在庫管理モデルにおけるパラメータの鋭敏性*

青 山 博 次 郎

(1964年10月受付)

Parametric Sensitivity in Certain Inventory Models

Hirojiro Aoyama

In this paper the author intended to analyze the parametric sensitivity in certain inventory models, such as S. Karlin's model, dynamic programming model, linear programming model, and Holt and others' linear decision model.

In practice we are often faced to the problem as how precisely we should assess the parameters—holding cost, ordering cost, penalty cost and parameters of demand distributions—in our adopted model. Some obtained results are as follows:

In the one stage model the parameters of typical demand distribution are significantly sensitive, while in the (s, S) model in steady state so is the penalty cost.

Linear programming model is not suitable to know explicitly the parametric sensitivity, so that reducing to the case of one stage model a similar result was shown. On the other hand the linear decision model developped by C. C. Holt and others was analyzed, and in case of periodic demand treated in their example [2] it was shown that the parameter of the amount of demand was more sensitive than other parameters. Besides this result the differential coefficients of work force with regard to the parameters are given.

Institute of Statistical Mathematics

1. 要　旨

現在までに知られている在庫管理モデルには種々のものがあり，それぞれ異なった条件の下における最適在庫水準の決定法について考察されている．

例えば古くからある経済的ロット・サイズの決定法，two-bin 方式，注文サイクル方式，S-s 方式，数学的計画法によるもの，サーボ機構方式，確率過程 (renewal process) や，queue を用いる方式，線形決定方式などがある．このうち，あるものは決定論的のものであり，あるものは確率論的なものである．

ここではこれらの諸方式の優劣を比較検討するのが目的ではなく，これらの諸方式を利用するに際して発生する種々のパラメータの推定に関し，パラメータの変動（推定誤差）に基づく影響を調べ，どのパラメータに重点をおいて基礎資料をととのえるべきかについての判断基準

* これは昭和 36～38 年度文部省科学研究費総合研究「統計的モデル解析」における研究の一部である．

を得ることを狙っているのである.

需要分布は正規型と，指数型をとり上げたが，これらは理論的計算の便宜のためのもので，実際問題に当っては適当な分布を利用すべきことはいうまでもない.

また在庫を上廻る需要があったときに，罰金費用を考察するが，実際にはこのパラメータの評価が困難だといわれる．ある場合には不足の回数をどの位に抑えるかによって相当する罰金費用を算出することもできるが，恐らくは誤差が大きいものであろう．本論文では，数値計算の比較に当ってはすべてパラメータの推定の相対誤差は1割として取扱ってある．相対誤差を各パラメータごとに変えれば異なった評価が得られるであろうが，ここでは例示上すべて1割とした.

多くの場合需要分布のパラメータの影響が大であったが，また定常状態における S-s 方式のように，罰金費用の影響の大きいものもある．各々の場合については各節でその結果をのべる.

2. One stage の確率論的在庫モデル

Karlin の論文 [1] に従って，$c(\cdot)$, $h(\cdot)$, $p(\cdot)$ をそれぞれ注文費用，在庫維持費用，罰金費用とし，r を単位当り収入，需要量 ξ は既知の密度函数 $\phi(\xi)$ をもつものとする.

初期在庫量を x，注文によって在庫水準が y になったとすると，費用は

$$L(y)=c(y-x)+h(y-\xi)+p(\xi-y)-r\min(\xi, y)$$

ただし，$h(\cdot)$, $p(\cdot)$ は負の変量に対しては 0 となるものとする.

従って平均費用 $G(y)$ は

$$G(y)\equiv c(y-x)+\int_0^y\{h(y-\xi)-r\xi\}\phi(\xi)\,d\xi+\int_y^\infty\{p(\xi-y)-ry\}\phi(\xi)\,d\xi \tag{1}$$

最適在庫水準をきめるには (1) が最小になるように x の函数としての $y=y^*(x)\geqq x$ をきめるとよい.

(1) 式を y について微分して 0 とおいて

$$c'(y-x)+\int_0^y h'(y-\xi)\phi(\xi)\,d\xi-\int_y^\infty\{p'(\xi-y)+r\}\phi(\xi)\,d\xi=0 \tag{2}$$

この (2) 式を満足する y が求める $y^*(x)$ である.

