

住宅の損耗度実態調査における統計的諸問題

鈴木 達 三
高 橋 宏 一

(1964年12月受付)

Statistical Analysis on the Wearing Down of Building Fittings

Tatsuzo SUZUKI and Koiti TAKAHASHI

We have found some interesting statistical problems in the survey of many dwelling houses provided by the Japan housing corporation.

In this paper, some of these problems are discussed:

- i) an effect of absent sample to survey results.
- ii) some considerations on the response errors in the survey.
- iii) some theoretical considerations of the distributions of the time-to-failure.
- iv) an example of cost minimization problem.

Institute of Statistical Mathematics

はじめに

多数の住宅を有効に維持管理していくためには、その補修をどのようにすべきかが問題であり、適切な補修計画の作成が必要である。

われわれは、日本住宅公団に協力し、賃貸住宅（公団住宅）の「計画修繕」の方式を、より一層適切なものにするため、昭和37年度より、「計画修繕資料作成に関する研究」をおこなっており、現在も継続中である。

調査の実施や研究経過の詳細と得られた資料については報告書に発表されている（[1], [2]）ので、ここでは、この研究に付随して生じたいくつかの問題について述べることにする。まず、以下の分析に関連のある部分の概要を述べる。問題はつぎのように分けられる。

- 1) 住宅各部の損耗の過程を実態調査により調査するときのサンプリングの問題
- 2) 実態調査を観察法により行なうときの調査員誤差に関する問題
- 3) 調査結果より損耗の過程を考えるときの問題（耐用年数分布のあてはめなど）
- 4) 補修時期決定のさいの問題（経済性、居住性などの条件による）

である。

これらの問題は、それぞれ、実際の調査企画と密接に関係している。

われわれは、現在使用している住宅について、各部の損耗の実態を観察法により調査し、その結果から、各部品の耐用年数あるいは、修理時期等を考察していく方針をとった。したがって、統計的な分析を通して、損耗の実態が操作的にとらえられるような形で調査を企画した。

実態調査の目的は、各部の経年的な損耗の過程を求めることであるが、調査実施上の制約から、各経過年度ごとに標本をとり、各年度別の集計結果で、経過年度別の変化を代表させることにした。調査する部品は、観察法により調査が可能なものに限定されるが、同一の部品で

も、いろいろの観点から調査しているので調査項目は100以上になった。調査の対象は公団住宅のうちもっとも普通の型式である中層2DKに限定した。さらに、対象団地は東京・関東両支所に属するもので、海岸地帯のような特殊な事情（例えば錆などの進行に対して）をもつものは除かれた。結局、母集団としては42団地を考え、それを管理開始年度別に層別し、各所より2団地を数に比例した確率で抽出し、前述3の問題に備えた。また各団地内でのサンプリングは、§1で述べるように、屋内に立ち入っての調査であるため、調査日に留守の場合は調査不能となるので、70ケのサンプルを確保するため、予備サンプルを約35戸用意した。

以上は実態調査に関することであったが、§4でとりあげている補修時期の決定については、入居者の希望も考慮する必要があるし、また実態調査の裏付けとしての意味もあって、予備サンプルも含めて全部のサンプルについてアンケート調査も行なった。

次に、§2に関連することであるが、この実態調査で一つの大きな問題点は、それが観察法であるために、損耗の程度の判定基準の決め方、および調査員の実際の判定の変動の検討ということである。後者の問題は§2でとりあげているので、ここで前者について簡単に説明しておく。

損耗の程度をはかる尺度は各部品の損耗の種類によって異なっているので、つぎのような種類に分けて考察する。

- a) 損耗の程度が状態の量的変化の段階に応じて判断されるもの
(錆、塗装部分の汚染、壁面の汚染)
- b) 損耗の程度が状態の質的变化で判断されるもの
 - b-1 (建付、開閉の良、不良、機械的部品の良、不具合)
 - b-2 (破損、腐蝕の有無、機械的部品の故障、紛失の有無)
- c) 特定の損傷のみに注目して判断するもの
(壁面、コンクリート仕上面のヒビ割れ、雨漏り跡)

このように分けると、b)、c)についての判定は<良、不良>または<あり、なし>の二種類になり、<良、不良>の判断に多少問題はあるが、それほど調査員の判定に変動があるとは考えられない。a)は状態の量的変化が問題になるので、調査もそれに応じた方法をとる必要がある。しかし、調査の実施上の制約から、つぎのような四段階の判定基準を作成して、判断させることにし、その他の方法（たとえば反射率の測定、平滑度の測定などの物理的方法）は後日の実験にまわすことにした。

作成した判定基準は部品および損耗の種類により多少異なるが、錆については、

- O: 錆なし
- A: 平面に点錆の生じている程度
- B: 角に連続的錆を生じている程度
- C: 平面にまで連続的錆を生じている程度

壁面、建具、床などの汚染については、

- O: 汚れなし
- A: 手垢等による軽度の汚れのある程度
- B: 汚れのやや進んだ状態
- C: 汚れのかなり進んだ状態

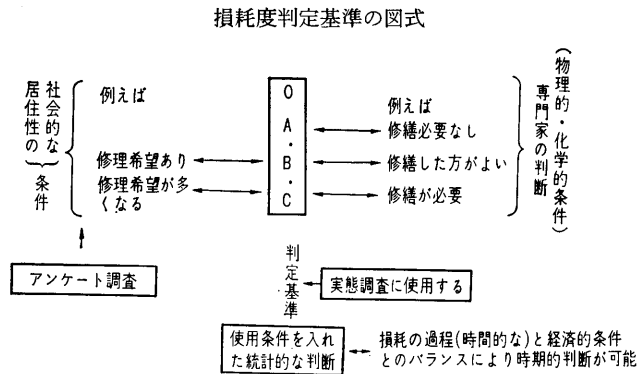
である。実際の調査において、調査員に与えた指示は、実物による教示、およびカラー写真（スライド）による限度見本の提示などが加わっている*）。

