり、ローレンツ・カーブにおいて X_s における接線方向は

$0 < k < 3$ なる限り函数形にかかわらず増大する。

(iii) $k \geq 3$ の場合、

この場合は第 VII 型 (G) に限られる。従って、

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{(1+y^2)^{3/2}}{y'} & 1-Y &= (1-X)^{(k-2)/(k-1)} \\ y &= \frac{k-2}{k-1} (1-X)^{-1/(k-1)} & y(0) &= \frac{k-2}{k-1} \\ y' &= \frac{k-2}{k-1} \frac{1}{k-1} (1-X)^{-k/(k-1)} & y'(0) &= \frac{k-2}{k-1} \frac{1}{k-1} \\ \rho_0 &= \frac{\{(k-1)^2 + (k-2)^2\}^{3/2}}{(k-1)(k-2)} \\ \frac{d\rho_0}{dk} &= \frac{3\{(k-1) + (k-2)\}\{(k-1)^2 + (k-2)^2\}^{1/2}(k-1)(k-2)}{(k-1)^2(k-2)^2} \\ &\quad - \frac{\{(k-2) + (k-1)\}\{(k-1)^2 + (k-2)^2\}^{3/2}}{(k-1)^2(k-2)^2} \\ &= \frac{\{(k+1)^2 + (k-2)^2\}^{1/2}}{(k-1)^2(k-2)^2} \{3(k-1)(k-2) - (k-1)^2 - (k-2)^2\} \\ &= \frac{(2k-3)\sqrt{(k-1)^2 + (k-2)^2}}{(k-1)^2(k-2)^2} (k^2 - 3k + 1) > 0 \end{aligned}$$

すなわち、最下層部の曲率円の半径 ρ_0 は k とともに増大する。

(iv) $k < 0$ の場合

この場合は $Y = X^{(k-2)/(k-1)}$ に限られる。

$$y = \frac{k-2}{k-1} X^{-1/(k-1)} \quad y(1) = \frac{k-2}{k-1}$$

$$y' = \frac{k-2}{k-1} \cdot \frac{-1}{k-1} \cdot X^{-k/(k-1)} \quad y'(1) = \frac{k-2}{k-1} \cdot \frac{-1}{k-1}$$

$$\rho_1 = \frac{\{(k-1)^2 + (k-2)^2\}^{3/2}}{(k-1)(k-2)}$$

故に、

$$\frac{d\rho_1}{dk} > 0$$

この場合、最上層部に特徴があり、(iii) と類値のことがいえる。

以上の結果を第 6 表に纏めることができる。

第 6 表 飽和値の変動

類型	パレート 常数 (k)	飽和値 (my_s)	飽和点 (X_s)	曲 率 半 径 (ρ)	特 徴
(A)	$k < 0$			$\rho_1 = \frac{\{(k-1)^2 + (k-2)^2\}^{3/2}}{(k-1)(k-2)}$	k と共に ρ_1 は 増大する
(B)	$k = 0$	(i) $A < 1$ (ii) $A = 1$	不定	$\rho_1 = \frac{\sqrt{5}^3}{2}$	
(C)~ (F)	$0 < k < 2$	$\frac{m}{\sqrt{\frac{3}{k}-1}}$			y_s は k と共 に増大する
(G)	(i) $2 \leq k < 3$ (ii) $k \geq 3$	"		$\rho_0 = \frac{(2k-3)\sqrt{(k-1)^2 + (k-2)^2}}{(k-1)^2(k-2)^2} (k^2 - 3k + 1) > 0$	ρ_0 は k と共 に増大する

以上の他、メディアン ($X=1/2$)、均分点 ($Y=1/2$)、局所均等 $y'=0$ 等に注目することができるが、各函数型からみて概ねその成果は微々たるものに留まるであろう。