いま $h(y)$, $c(y)$, $p(y)$, $\phi(\xi)$ の微小な変化によって，y が $\varDelta y$ なる変化をうけるものとすると

$$\begin{aligned}c'(y+\varDelta y-x)+\varDelta c'+\int_0^{y+\varDelta y}\{h'(y+\varDelta y-\xi)+\varDelta h'\}\{\phi(\xi)+\varDelta\phi(\xi)\}\,d\xi\\-\int_{y+\varDelta y}^\infty\{p'(\xi-y-\varDelta y)+\varDelta p'+r\}\{\phi(\xi)+\varDelta\phi(\xi)\}\,d\xi=0\end{aligned} \tag{3}$$

これを変形すれば

$$\begin{aligned}G'(y)&+\int_0^y h'(y-\xi)\varDelta\phi\,d\xi-\int_y^\infty\{p'(\xi-y)+r\}\varDelta\phi\,d\xi+\Big[c''(y-x)\\&+(h'(0)+p'(0)+r)(\phi(y)+\varDelta\phi(y))+\int_0^y h''(y-\xi)\phi(\xi)\,d\xi+\int_0^y h''(y-\xi)\varDelta\phi(\xi)\,d\xi\\&+(h''(0)-p''(0))(\phi(y)+\varDelta\phi(y))+\int_y^\infty p''(\xi-y)\phi(\xi)\,d\xi+\int_y^\infty p''(\xi-y)\varDelta\phi(\xi)\,d\xi\\&+\{\varDelta h'(\varDelta y)-\varDelta p'(-\varDelta y)\}\{\phi(y)+\varDelta\phi(y)\}\Big]+\int_0^y\varDelta h'\phi(\xi)\,d\xi+\int_0^y\varDelta h'\varDelta\phi(\xi)\,d\xi\\&-\int_y^\infty\varDelta p'\phi(\xi)\,d\xi-\int_y^\infty\varDelta p'\varDelta\phi(\xi)\,d\xi+\varDelta c'(y+\varDelta y-x)=0\end{aligned} \tag{4}$$

いま

$$c(\cdot)=cz\,,\quad h(\cdot)=hz^2\,,\quad p(\cdot)=pz^2 \tag{I}$$

とおき

$$\phi(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left(-\frac{(\xi-M)^2}{2\sigma^2}\right) \tag{N}$$

なる場合*を考えると

$$\varDelta c'(z)=\varDelta c\,,\quad \varDelta h'(z)=2z\varDelta h\,,\quad \varDelta p'(z)=2z\varDelta p$$

であるから，式 (4) は高次の無限小の項を無視して

$$\begin{aligned}2h\int_0^y(y-\xi)\varDelta\phi(\xi)\,d\xi-\int_y^\infty\{2p(\xi-y)+r\}\varDelta\phi(\xi)\,d\xi\\ +\varDelta y\left\{2h\int_0^y\phi(\xi)\,d\xi+2p\int_y^\infty\phi(\xi)\,d\xi+r\phi(y)\right\}+2\varDelta h\int_0^y(y-\xi)\phi(\xi)\,d\xi\\ -2\varDelta p\int_y^\infty(\xi-y)\phi(\xi)\,d\xi+\varDelta c=0\end{aligned} \tag{I-4}$$

正規分布 $\phi(\xi)$ の変化については，パラメータ M, σ の 2 種類があるから，それぞれ

$$\phi(\xi)+\varDelta\phi(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\xi-M-\varDelta M)^2\right\}\fallingdotseq\phi(\xi)\left(1+\frac{\xi-M}{\sigma^2}\varDelta M\right) \tag{N-1}$$

$$\phi(\xi)+\varDelta\phi(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,(\sigma+\varDelta\sigma)}\exp\left\{-\frac{(\xi-M)^2}{2(\sigma+\varDelta\sigma)^2}\right\}\fallingdotseq\phi(\xi)\left\{1+\frac{(\xi-M)^2-\sigma^2}{\sigma^3}\varDelta\sigma\right\} \tag{N-2}$$

従って (N-1) に対しては (I-4) より $\varDelta M$ の係数は

$$2h\int_0^y(y-\xi)\phi(\xi)\frac{\xi-M}{\sigma^2}\,d\xi-\int_y^\infty\{2p(\xi-y)+r\}\phi(\xi)\frac{\xi-M}{\sigma^2}\,d\xi$$

(N-2) に対しては $\varDelta\sigma$ の係数は

$$2h\int_0^y(y-\xi)\phi(\xi)\frac{(\xi-M)^2-\sigma^2}{\sigma^3}\,d\xi-\int_y^\infty\{2p(\xi-y)+r\}\phi(\xi)\frac{(\xi-M)^2-\sigma^2}{\sigma^3}\,d\xi$$

となる．これは (N-1), (N-2) を同時に考えても同様である．

かくて

$$\varDelta y=\frac{\partial y}{\partial c}\varDelta c+\frac{\partial y}{\partial p}\varDelta p+\frac{\partial y}{\partial h}\varDelta h+\frac{\partial y}{\partial \phi}\varDelta\phi$$