*） 使用した限度見本のカラー写真は資料 [2] をみよ。

ところで、これらの判定基準を採用したとき得られる観測値は、各部品の損耗度の判定基準が、その部品に対する補修の要否と直結していれば、修繕時期の決定などに対して有力な指標になるわけである。

とくに、錆、汚染などのように、その状態が非常に悪いと判断されているにもかかわらず補修が行なわれていないような部品（例えば浴室の壁）については、物理的な補修の要否だけでなく、入居者の補修希望の程度も考慮して修繕時期を決めるべきである。

以上の考え方を図式化すると次のようになる。



ここまでは、調査そのものについての概要を述べてきたが、以下、この調査に関連した統計的な問題を（前述 1, 2, 3, 4）順次説明していく。

§1. サンプリングに関する問題 ——不在サンプルのこと——

われわれの調査対象が公団住宅（賃貸アパート）であり、そのうち 2DK 型に限ったことから、子供数は比較的少ないため（昭和 37 年度調査結果によれば 1 戸当たり平均 1.15 人）、共稼ぎの家庭も多く昼間の調査では不在のための調査不能が多いことが予想された。当初の予想は不在が 2 割程度ということであった。各調査員は一団地で 10 戸は調査する必要があった。しかし調査は一回だけで、調査予定サンプルには予め知らせを出しておき、調査のさいには在宅してもらうことが必要なので、やたらに受け持ち名簿に沢山予定サンプルをのせておくわけにもいかない。そこで負の二項分布にしたがって、不在率 0.2 の場合で、10 戸調査できるまでに要する必要サンプル数の確率分布を計算してみると第 1 表が得られる。

第 1 表

不在率 \ 必要サンプル数	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
0.2	0.107	0.214	0.236	0.189	0.123	0.069	0.034	0.016	0.006	0.002
(累積)	0.107	0.321	0.557	0.746	0.869	0.938	0.972	0.988	0.994	0.996

以上のことから各調査員には 10 戸づつの本サンプルと 5 戸の予備サンプルを受持名簿に記載し本サンプルから調査して行って 10 戸まで調査させるようにしたかったが、調査実施上の制約から予備サンプルを 3 戸しか記載できなかった。しかし、調査実施サンプルの期待値は、

$$10 \times \sum_{k=10}^{13} \binom{13}{k} 0.8^k 0.2^{13-k} + \sum_{k=0}^9 k \binom{13}{k} 0.8^k 0.2^{13-k} \\ = 10 \times 0.7473 + 2.136 = 9.609$$

となり、それほど予定を下廻らないことが考えられた。結果的には、調査時間の不足や、比較的新しい団地では不在率が3割近くあったことから、一調査員一団地平均約9戸であった。

次に不在サンプルの調査結果に与えるゆがみを考えてみる。前にも述べたように、不在は共稼ぎによるものが多数を占めるだろうから、不在サンプルでは子供数が少なく、したがって汚れが少ない傾向を示すのではないかと思われた。というわけで、まず不在サンプルと調査実施サンプルとの子供数を比較してみたのが第2表である。調査実施サンプルについては問題ないが、不在サンプルに対応するデータには、予備サンプルで使用しなかった分も含まれていることを注意しておく。

第2表

団地コード		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10										
平子供均数	調査実施	1.08	1.44	1.59	1.58	1.28	1.29	1.24	1.15	1.40	1.34										
	調査しない	1.15	0.81	1.04	0.87	1.00	1.11	1.17	0.59	0.68	0.63										
サンプル数	調査実施	108	71	110	62	57	69	68	58	63	59										
	調査しない	39	16	26	15	12	18	18	17	19	19										
											11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	全体
											1.28	1.39	1.55	1.26	0.09	1.27	1.07	1.71	0.99	0.98	1.25
											0.63	1.31	1.33	0.85	0.75	0.65	0.50	0.32	0.53	0.39	0.84
											61	54	62	66	67	49	58	52	66	59	1319
											16	16	15	13	12	23	14	19	19	23	369

第3表

子供数	6 畳壁汚れの度合			
	O	A	B	C
0	39	29	21	14
1	18	33	40	9
2	6	19	62	13
3	10	10	60	20

(数値は各行内の%)

20 団地中一つを除いてすべて調査サンプルの平均値の方が大きくなっており、明らかに有意差が認められる。

そこで、子供数と各部汚れのクロス集計を行なってみたが、大部分のものについて、ほとんど相関がなかったのでデータの補正は行なわなかった。しかし第3表の例が示すように、かなり相関があるものもあり、

前述のことと照らし合わせて、不在サンプルの扱いに慎重でなければならないことがわかる。

§2. 判定段階の変動の解析

a) 空屋調査の例

われわれの用いた基準についての当否の問題は実際上は極めて重要であろうが、ここでは、それにはふれないうで、一応判定の基準が定まっているとしておこう。実態調査を前に述べたような観察法を用いて行なうとすれば、調査員の判断による変動をさけることはできない。