結論として、これらの分析に対しては従来ジニ集中係数による均等不均等度の測定を主としたのに対し、飽和値が構造分析の上で単調で連続に変化の過程を示すパラメーターとして有力な足掛りを与えると予想しうるのである。

§ 5. 実際のデータの検討

これまでの結果を実際のデータに適用して、どのようなことがいえるかが本節の目的である。しかしながら当面は深く資料の精疎に立入ることは避け、卑近な資料に基いて方法の適用可能性を確認することをもって第一着手とした。従って資料の範囲も経済統計（主として法人資産統計）に限定し、その範囲で国内、国外、産業別および時系列の資料を撰択した。

(I) 国内資料

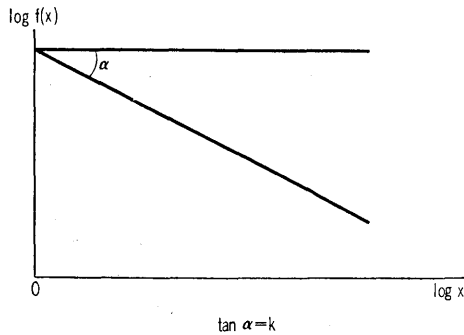
(A) 産業間の比較

この面に関しては従来の研究との関係上、昭和 30 年度国富調査法人企業調査第 2 篇の資料を用いた。

(i) 主要産業

同上資料第 4 章第 3 節主要産業における資産額階級別法人企業資産額によるものである。

(Fig. 11. 参照)。



これらの資料のローレンツ・カーブについては既にしばしば拙稿(11)で用いたので、ここではパレート常数を主眼にして両対数による分布を描いた。この結果、この常数は既ね $0 < k < 1$ 従って曲線として第 III 類型に属するものと思われるが、この常数は、括弧内に収めた平均数量に逆比例的な傾向を示す。

(ii) 製造業

前節主要産業間に認められた傾向を更に確認するために同上資料第3篇第3表産業別資本金または出資金階級別資産額階級別法人資産評価額に基づいて前節の方法に準じて作製したものの一部が Fig. 12 (その1) である。

また主要な傾向のみを捉えたのが Fig. 12. (その2) である。

かくして、産業別資料に関して年度資料につき、

1. パレート常数は概ね $0 < k < 1$ であること従って函数型はジニ法則といわれる第 VII 型と異なり第 III 型に属すると思われること、および
2. k と平均数量との間に相反性が認められることが予想される。

(B) 時系列資料

いわば空間的比較といえる (A) から時間的推移の分析に移行することは一種必然の帰趨であるが、(A) に該当する時系列資料は手許に所在しないので、一応大蔵省法人企業統計年報