において

$$\begin{aligned}&\left|\frac{\partial y}{\partial c}\right|:\left|\frac{\partial y}{\partial p}\right|:\left|\frac{\partial y}{\partial h}\right|:\left|\frac{\partial y}{\partial M}\right|:\left|\frac{\partial y}{\partial \sigma}\right|\\ &=1:2\int_y^\infty(\xi-y)\phi(\xi)\,d\xi:2\int_0^y(y-\xi)\phi(\xi)\,d\xi:\left[\int_y^\infty\{2p(\xi-y)+r\}\phi(\xi)\frac{\xi-M}{\sigma^2}\,d\xi\right.\\ &\left.\quad-2h\int_0^y(y-\xi)\phi(\xi)\frac{\xi-M}{\sigma^2}\,d\xi\right]:\left[\int_y^\infty\{2p(\xi-y)+r\}\phi(\xi)\frac{(\xi-M)^2-\sigma^2}{\sigma^3}\,d\xi\right.\\ &\left.\quad-2h\int_0^y(y-\xi)\phi(\xi)\frac{(\xi-M)^2-\sigma^2}{\sigma^3}\,d\xi\right]\end{aligned} \tag{I-5}$$

となる．

また需要分布が指数分布 $\phi(\xi)=\lambda e^{-\lambda\xi}$ のときは

$$\phi(\xi)+\varDelta\phi(\xi)=(\lambda+\varDelta\lambda)\,e^{-(\lambda+\varDelta\lambda)\xi}\fallingdotseq(\lambda+(1-\xi\lambda)\varDelta\lambda)\,e^{-\lambda\xi}$$

すなわち

$$\varDelta\phi(\xi)=(1-\xi\lambda)e^{-\lambda\xi}\varDelta\lambda \tag{E}$$

---

* 以下正規分布の場合は ξ の下限は $-\infty$ となるべきだが，実際の問題では $\xi\geqq 0$ の部分に需要量が分布するので下限は 0 と記しておく．

従って (I-4) の $\varDelta\lambda$ の係数 $\partial y/\partial\lambda$ は

$$2h\int_0^y (y-\xi)(1-\xi\lambda)e^{-\lambda\xi}\,d\xi-\int_y^\infty \{2p(\xi-y)+r\}(1-\xi\lambda)e^{-\lambda\xi}\,d\xi \tag{I-6}$$

となる．

次に

$$c(\cdot)=cz,\quad p(\cdot)=pz,\quad h(\cdot)=hz \tag{II}$$

の場合について考えると，(4) 式より高次の無限小を無視して

$$(h+r+p)\phi(y)\varDelta y+\varDelta h\int_0^y \phi(\xi)\,d\xi-\varDelta p\int_y^\infty \phi(\xi)\,d\xi+\varDelta c$$
$$+h\int_0^y \varDelta\phi(\xi)\,d\xi-(p+r)\int_y^\infty \varDelta\phi(\xi)\,d\xi=0 \tag{II-4}$$

ここで (N-1), (N-2), (E) の値を上式の $\varDelta\phi$ に代入して

$$\left|\frac{\partial y}{\partial c}\right|:\left|\frac{\partial y}{\partial p}\right|:\left|\frac{\partial y}{\partial h}\right|:\left|\frac{\partial y}{\partial M}\right|:\left|\frac{\partial y}{\partial \sigma}\right|$$
$$=1:\int_y^\infty \phi(\xi)\,d\xi:\int_0^y \phi(\xi)\,d\xi:\frac{h+p+r}{\sigma^2}\int_0^y \phi(\xi)(\xi-M)\,d\xi$$
$$:\frac{h+p+r}{\sigma^3}\int_0^y \phi(\xi)\{(\xi-M)^2-\sigma^2\}\,d\xi \tag{II-5}$$

また (E) に対しては $\varDelta\lambda$ の係数は

$$h\int_0^y (1-\xi\lambda)e^{-\lambda\xi}\,d\xi-(p+r)\int_y^\infty (1-\xi\lambda)e^{-\lambda\xi}\,d\xi \tag{II-6}$$

となる．

以上の (I), (II) の場合について，若干の数字をあてはめてみると，どのパラメータに基づく y の変化が大きいかが分る．

各パラメータと，需要量の分布が，

$$c=9,\quad h=1,\quad p=7,\quad r=28$$
$$\phi(\xi)=N(50,10^2),\qquad \phi(\xi)=\frac{1}{18}e^{-\xi/18}$$

であって，パラメータの相対的変化はそれぞれ1割であったとすると，数値計算の結果は次のようになる．ここで $(\partial y/\partial c)\varDelta c$ などを $\varDelta y_c$ で表現してある．