この変動が、損耗の種類、および損耗の程度によってどのくらいの大きさになるかをみておくことは、このような観察法による実態調査を行なうことが可能であるかどうかを知るうえにも必要なことであろう。

まず、同一部品を、実際に調査を行なった調査員がどのように判定したかをみると、2 回の

空屋調査*)の結果は第4表、第5表のようである。

このように、損耗の種類および程度によっては、かなり判定の段階がわかる場合もみられるので、その全体的な様子を見るため、つぎのようにして、調査員による変動の大きさを検討した。ここではおもに Hansen その他による回答分散の考え方 [3] を用いて解析する。

第4表 同一部品における判定の相違 (昭和37年度)

	付表 番号	部品	判定段階				計
			O (なし)	A (あり)	B	C	
建 付	5	ド ア	20				20
	47	4 畳 半 窓	12	7			19
	59	6 畳 半 押 入 襖	11	8			19
	67	6 畳 ガ ラ ス 戸	18	1			19
	77	6 畳 襖	10	10			20
	86	台 所 ガ ラ ス 戸	18	1			19
		小 計	(77) 89	(23) 27			116
開 閉	6	ド ア	19				19
	22	便 所 戸	17			2	19
	48	4 畳 半 窓	3	15			18
	49	4 畳 半 換 気 窓	6	12			18
	60	4 畳 半 押 入 襖	19				19
	68	6 畳 ガ ラ ス 戸	7	12			19
	78	6 畳 襖	16	4			20
	87	台 所 ガ ラ ス 戸	5	15			20
	96	台 所 吊 戸 棚	14	6			20
	103	バルコニー物置の戸	18				18
		小 計	(65) 124	(34) 64		(1) 2	190
建開 付閉	69	6 畳 換 気 窓	(95) 19	(5) 1			20
		合 計	(71) 232	(28) 92		(1) 2	326
壁・天 井 (汚染)	24	便 所 壁		4	14		18
	32	浴 室 天 井	6	10			19
	34	浴 室 壁	2	1	8	8	19
	54	4 畳 半 壁 上 部	4	8	6		18
	56	4 畳 半 壁 下 部		8	8	3	19
	72	6 畳 壁 上 部		14	6		20
	74	6 畳 壁 下 部		5	14	1	20
	90	台 所 壁	1	5	12	1	19
	91	台 所 天 井	10	10			20
	107	バルコニー隔壁	8	8			16
109	バルコニー天井		18			18	
		計	(17) 34	(44) 91	(33) 68	(6) 13	206

数字は実数、()内は %

*) 調査の説明会終了後、参加調査員全員に調査対象と同一様式の住宅各部を調査させた。これは調査当時居住者が退居した直後のもので、損耗の状態は居住時のままである。

第5表 空屋調査の結果 (昭和38年度)

	付表 番号	部品	判定段階				D.K.
			O	A	B	C	
汚 染	4	ドア表面	⑨	4			2
	4ロ	ドア裏面		6	8		1
	8	玄関床	2	⑨	2		2
	10	浴室入口床		3	⑩		2
	19	便所の戸(表)	3	⑨	2		1
	19	便所の戸(裏)	1	7	5	1	1
	24	便所壁	⑨	1	1		4
	27	浴室戸	2	⑧	4		1
	32	浴室天井			1	⑬	1
	34	浴室壁		(1)	1	⑩	3
	36	浴室窓		7	6		2
	45	4畳半窓	4	1	⑦	3	
	54	4畳半壁上郎	(3)		1	⑦	4
	56	4畳半壁下部	(2)		2	⑦	4
	57	4畳半天井	4	⑦			4
	58	4畳半天井雨モリ	⑩	1			4
	61	4畳半押入襖表装	3	⑨	3		
	65	4畳半襖汚染	1	⑩	2		2
	72	6畳壁上部	(3)	1	⑤	3	3
	74	6畳壁下部	(2)	1	⑧	1	3
	75	6畳天井	4	⑤	2		4
	76	6畳天井雨モリ	⑩	2			3
	79	6畳襖表装		6	9		
	84	台所ガラス戸	(5)	3	⑥		1
	90	台所壁	1	2	2		10
	91	台所天井	2	3	3		7
92	台所床板	(1)		⑫		2	
97	台所吊戸棚	3	⑧	2	(1)	1	
へ	換気扇近くの壁		⑤	2	(1)	7	
ト	調理台近くの壁		④	3	(1)	7	
101	バルコニー物置の戸	2	⑫			1	
107	バルコニー隔壁	2	⑪	1		1	
109	バルコニー天井	6	7			2	
錆	3	ドアの表面	⑪		1		3
	4イ	ドアの裏面		3	⑥	3	3
	33	浴室天井釘錆		⑭			1
	51	4畳半窓手摺		(2)	2	⑪	
	95	台所水切棚スノコ	(1)		⑫	1	1
105	バルコニー手摺	1	⑪			3	
腐 蝕	11	浴室入口床	7	5			3
	28	浴室戸	⑪	1			3
	46	4畳半窓	7	8			
	66	6畳ガラス戸	⑬				2
腐 蝕	85	台所ガラス戸	⑭				1
	93	台所床板	⑩	4			1
	102	バルコニー物置の戸	8	6			1