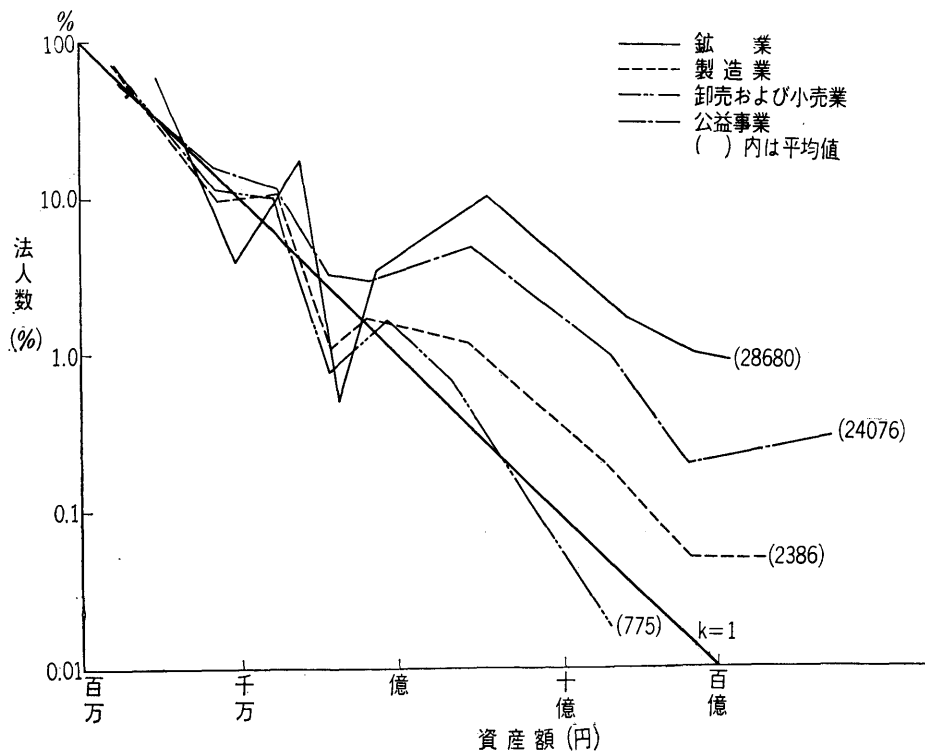


Fig. 11.

() 内は平均値

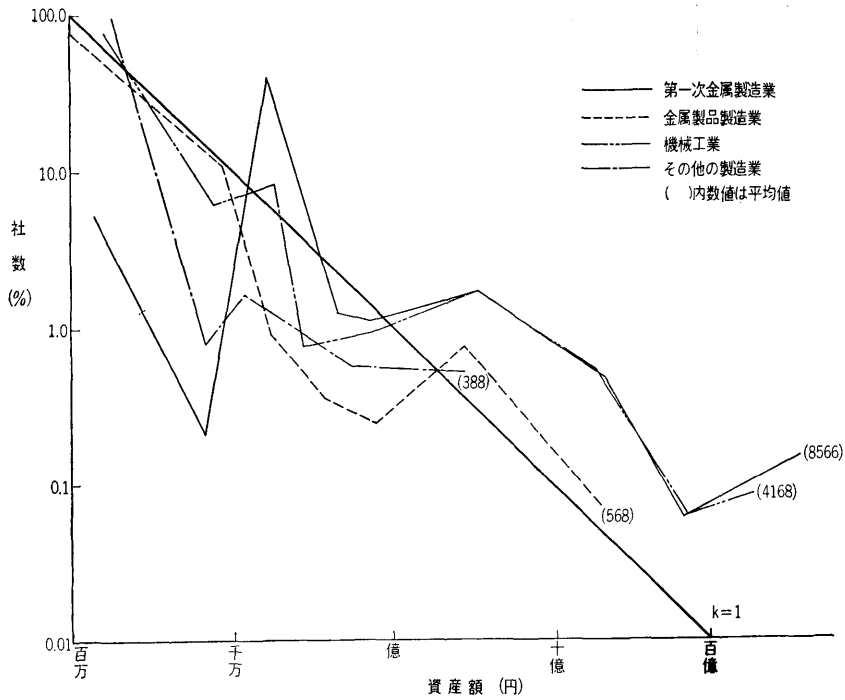


Fig. 12-1.