		$\phi(\xi)=N(50,10^2)$	$\phi(\xi)=\frac{1}{18}e^{-\xi/18}$
(I)	cz hz^2 pz^2	$\|\varDelta y_M\|:\|\varDelta y_\sigma\|:\|\varDelta y_p\|:\|\varDelta y_h\|:\|\varDelta y_c\|$ $=28.89:4.341:1.987:1.684:0.9$	$\|\varDelta y_\lambda\|:\|\varDelta y_p\|:\|\varDelta y_h\|:\|\varDelta y_c\|$ $=14.27:4.253:3.596:0.9$
(II)	cz hz pz	$\|\varDelta y_M\|:\|\varDelta y_c\|:\|\varDelta y_\sigma\|:\|\varDelta y_p\|:\|\varDelta y_h\|$ $=6.035:0.9:0.712:0.195:0.072$	$\|\varDelta y_c\|:\|\varDelta y_\lambda\|:\|\varDelta y_p\|:\|\varDelta y_h\|$ $=0.9:0.538:0.194:0.072$

同様にして

$$c=9,\quad h=1,\quad p=100,\quad r=10$$

の場合については下表のようになる．

	$\phi(\xi)=N(50, 10^2)$	$\phi(\xi)=\frac{1}{18}e^{-\xi/18}$
(I)	$\lvert\Delta y_M\rvert:\lvert\Delta y_p\rvert:\lvert\Delta y_\sigma\rvert:\lvert\Delta y_h\rvert:\lvert\Delta y_c\rvert$ $=394:242:54.5:1.21:0.9$	$\lvert\Delta y_\lambda\rvert:\lvert\Delta y_p\rvert:\lvert\Delta y_h\rvert:\lvert\Delta y_c\rvert$ $=159:10.2:9.3:0.9$
(II)	$\lvert\Delta y_M\rvert:\lvert\Delta y_\sigma\rvert:\lvert\Delta y_p\rvert:\lvert\Delta y_c\rvert:\lvert\Delta y_h\rvert$ $=9:2.4:0.901:0.9:0.091$	$\lvert\Delta y_\lambda\rvert:\lvert\Delta y_p\rvert:\lvert\Delta y_c\rvert:\lvert\Delta y_h\rvert$ $=4.33:0.901:0.9:0.091$

何れにしても需要分布の密度函数 $\phi(\xi)$ のパラメータの変化に対する y の誤差が大きいので，需要予測をできる限り正確に行なわねばならないことを示している．

次に (1) 式の平均費用の変化について調べてみると，(I)，(N-1) に対しては $G'(y)=0$ を用いて

$$G(y+\Delta y)-G(y)=y\Delta c+\left(\int_0^y (y-\xi)^2\phi(\xi)\,d\xi\right)\Delta h+\left(\int_y^\infty (\xi-y)^2\phi(\xi)\,d\xi\right)\Delta p$$
$$+\left[\int_0^y \{h(y-\xi)^2-r\xi\}\frac{\xi-M}{\sigma^2}\phi(\xi)\,d\xi+\int_y^\infty \{p(\xi-y)^2-ry\}\frac{\xi-M}{\sigma^2}\phi(\xi)\,d\xi\right]\Delta M \qquad (7)$$

(N-2) に対しては式 (7) において $\{(\xi-M)/\sigma^2\}\Delta M$ を $\{((\xi-M)^2-\sigma^2)/\sigma^3\}\Delta\sigma$ におきかえればよい．

(E) に対しては $\{(\xi-M)/\sigma^2\}\Delta M$ を $\{(1-\xi\lambda)/\lambda\}\Delta\lambda$ におきかえればよい．

また (II)，(N-1) に対しては

$$G(y+\Delta y)-G(y)=y\Delta c+\left(\int_0^y (y-\xi)\phi(\xi)\,d\xi\right)\Delta h+\left(\int_y^\infty (\xi-y)\phi(\xi)\,d\xi\right)\Delta p$$
$$+\left[\int_0^y \{h(y-\xi)-r\xi\}\frac{\xi-M}{\sigma^2}\phi(\xi)\,d\xi+\int_y^\infty \{p(\xi-y)-ry\}\frac{\xi-M}{\sigma^2}\phi(\xi)\,d\xi\right]\Delta M \qquad (8)$$

(N-2)，(E) に対しては上と同様のおきかえをして $\Delta\sigma$，$\Delta\lambda$ の係数が求められる．

3. 二種の製品に用いる共通部品の在庫管理モデル

前節では一製品（部品）についての在庫問題を取扱ったが，ここでは互いに独立な二種の製品に用いられる共通部品の在庫モデルを one stage の場合について考えてみよう．記号はすべて前節と同様とし，二種の製品別に部品の需要分布を $\phi_1(\xi_1)$，$\phi_2(\xi_2)$ とする．