	付表 番号	判定段階		O (なし)	A (あり)	B	C	D.K.
		部品						
建 付	5	ド	ア	⑬				6
	47	4 畳 半 窓		4	⑪			
	59	4 畳 半 押 入 襖		1	⑭			
	67	6 畳 ガ ラ ス 戸		5	⑩			
	69	6 畳 換 気 窓		⑨	5			1
	77	6 畳 襖				⑮		2
開 閉	6	ド	ア	⑬				2
	22	便 所 戸		⑫	2			1
	38	浴 室 窓		⑫	1			2
	40	浴 室 入 口 の 戸		⑥				9
	48	4 畳 半 窓		1	⑭			
	49	4 畳 半 換 気 窓		1	⑬			1
	60	4 畳 半 押 入 襖		8	7			
	68	6 畳 ガ ラ ス 戸		4	⑪			
	78	6 畳 襖		⑮				
	87	台 所 ガ ラ ス 戸		⑬	1			1
	88	台 所 ガ ラ ス 戸 換 気 窓		7	6			2
	96	台 所 吊 戸 棚		⑩	4			1
103	バルコニー物置の戸		⑪	3			1	

<注> ○印のある数字を基準にしてみたとき () のあるものはやや変動が大きい。

b) 変動の解析

われわれのおこなった調査方法は、一定の判定基準を与えて、各部品の損耗の程度がどの段階に入るかを調査員に判定させたわけであるから、ある部品（母集団）のうち特定の損耗段階に入るものの比率を求めることになる。

母集団の各要素が、

$$X_j = \begin{cases} 1, \dots & \text{要素 } j \text{ がある特定の段階に入る} \\ 0, \dots & \text{そうでない} \end{cases}$$

なるような一定の値をもち、調査によって、それが得られると考えられるときは、標本調査による誤差は通常のサンプリング誤差を考えればよいが、われわれの場合は、こうならない。

いま、調査は繰返しておこなえるものとして、 t 回目の調査のとき、サンプルの要素 j の測定値を、

$$x_{jt} = \begin{cases} 1, \dots & t \text{ 回目の調査で要素 } j \text{ が特定の段階に入る} \\ 0, \dots & \text{そうでない} \end{cases}$$

とすれば、サンプルの大きさを n とするとき母集団で特定の段階に入るものの比率の一つの推定値として、

$$p_t = \frac{1}{n} \sum_j x_{jt} \quad (1)$$

が考えられる。

p_t の期待値を P とすれば、この t 回目の調査の全分散は

$$\sigma_{p_t}^2 = E(p_t - P)^2 \quad (2)$$

となる。

ここで、つぎのような条件付の期待値を考える。すなわち、母集団の要素 j について、すべての調査の繰返しをしたときの期待値を、

$$E_j x_{jt} = P_j \quad (3)$$

とする。ある要素 j について、ある特定の調査 (t 回目) のときの値とのズレ、

$$d_{jt} = x_{jt} - P_j \quad (4)$$

は判定の変動と考えられる。

この条件付期待値を使って、(2) を書き直すと、

$$\sigma_{p_t}^2 = E(p_t - P)^2 = E(p_t - P)^2 + 2E(p_t - P)(P - P) + E(P - P)^2 \quad (5)$$

となる。

ここで p は、

$$p = \frac{1}{n} \sum_j^n P_j \quad (6)$$

であり、サンプルに含まれる要素についての条件付期待値 (3) の平均値である。

(5) の第1項は、判定段階の変動によるものであり、(4) を使って書き直すと、

$$E(p_t - p)^2 = E\left(\frac{1}{n} \sum_j d_{jt}\right)^2 = E(\bar{d}_t)^2 = \sigma_{\bar{d}_t}^2 \quad (7)$$

となる。これを判定変動による分散と名付ける。

第2項は、共分散の項で一般には必ずしも0にならないが、全数調査のとき、あるいは同一サンプルを繰返して調査するときは0になる。いまはこの項は一応考えないことにする。

第3項は母集団の要素 j に P_j という値がついていると考えたときの通常のサンプリングの分散である。

すなわち、判定段階の変動があると考えたとき、通常のサンプリング誤差に、(7) が加わってきたことになるので、この相対的な大きさがどの位かを考えよう。

判定変動による分散の近似的な推定値を求める方法はいろいろあるが、われわれのおこなったものは“繰返し法”である。すなわち、調査を二度おこない同一のサンプルについての損耗程度を、まずある調査員に判定させ、ついで別の調査員に判定させた。

いま、 p_1 を第1回目の調査のとき得られた特定の損耗段階に入るものの比率とし、 p_2 を第2回目の比率とすると、判定変動による分散 (7) の推定値として、

$$\frac{(p_1 - p_2)^2}{2} \quad (8)$$

を使うことができる。

この式の期待値は近似的に、

$$\frac{1}{2} \{ \sigma_{\bar{a}_1}^2 + \sigma_{\bar{a}_2}^2 - 2\rho_{\bar{a}_1 \bar{a}_2} \sigma_{\bar{a}_1} \sigma_{\bar{a}_2} \} \quad (9)$$