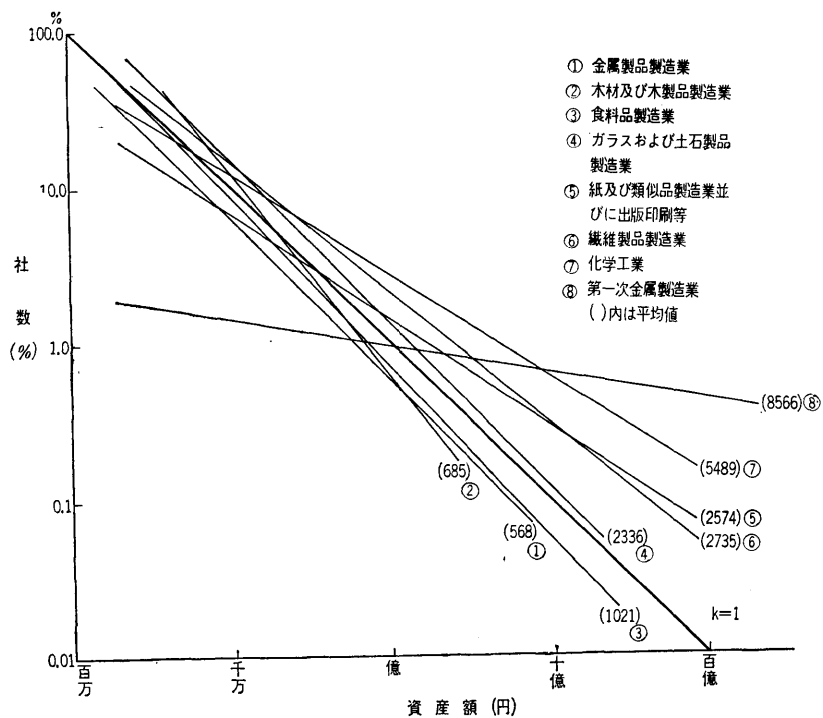


Fig. 12-2.

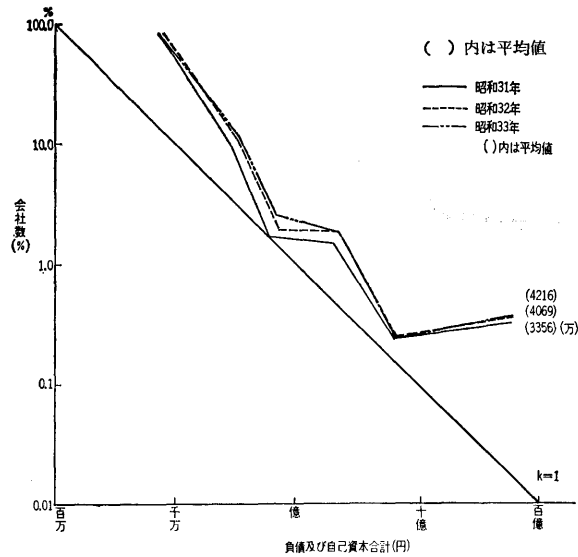


Fig. 13.

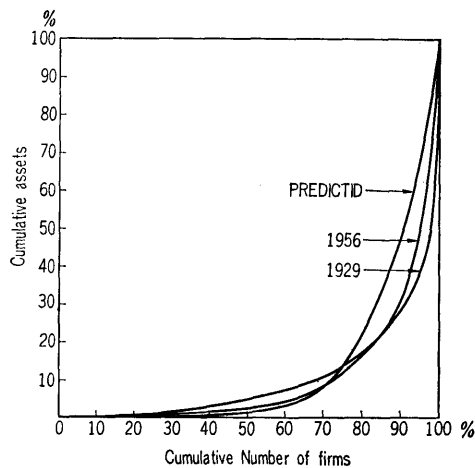


Fig. 14. Irma G. Adelman A Statistic Analysis of the Size Distribution of Firms J.A.S.A. Vol. 53, 1958.

31, 32, 33 年度分に依拠した*)。

この場合、横軸は資本金階級別の資産額を用いざるを得なかったもので、もし資本金、資産額間の相関が低位にある時は、方法自体に問題が生じてくる。かかる欠陥が所在しないときは Fig. 13 により (I) の二つの結論は、ある程度充足されていると認められるのではなかろうか。

(II) 諸外国の実例

Lorenz' Curve を用いた資料は諸外国においては枚挙に暇がないが、本節では J.A.S.A. (Irma G. A. Delman (6)) J.R.S.S. (Suphan Andic & Alan. Peacock (5)) からの二例に止めた。Fig. 14, 15 はこれらが相互に異種の data でありながら、時間経過に応じて曲線が交錯することを示している。