このとき平均費用 $G(y)$ は

$$G(y)=c(y-x)+\int_0^y\int_0^{y-\xi_2}\{h(y-\xi_1-\xi_2)-r(\xi_1+\xi_2)\}\phi_1(\xi_1)\phi_2(\xi_2)\,d\xi_1\,d\xi_2$$
$$+\int_0^y\int_{y-\xi_2}^\infty p(\xi_1+\xi_2-y)-ry\}\phi_1(\xi_1)\phi_2(\xi_2)\,d\xi_1\,d\xi_2$$
$$+\int_y^\infty\int_0^\infty\{p(\xi_1+\xi_2-y)-ry\}\phi_1(\xi_1)\phi_2(\xi_2)\,d\xi_1\,d\xi_2 \qquad (1)$$
$$=c(y-x)+\int_0^y\int_v^y\{h(y-u)-ru\}\phi_1(u-v)\phi_2(v)\,du\,dv$$
$$+\int_0^y\int_y^\infty\{p(u-y)-ry\}\phi_1(u-v)\phi_2(v)\,du\,dv$$
$$+\int_y^\infty\int_v^\infty\{p(u-y)-ry\}\phi_1(u-v)\phi_2(v)\,du\,dv \qquad (1)'$$

$G'(y)=0$ より

$$c'(y-x)+\int_0^y\int_v^y h'(y-u)\phi_1(u-v)\phi_2(v)\,du\,dv-\int_0^y\int_y^\infty \{p'(u-y)+r\}\phi_1(u-v)\phi_2(v)\,du\,dv$$
$$-\int_y^\infty\int_v^\infty \{p'(u-v)+r\}\phi_1(u-v)\phi_2(v)\,du\,dv=0 \tag{2}$$

特に $c(\cdot)=cz$, $h(\cdot)=hz$, $p(\cdot)=pz$ なるときは $\int_0^y \phi_1(\xi_1)\,d\xi_1=\Phi_1(y)$ とおいて，(2) 式は

$$\int_0^y \Phi_1(y-\xi_2)\phi_2(\xi_2)\,d\xi_2=\frac{p+r-c}{p+r+h} \tag{3}$$

となる．これより最適在庫水準 y が求められる．

また

$$\phi_i(\xi_i)=N(M_i,\sigma_i^2)\,,\qquad i=1,2$$

に対しては，c, p, h, M_i, σ_i の微小な変化に対して，前と同様に

$$\left|\frac{\partial y}{\partial c}\right|:\left|\frac{\partial y}{\partial p}\right|:\left|\frac{\partial y}{\partial h}\right|:\left|\frac{\partial y}{\partial M_i}\right|:\left|\frac{\partial y}{\partial \sigma_i}\right|$$
$$=1:\left(1-\int_0^y \Phi_1(y-\xi_2)\phi_2(\xi_2)\,d\xi_2\right):\int_0^y \Phi_1(y-\xi_2)\phi_2(\xi_2)\,d\xi_2$$
$$:(p+r+h)\int_0^y \phi_j(\xi_j)\,d\xi_j\int_0^{y-\xi_j}\frac{\xi_i-M_i}{\sigma_i^2}\phi_i(\xi_i)\,d\xi_i$$
$$:(p+r+h)\int_0^y \phi_j(\xi_j)\,d\xi_j\int_0^{y-\xi_j}\frac{(\xi_i-M_i)^2-\sigma_i^2}{\sigma_i}\phi_i(\xi_i)\,d\xi_i\,,\qquad j\neq i \tag{4}$$

が得られる．

同様にして，$c(\cdot)=cz$, $h(\cdot)=hz^2$, $p(\cdot)=pz^2$ のときは，最適在庫水準 y は

$$c+2h\int_0^y \phi_2(\xi_2)\,d\xi_2\int_0^{y-\xi_2}(y-\xi_1-\xi_2)\phi_1(\xi_1)\,d\xi_1$$
$$-\int_0^y \phi_2(\xi_2)\,d\xi_2\int_{y-\xi_2}^\infty\{2p(\xi_1+\xi_2-y)+r\}\phi_1(\xi_1)\,d\xi_1$$
$$-\int_y^\infty \phi_2(\xi_2)\,d\xi_2\int_0^\infty\{2p(\xi_1+\xi_2-y)+r\}\phi_1(\xi_1)\,d\xi_1 \tag{5}$$