となり、もし $\sigma_{\bar{a}_1}^2 = \sigma_{\bar{a}_2}^2$ であり、また (9) の共分散の項が0であれば (8) は (7) の不偏推定値になる。したがって、共分散の項が無視できるなら利用することができるわけである。われわれの調査の場合は、第1回目の結果と第2回目の結果の間には、調査員による判定段階の変動以外のものは入ってこないで、この共分散はそれほど大きくなるとは考えられない。

c) 実際の調査例における判定段階の変動による分散の大きさの推定

調査員による判定段階の喰い違いを検討するため、つぎのような調査を実施した。

i) 空屋における調査

ii) 共用部分 (階段、メーターボックス、ダストシュートなど) の調査

ここでは、共用部分の調査を2組の調査員が独立に繰返しておこなった結果により、判定変動による分散の大きさを推定した。損耗の種類およびその程度に応じてその一部を一覧表にして示す。

まず、錆および汚染についてみると (第6表に一部を示す)、やや変動の大きい場合もみら

れるが、調査員による判定変動とサンプリング誤差の相対値は、おおむね 0.2~3.0 程度の値になる。

また、開閉についてみると（第7表に一部を示す）、0~2 程度の値になる。この大きさは、錆および汚染の判定段階の変動が、社会調査における実態調査のうち、収入などのように調査

第6表 錆の判定における調査員変動

項目	調査員の組	推定比率 $P(\%)$	σ_a^2	$P(1-P)/n$	$\sigma_a^2/\{P(1-P)/n\}$
錆 O	1	74.6	5.0	30.1	0.2
	2	66.7	80.6	35.3	2.3
	3	73.0	5.0	31.3	0.2
	4	81.7	26.8	36.5	0.7
	5	66.7	408.1	35.3	11.6
	6	65.9	212.8	35.7	6.0
錆 A	1	9.5	20.2	13.7	1.5
	2	8.7	11.3	12.7	0.9
	3	5.6	1.3	8.3	0.2
	4	2.4	11.9	5.8	2.1
	5	14.3	246.9	19.4	12.7
	6	7.9	5.0	11.6	0.4
錆 B	1	1.6	0.0	—	—
	2	2.4	1.2	3.7	0.3
	3	2.4	1.2	3.7	0.3
	4	1.2	3.0	2.9	1.0
	5	8.7	61.7	12.7	4.9
	6	8.7	102.0	12.7	8.6
錆 C	1	9.5	80.7	13.7	5.9
	2	9.5	5.0	13.7	0.4
	3	15.9	5.0	21.2	0.2
	4	12.2	47.5	26.1	1.8
	5	7.1	11.3	10.5	1.1
	6	6.4	80.7	9.4	8.5

第7表 開閉の判定における調査員変動

項目	調査員の組	推定比率 $P(\%)$	σ_a^2	$P(1-P)/n$	$\sigma_a^2/\{P(1-P)/n\}$
開閉 良	1	92.4	1.4	11.8	0.12
	2	93.8	1.6	10.5	0.15
	3	95.1	17.3	9.1	1.9
	4	91.3	0.0	17.2	—
	5	96.3	6.9	6.6	1.0
	6	96.9	19.4	6.6	3.0
開閉 不良	1	2.5	12.9	4.2	3.1
	2	5.4	6.4	9.1	0.7
	3	1.0	1.9	1.9	1.0
	4	7.6	2.4	15.3	0.2
	5	3.7	6.9	6.6	1.0
	6	—	—	—	—

しにくい場合の変動に相当し、開閉の場合は普通の事実項目の場合の調査変動に相当している。

判定段階の変動はこの程度であるので、特に特異な判定を示す調査員の結果をチェックすれば、実態調査の結果は他の分析に利用できるものと考えられ、この種の実態調査は、調査員を適当に訓練し、さらに判定の困難なものについては判定段階の限度見本を併用すれば、調査目的にとって十分な資料がえられるものと思われる。

§3. 耐用年数の分布に関する問題

耐用年数という言葉は、経済的な意味にも物理的な意味にも使われるが、ここで用いるのは [1], [2] で述べているように、各部品についての損耗を A, B 二段階にわけて最初は A で次第に B に移っていくとすると、B に到るまでの時間の意味である。

[1], [2] で検討したように、いくつかの部品のいくつかの損耗の種類については、Weibull 分布、ないしはそれに近いものと、耐用年数の分布がみなされた。一方、それとはちがっていると考えなければならないものも見受けられる。またドアの表と裏とか、北側の手摺りと南側の手摺りとか、対として考えられるものの同時分布、あるいは、そうでなくとも、同時分布も考察する必要がある。

以上のようなわけで、耐用年数の分布についての理論的考察を二、三行なう。

X をある部品の耐用年数を表わす確率変数とする。 X の密度函数を $f(x)$ 、分布函数を $F(x)$ とする。いま使用条件が一定なら密度函数は $f_0(x)$ とし、使用条件のちがいが scale parameter に反映すると考えるなら、 $f(x)$ は、

$$f(x) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\theta} f_0\left(\frac{x}{\theta}\right) g(\theta) d\theta \quad (1)$$

の型をしているとみなせる。ここに $g(\theta)$ は密度函数。

例えば、

$$(イ) \quad \alpha f_0(\alpha x) = \frac{\alpha^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-\alpha x}, \quad g(\alpha) = \frac{\beta^q}{\Gamma(q)} \alpha^{q-1} e^{-\alpha\beta}$$