§ 3. § 4. によれば、こうした交錯が認められるのは、Fig. 8. その他と併せ考えると、分布、

*) この前後の資料についても集計時に持合せなかったことを付記しておく。

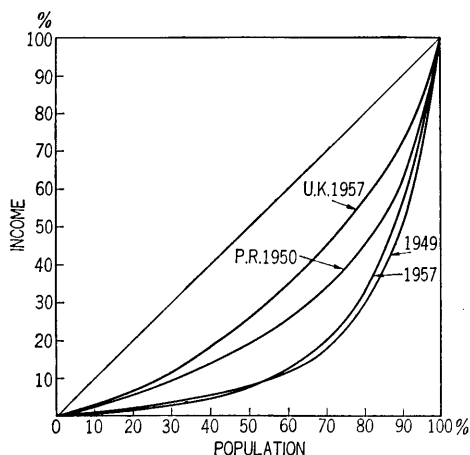


Fig. 15-1. International Distribution of Income, 1949 and 1957 (including U.S.A.).

Suphan Andic and Alan T. Peacock The International Distribution of Income, 1949 and 1957.

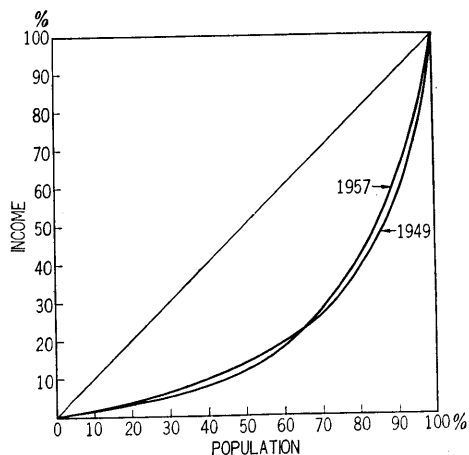


Fig. 15-2. International Distribution of Income, 1949 and 1957 (excluding U.S.A.).

あるいは分配関係が単に類型内の転移に留まらず、類型間でしかもかなり大幅に相互転化が行なわれたことを示している如くである。

翻って、こうした事態は曩のジニ係数の推移のみによって把握することをますます困難にする一方、飽和値分析を有力にするものではあるまいか。

むすび

分布函数よりローレンツ・カーブを誘導するに当り従来積分形式の変換 § 1. (1) から微分形式の変換 § 1. (2), (3) への移行は本篇により殆んど必須といえるであろう。単純な分布形式を基に、単一の微分方程式から幾多の函数型を誘導することは Pearson の故事にあやかるわけではないが、ここに一つの例題を得たといえないであろうか。また、これによりある面では曖昧な統計分布概念が聊かでも解明され得たとすれば筆者の本懐とするものである。

翻って筆者自身はこれを一つのいわば「格別解」としてより複雑形態の分布、曲線の分析に進まんとするものである。

統計数理研究所

参考文献

- [1] Kendall, M. G., "The Advanced Theory of Statistics."
- [2] Kendall, M. G., "An Introduction to the Theory of Statistics."
- [3] Kendall, M. G., "Natural Law in the Social Sciences," J.R.S.S. (1961).
- [4] Kendall, M. G., "An Dictionary of Statistical Terms."
- [5] Andic, S. & Peacock, A., "The International Distribution of Income 1949 and 1947," J.R.S.S. (1961).
- [6] Adelman, I. G., "A stockastic Analysis of the Size Distribution of Firm," J.A.S.A., (1958).
- [7] Juran, J. M., "Quality Control Handbook."
- [8] 佐藤良一郎 数理統計学要説 培風館
- [9] 現代統計学大辞典 東洋経済社
- [10] 統計学辞典 東洋経済社
- [11] 拙稿 日本統計学会会報 (1962年度 1963年度)
- [12] 拙稿 統計数理研究所集報 (Vol. 10. No. 1. 1963, Vol. 11. No. 2. 1964.)