より求められる．しかしこの場合は (3) のように y を簡単に求めるわけには行かない．

前と同様に $\phi_i(\xi_i)$ が正規分布であるとき，c, p, h, M_i, σ_i の微小変化に対しては

$$\left|\frac{\partial y}{\partial c}\right|:\left|\frac{\partial y}{\partial p}\right|:\left|\frac{\partial y}{\partial h}\right|:\left|\frac{\partial y}{\partial M_i}\right|:\left|\frac{\partial y}{\partial \sigma_i}\right|$$
$$=1:2\iint_{R^c}(\xi_1+\xi_2-y)\phi_1(\xi_1)\phi_2(\xi_2)\,d\xi_1\,d\xi_2$$
$$:2\iint_R(y-\xi_1-\xi_2)\phi_1(\xi_1)\phi_2(\xi_2)\,d\xi_1\,d\xi_2$$
$$:\left[2h\iint_R(y-\xi_1-\xi_2)\frac{\xi_i-M_i}{\sigma_i^2}\phi_1(\xi_1)\phi_2(\xi_2)\,d\xi_1\,d\xi_2\right.$$
$$\left.-\iint_{R^c}\{2p(\xi_1+\xi_2-y)+r\}\frac{\xi_i-M_i}{\sigma_i^2}\phi_1(\xi_1)\phi_2(\xi_2)\,d\xi_1\,d\xi_2\right]$$
$$:\left[2h\iint_R(y-\xi_1-\xi_2)\frac{(\xi_i-M_i)^2-\sigma_i^2}{\sigma_i^3}\phi_1(\xi_1)\phi_2(\xi_2)\,d\xi_1\,d\xi_2\right.$$
$$\left.-\iint_{R^c}\{2p(\xi_1+\xi_2-y)+r\}\frac{(\xi_i-M_i)^2-\sigma_i^2}{\sigma_i^3}\phi_1(\xi_1)\phi_2(\xi_2)\,d\xi_1\,d\xi_2\right] \tag{6}$$

が得られる．

ここで

$$\iint_R d\xi_1\,d\xi_2=\int_0^y d\xi_2\int_0^{y-\xi_2}d\xi_1$$

$$\iint_{R^c} d\xi_1\,d\xi_2=\int_0^y d\xi_2\int_{y-\xi_2}^{\infty}d\xi_1+\int_y^{\infty}d\xi_2\int_0^{\infty}d\xi_1$$

を示す.

4. 定常状態における在庫モデル

前と同様に在庫維持費を $h(\cdot)=hz$, 罰金費用を $p(\cdot)=pz$, 注文費用を $c(\cdot)=cz+K(z)$, ただし

$$K(z)=\begin{cases}K, & z>0\\ 0, & z=0\end{cases}$$

需要の分布函数を $\phi(\xi)$ とおくとき, (s,S) 政策が最適であることが分っている. このとき在庫量 x の定常状態における確率密度函数を $f(x)$ とおくと, 需要が在庫量をこえるときは負の在庫量として漸次満たされるとして

$$f(x)=\phi(S-x)\int_{-\infty}^{s}f(t)\,dt+\int_x^S\phi(t-x)f(t)\,dt\,,\qquad s<x<S \tag{1}$$

$$f(x)=\phi(S-x)\int_{-\infty}^{s}f(t)\,dt+\int_s^S\phi(t-x)f(t)\,dt\,,\qquad x\leqq s \tag{2}$$

が成立つことが知られている [1].

特に $\phi(\xi)=\lambda e^{-\lambda\xi}$ のときは, (1), (2) より

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda}{1+\lambda(S-s)}\,, & s<x<S\\[2mm] \dfrac{\lambda}{1+\lambda(S-s)}e^{-\lambda(s-x)}, & x<s\end{cases} \tag{3}$$

が成立つ.

従って (s,S) 政策をとる場合の定常的な状態における費用 $L(S,s)$ は

$$\begin{aligned}L(S,s)&=\int_{-\infty}^{s}\{K+c(S-x)\}f(x)\,dx+\int_{-\infty}^{s}f(x)\,dx\int_0^S h(S-\xi)\phi(\xi)\,d\xi\\&\quad+\int_s^S f(x)\,dx\int_0^x h(x-\xi)\,\phi(\xi)\,d\xi+\int_s^S f(x)\,dx\int_x^{\infty}p(\xi-x)\phi(\xi)\,d\xi\\&\quad+\int_{-\infty}^{s}f(x)\,dx\int_S^{\infty}p(\xi-S)\phi(\xi)\,d\xi\\&=\frac{c}{\lambda}+\frac{K}{1+\lambda(S-s)}+\frac{h}{1+\lambda(S-s)}\left\{S-1-\lambda(S-s)+\frac{\lambda}{2}(S^2-s^2)\right\}+\frac{(h+p)e^{-\lambda s}}{1+\lambda(S-s)}\end{aligned} \tag{4}$$

ここで $w=S-s$ とおき, (4) 式を w,s の函数と考えて $L(S,s)\equiv L_1(w,s)$ を最小にするような $w,\ s$ を求めると

$$\frac{\partial L_1}{\partial w}=0 \qquad より \qquad w=\sqrt{\frac{2K}{h\lambda}} \tag{5}$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial s}=0 \qquad より \qquad e^{-\lambda s}=\frac{h(1+\lambda w)}{\lambda(h+p)} \tag{6}$$

が得られる.