なら、

$$f(x) = \int_0^{\infty} \alpha f_0(\alpha x) g(\alpha) d\alpha = \frac{\beta^q}{B(p, q)} \frac{x^{p-1}}{(x+\beta)^{p+q}} \quad (2)$$

$$(ロ) \quad \lambda f_0(\lambda x) = \lambda b x^{b-1} e^{-\lambda x^b}, \quad g(\lambda) = \frac{\alpha^p}{\Gamma(p)} e^{-\alpha^2 \lambda^{p-1}}$$

なら、

$$f(x) = \int_0^{\infty} \lambda f_0(\lambda x) g(\lambda) d\lambda = pb \alpha^p \frac{x^{b-1}}{(\alpha+x^b)^{p+1}} \quad (3)$$

$f(x)$ が (1) の型の場合には、次の意味での二次元への拡張は容易である。すなわち、

$$f_1(x; a_1, \theta) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\theta} f_0\left(\frac{x}{\theta}; a_1\right) g(\theta) d\theta$$

$$f_2(y; a_2, \theta) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\theta} f_0\left(\frac{y}{\theta}; a_2\right) g(\theta) d\theta$$

のとき、

$$f(x, y; a_1, a_2) = \int_0^{\infty} f_1(x; a_1, \theta) f_2(y; a_2, \theta) g(\theta) d\theta \quad (4)$$

により二次元の分布が導かれる。

例えば (イ) の例については

$$f_1(x; \alpha, p) = \frac{\alpha^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-\alpha x}$$

$$f_2(y, \alpha, r) = \frac{\alpha^r}{\Gamma(r)} y^{r-1} e^{-\alpha y}$$

$$g(\alpha; \beta, q) = \frac{\beta^q}{\Gamma(q)} \alpha^{q-1} e^{-\beta \alpha}$$

なら,

$$\begin{aligned} f(x, y; p, q, r, \beta) &= \int_0^\infty f_1(x; \alpha, p) f_2(y; \alpha, r) g(\alpha, \beta, q) d\alpha \\ &= \frac{\beta^q \Gamma(p+r+q)}{\Gamma(p) \Gamma(r) \Gamma(q)} \frac{x^{p-1} y^{q-1}}{(x+y+\beta)^{p+r+q}} \end{aligned}$$

(ロ) についていうと,

$$f_1(x; \lambda, b_1) = \lambda b_1 x^{b_1-1} e^{-\lambda x^{b_1}}$$

$$f_2(y; \lambda, b_2) = \lambda b_2 y^{b_2-1} e^{-\lambda y^{b_2}}$$

$$g(\lambda, p, \alpha) = \frac{\alpha^p}{\Gamma(p)} \lambda^{p-1} e^{-\alpha \lambda}$$

とするなら,

$$\begin{aligned} f(x; b_1, b_2, \alpha) &= \int_0^\infty f_1(x; \lambda, b_1) f_2(y; \lambda, b_2) g(\lambda; p, \alpha) dx \\ &= p(p+1) b b' \alpha^p \frac{x^{b-1} y^{b'-1}}{(x^b + y^{b'} + \alpha)^{p+2}} \end{aligned}$$

このようなわけで、 $f(x)$ が与えられたときに、それを (1) の型に表現することが問題となる。いま、

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{1}{\theta} f_0\left(\frac{x}{\theta}\right) g(\theta) d\theta$$

であるとし、 $f_0(x)$ 、 $g(\theta)$ 、 $f(x)$ の n 次の原点のまわりのモーメントをそれぞれ、 ν_n^0 、 ν_n^* 、 ν_n とすると、

$$\nu_n = \nu_n^0 \cdot \nu_n^*$$

である。この関係をつかって簡単に (1) の型の表現が見当のつく例としては、

$$f_0(x) = \frac{1}{B(p, p)} (1-x)^{p-1} x^{p-1} \quad (0 < x < 1)$$

$$g(\theta) = \frac{1}{\Gamma(2p)} e^{-\theta^2 p^{-1}} \quad (\theta > 0)$$

から、

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-x} = \int_x^\infty \frac{1}{\theta} f_0\left(\frac{x}{\theta}\right) g(\theta) d\theta$$

また、

$$f_0(x) = \begin{cases} 2x & 0 < x < 1 \\ 0 & x < 0, x > 1 \end{cases}$$

$$g(\theta) = \frac{2}{\alpha^2} \theta^3 e^{-(\theta^2/\alpha)}$$

なら、

$$f(x) = \frac{2}{\alpha} x e^{-(x^2/\alpha)} = \int_x^\infty \frac{1}{x} f_0\left(\frac{x}{\theta}\right) g(\theta) d\theta$$

となる。これらの例は、scale parameter が selection parameter でもあるため、二次元への

拡張がうまくいかない。

次に、対になっているものの寿命分布の一つの考え方を述べる。二成分の寿命を表わす確率変数を (U, V) とするとき、

$$U = \min(X, Z), \quad V = \min(Y, Z),$$

(ここで X, Y, Z は独立とする) なる関係にあると考えられる場合は多い。対としての寿命 W は、一成分がだめになれば対としても然りとするなら、

$$W = \min(U, V)$$

であり、少なくとも一成分がよいなら対としてよいとするなら、

$$W = \max(U, V)$$

ということになる。

X, Y, Z, U, V, W の分布関数をそれぞれ $F_1, F_2, G, H_1, H_2, K, (U, V)$ の分布関数を F とする。(1-分布関数) を分布関数の上に $-$ をつけてあらわすと、

$$\begin{aligned} \bar{H}_1 &= \bar{F}_1 \cdot \bar{G}, & \bar{H}_2 &= \bar{F}_2 \cdot \bar{G} \\ \bar{K} &= \bar{F}_1 \cdot \bar{F}_2 \cdot \bar{G} & W &= \min(U, V) \text{ のとき,} \\ K &= 1 - F_1 F_2 \bar{G} & W &= \max(U, V) \text{ のとき,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(u, v) &= 1 - \bar{F}_1(u) \bar{F}_2(v) \bar{G}(\max(u, v)) \\ F_1(x) &= 1 - e^{-\lambda_1 x}, & G(x) &= 1 - e^{-\lambda x} \text{ とすると,} \\ H_1(u) &= 1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda)u}, & H_2(v) &= 1 - e^{-(\lambda_2 + \lambda)v} \\ F(u, v) &= 1 - e^{-(\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda \max(u, v))} \end{aligned}$$

(U, V) の二次元分布は、 Z に由来する部分が、 $u=v$ の上に一次元としての密度をもち、他の部分に二次元としての密度をもつ分布になる点が面白い。

この節で述べたことの実問題への応用および一般的な取り扱いが今後の問題である。

§4. 補修時期決定に関する問題 ——費用最小の塗装時期——

建物の外壁、室内の床・壁とか、窓枠とかいうように、建物には塗装を必要とする部分が多い。したがって‘塗り替え’の時期ということが当然問題になってくる。この塗り替えの問題には、機械的故障の修理などと、本質的にちがった点がある。機械的故障は起ったときには直ちに修理する必要がある。それに対し塗り替えは、その原因となる汚れが相当進んでも放置しておくことが可能である。したがって、ややもすると放っておけるだけ放っておこうとしがちである。しかし入居者の住み心地とか、社会的常識から自から限度がある。また、費用の面からみても、上述のようなことは必ずしも得策でないことがある。この点について簡単な考察を加えてみる。

一つの部品について汚れの状態は A, B 二段階とする。最初は A から出発して、 B に移り塗り替えにより A に戻るとする。 B に移るまでの時間は確率変数で、その密度函数 $f(t)$ 、分布函数 $F(t)$ とする。塗り替えの費用は A の状態では a, B では b とする。 $a < b$ と仮定することは自然である。ここで注意すべきは、 A は塗り替えが不要で、 B は塗り替えが必要というようにはっきりわけられるものではなく、むしろ費用のちがいが生じてくる区別である。さらに基礎になっている実問題が、大量戸数の計画修繕にあるので汚れの状態に関係なく計画時期には一斉に塗り替えを実施してしまう。

一部品の使いはじめの時刻を原点にとり時刻 t で塗り替える場合の費用を $C(t)$ とする。前述したように塗り替え間隔には上限 $T, (0 < T \leq \infty)$ が存在すると仮定しておく。

$E(t) = (C(t)/t)$ とおくと、 $E(t)$ は t で塗り替えするときの単位時間あたりの平均費用であ

る。費用の面からだけみれば、 $0 < t < T$ で $E(t)$ が単調減少なら T で塗り替えるのが最も安上がりで別に問題はない。どういった場合に $E(t)$ を最小にする t の値—— t^* とかく——が T 以前に現われてくるかをみる。

われわれの場合、 $C(t)$ は確率変数であるが、大量戸数のことを考えているのだから、その期待値で話を進めることにし、それを $C(t)$ で表わしておく。すると、

$$\begin{aligned} C(t) &= a(1-F(t)) + bF(t) = (b-a)F(t) + a \\ &= (b-a) \left(F(t) + \frac{a}{b-a} \right) \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$E'(t) = \frac{b-a}{t^2} \left((tf(t) - F(t)) - \frac{a}{b-a} \right)$$

を得る。簡単のため、

$$h(t) = tf(t) - F(t), \quad r = \frac{a}{b-a}$$

とおいておく。

$$0 < r < \infty, \quad h(0+) = 0$$

である。また、

$$h'(t) = tf'(t).$$

以上から

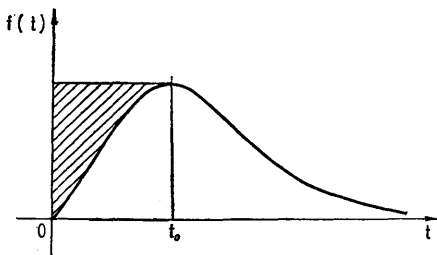
「 $f(t)$ が単調減少なら $t^* = T$ 」は明らかである。

次に $f(t)$ が単峰のときで、 $\exists t_0; 0 < t \leq t_0$ で $f'(t) \geq 0$, $f'(t_0) = 0$, $t_0 < t$ で $f'(t) \leq 0$ なるときには、 $h(t_0) > r$ なら、 t^* は $h(t) = r$ の小さい方の根か T のいずれか、すなわち、 $E(t)$ の値を小さくする方である。いずれにせよ、 $t^* < T$ なる可能性、もっと一般に $E(t)$ が $0 < t < T$ で極小値をもつことに対しては、今の場合、