この (5), (6) 式より $s,\ w$, 従って S が求められるが, $h,\ \lambda,\ p,\ K$ の微小変化に対する s, S の変化をみると

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial s}{\partial h}&=\left(\lambda e^{-\lambda s}-\frac{\lambda w}{2}-1\right)\Big/u\\
\frac{\partial s}{\partial \lambda}&=\left((1-\lambda s)(h+p)e^{-\lambda s}-\frac{hw}{2}\right)\Big/u\\
\frac{\partial s}{\partial p}&=\lambda e^{-\lambda s}/u\\
\frac{\partial s}{\partial K}&=-1/wu
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

および

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial S}{\partial h}&=\frac{\partial s}{\partial h}-\frac{w}{2h}\\
\frac{\partial S}{\partial \lambda}&=\frac{\partial s}{\partial \lambda}-\frac{w}{2\lambda}\\
\frac{\partial S}{\partial p}&=\frac{\partial s}{\partial p}\\
\frac{\partial S}{\partial K}&=\frac{\partial s}{\partial K}+\frac{1}{\lambda hw}
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

ただし

$$u=\lambda^2(h+p)e^{-\lambda s} \tag{9}$$

なることが示される．

そこで例えば $h=1$, $p=100$, $\lambda=1/18$, $K=30$ とおいてみると，

$$w=32.9\,,\qquad s=12.4\,,\qquad S=45.3$$

となり，h, p, λ, K に対する相対誤差が何れも1割であるとすると

$$|\Delta s_p|>|\Delta s_h|>|\Delta s_K|>|\Delta s_\lambda|$$

(1.79>1.2>0.58>0.02, 上に対応する数値)

および

$$|\Delta S_h|>|\Delta S_p|>|\Delta S_\lambda|>|\Delta S_K|$$

$(2.84>1.79<1.66>1.06)$

なることが計算される．

このモデルでは下の限界水準（発注在庫水準）s に対しては罰金費用が一番大きく響き，次いで在庫維持費用が影響をもち，上の在庫水準 S に対しては在庫維持費用，次いで罰金費用が影響をもつ．需要分布のパラメータ λ の影響が少ないのは，負の在庫量が認められているため，いつかは需要が満たされることに原因するからであろう．また (5), (6) から見られる如く，発注費のうち比例費 c の影響は全く受けない．

次に需要量はそのときの在庫量からまかなわれ，負の在庫量を認めないときは，(3) に該当する式は

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda}{1+\lambda(S-s)}\,, & s<x<S\\[2mm] \dfrac{\lambda}{1+\lambda(S-s)}\,e^{-\lambda(s-x)}\,, & 0<x<s\\[2mm] \dfrac{1}{1+\lambda(S-s)}\,e^{-\lambda s}\,, & x=0\end{cases} \tag{10}$$

となる．

このとき

$$w \equiv S-s=\sqrt{\frac{2\{\lambda K+h(1-e^{-\lambda s}-\lambda s)\}}{\lambda^2 h}} \tag{11}$$

$$ce^{-\lambda s}+hw\lambda+\lambda hs\,e^{-\lambda s}=pe^{-\lambda s} \tag{12}$$

を満足するように s, w, 従って S をきめればよい.

前と同様にパラメータの微小変化に対して (11), (12) 式の微分を考え，Δs, または Δw を消去して次の関係式が得られる：

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial s}{\partial \lambda}&=\left\{\frac{K+hs(e^{-\lambda s}-1)}{\lambda w}+s\,e^{-\lambda s}(p-c+h-\lambda hs)\right\}\Big/U\\
\frac{\partial s}{\partial K}&=1/wU\\
\frac{\partial s}{\partial h}&=\left(\frac{1-e^{-\lambda s}-\lambda s}{\lambda w}+\frac{\lambda w}{2}+\lambda s\,e^{-\lambda s}\right)\Big/U\\
\frac{\partial s}{\partial c}&=e^{-\lambda s}/U\\
\frac{\partial s}{\partial p}&=-e^{-\lambda s}/U\\
\text{ただし}\quad U&=h(1-e^{-\lambda s})/w-\lambda\,e^{-\lambda s}(p-c+h-\lambda hs)
\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial \lambda}&=\left\{\frac{e^{-\lambda s}(p-c+h-\lambda hs)(K+hs(e^{-\lambda s}-1)-\lambda hw^2)}{h(1-e^{-\lambda s})}+hw\right.\\
&\qquad\left.+s\,e^{-\lambda s}(p-c+h-\lambda hs)\right\}\Big/V\\
\frac{\partial w}{\partial K}&=\frac{\lambda e^{-\lambda s}(p-c+h-\lambda hs)}{h(1-e^{-\lambda s})}\Big/V\\
\frac{\partial w}{\partial h}&=\left\{\frac{e^{-\lambda}(p-c+h-\lambda hs)(1-e^{-\lambda s}-\lambda s-(\lambda^2w^2/2))}{h(1-e^{-\lambda s})}+\lambda w+\lambda s\,e^{-\lambda s}\right\}\Big/V\\
\frac{\partial w}{\partial c}&=e^{-\lambda s}/V\\
\frac{\partial w}{\partial p}&=-e^{-\lambda s}/V\\
\text{ただし}\quad V&=\frac{\lambda^2 w\,e^{-\lambda s}(p-c+h-\lambda hs)}{1-e^{-\lambda s}}-\lambda h
\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

が得られる.