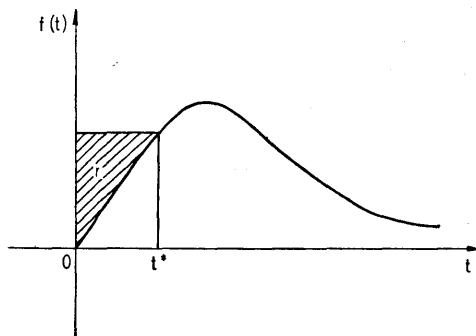
$$h(t_0) = t_0 f(t_0) - F(t_0) > r$$

なることが必要である。グラフでいえば、(1a 図) の斜線部分の面積が r より大きいことである。また極小値をとる点は (1b 図) の斜線部分の面積がちょうど r になっている t^* である。このことは、 $f(t)$ が数式で与えられていないときでも、実際に数値で与えられた資料があるなら、 $t^* < T$ が起るか否かの判定に、またおおよその t^* の値を知るのに簡単な方法と思われる。

$f(t)$ が Weibull 分布の密度函数のときに、以上のことを調べてみる。



1a 図



1b 図

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\beta}{\theta} t^{\beta-1} e^{-(t/\theta)^\beta} & (t > 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases} \quad \beta > 0, \theta > 0.$$

$\beta \leq 1$ ($\beta=1$ なら指数分布) なら $f(t)$ は単調減少だから $\beta > 1$ で考える.

$$h(t_0) = \beta e^{-1+(1/\beta)} - 1$$

となる. $r = a/(b-a)$ であったが, $b = da$ とすると, $r = 1/(d-1)$ ($d > 1$) である. β と d の

第 8 表

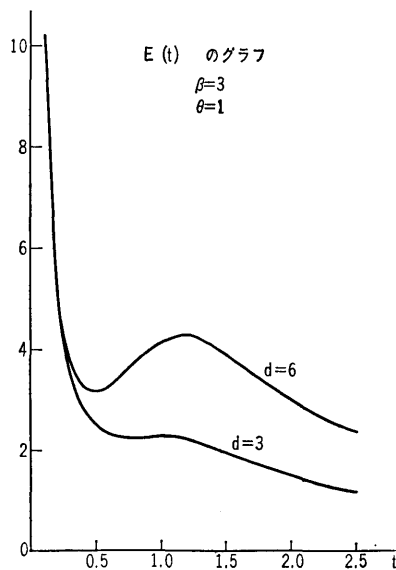
β	d
1.5	14.37
2.0	5.69
2.5	3.69
3.0	2.85
3.5	2.40
4.3	2.00
6.0	1.62

関係は数値例でみると, 第 8 表で示されている. このように, $h(t_0)$ は β だけの関数であるので, Weibull 分布に従うと考えられるような場合には, Weibull 分布確率紙から β をよみとり, 一方 A と B の費用の比率から $t^* < T$ の可能性は容易にわかる. なお, われわれの調査では β は 2 から 3 程度のものが多かった.

最後に数値例を示そう. Weibull 分布で $\beta=3, \theta=1$ のときの分布関数 $F(t)$ と, $d=3, 6$ の場合の $E(t)$ の表が第 9 表, $E(t)$ のグラフが第 2 図である. これをみると, 例えば $d=6$ のとき, $F(t)=0.5$ なる t 以前で修理するという条件で考えた

第 9 表 $F(t), E(t)$

t	$d=3$		$d=6$	
	$F(t)$	$E(t)$	$F(t)$	$E(t)$
0.1	0.00100	10.01999	0.00100	10.04998
0.2	0.00797	5.07968	0.00797	5.19920
0.3	0.02664	3.51093	0.02664	3.77731
0.4	0.06200	2.80998	0.06200	3.27494
0.5	0.11750	2.47001	0.11750	3.17503
0.6	0.19426	2.31422	0.19426	3.28554
0.7	0.29036	2.25818	0.29036	3.50258
0.8	0.40070	2.25176	0.40070	3.75440
0.9	0.51761	2.26135	0.51761	3.98672
1.0	0.63212	2.26424	0.63212	4.16060
1.1	0.73579	2.24689	0.73579	4.25358
1.2	0.82236	2.20393	0.82236	4.25984
1.3	0.88886	2.13671	0.88886	4.18794
1.4	0.93569	2.05098	0.93569	4.05603
1.5	0.96578	1.95438	0.96578	3.88594
1.6	0.98336	1.85420	0.98336	3.69800
1.7	0.99265	1.75606	0.99265	3.50779
1.8	0.99707	1.66341	0.99707	3.32519
1.9	0.99895	1.57784	0.99895	3.15513
2.0	0.99966	1.49966	0.99966	2.99916
2.1	0.99990	1.42848	0.99990	2.85692
2.2	0.99998	1.36361	0.99998	2.72722
2.3	0.99999	1.30434	0.99999	2.60868
2.4	1.00000	1.25000	1.00000	2.50000
2.5	1.00000	1.20000	1.00000	2.40000



第 2 図

とき、10% B が出てきたとき修繕してしまう方が費用が少ないことがわかり、しかも、いつでもほとんどが A の状態なのだから、その点からも早く補修する方が望ましいことになる。

統計数理研究所

引 用 文 献

- [1] “計画修繕資料作成に関する研究 (その 1)” 日本住宅公団調研 62-171・23A.
- [2] “計画修繕資料作成に関する研究 (その 2)” 日本住宅公団調研 A・I-23.
- [3] Hansen, M. H., Hurwitz, W. N. and Bershad, M. A. “Measurment errors in censuses and surveys” Bulletin de l'institut international de statistique, TOME XXXVIII Tokyo 1961.