$\dfrac{\partial S}{\partial \lambda}$, $\dfrac{\partial S}{\partial K}$, $\cdots$ はそれぞれ $\dfrac{\partial s}{\partial \lambda}+\dfrac{\partial w}{\partial \lambda}$, $\dfrac{\partial s}{\partial K}+\dfrac{\partial w}{\partial K}$, $\cdots$ によって求めることができる.

例えば $c=9$, $h=1$, $p=15$, $K=30$, $\lambda=1/18$ とおく. (11), (12) より w を消去して

$$e^{-2\lambda s}(p-c-\lambda hs)^2=2h\{\lambda K+h(1-e^{-\lambda s}-\lambda s)\} \tag{15}$$

より s が求められるから，これより s, w を求めると

$$s=20.5\,,\qquad w=28.0\,,\qquad S=48.5$$

従って (13), (14) より $\partial s/\partial \lambda$ などが計算され，c, h, $\cdots$ などのパラメータの相対誤差が1割であるとき

$$|\Delta s_p|>|\Delta s_c|>|\Delta s_\lambda|>|\Delta s_h|>|\Delta s_K|$$
$$(6.01>3.61>1.96>1.16>1.07)$$

および

$$|\Delta S_p|>|\Delta S_h|>|\Delta S_c|>|\Delta S_\lambda|>|\Delta S_K|$$
$$(3.37>2.64>2.02>1.66>1.44)$$

が得られる.

これによってみると，限界在庫水準，発注水準ともに罰金費用に影響されることが大で，s では注文費用の中の比例費，S では在庫維持費用がこれに次いでおり，需要分布のパラメータ λ による影響はそれ以下となっている.

5. DP 方式による在庫管理モデル

まず Bellman による DP 方式について，無限期間における最適在庫水準を求める場合を考えてみよう [3].

注文費用は $c(\cdot)=cz$ とし，罰金費用は $p(\cdot)=pz+q$，需要量の分布函数を $\phi(\xi)$ とし，初期在庫量 x から出発し，最適注文政策をとったときの期待総費用を $f(x)$，割引率を α とおくと，

$$f(x)=\min_{y\geq x}\left[c(y-x)+\alpha\left\{\int_y^\infty (p(\xi-y)+q)\phi(\xi)\,d\xi+f(0)\int_y^\infty \phi(\xi)\,d\xi + \int_0^y f(y-\xi)\phi(\xi)\,d\xi\right\}\right] \tag{1}$$

を満足する x の函数 y が最適在庫水準となる.

(1) を y について微分して

$$\begin{aligned}G(y)&\equiv c-\alpha\left[p\int_y^\infty \phi(\xi)\,d\xi+q\phi(y)+c\int_0^y \phi(\xi)\,d\xi\right]\\ &=c(1-\alpha)-\alpha q\phi(y)-\alpha(p-c)\int_y^\infty \phi(\xi)\,d\xi=0\end{aligned} \tag{2}$$

(2) 式を解いて最適解 $y=y^*(x)$ が定まる.

上式において c, p, q, α および $\phi(\xi)$ のパラメータの微小変化を考えるときは

$$\begin{aligned}&\left(p\int_y^\infty \phi(\xi)\,d\xi+q\,\phi(y)+c\int_0^y \phi(\xi)\,d\xi\right)\Delta\alpha+\alpha\int_y^\infty \phi(\xi)\,d\xi\cdot\Delta p\\ &+\alpha\phi(y)\Delta q+\left(\alpha\int_0^y \phi(\xi)\,d\xi-1\right)\Delta c+\alpha\{q\phi'(y)-p\phi(y)\}\Delta y\\ &+\alpha p\int_y^\infty \Delta\phi(\xi)\,d\xi+\alpha q\Delta\phi(y)+\alpha c\int_0^y \Delta\phi(\xi)\,d\xi=0\end{aligned} \tag{3}$$

これより

$$\begin{aligned}&\left|\frac{\partial y}{\partial p}\right|:\left|\frac{\partial y}{\partial q}\right|:\left|\frac{\partial y}{\partial c}\right|:\left|\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right|:\left|\frac{\partial y}{\partial \phi}\right|\\ &=\alpha\int_y^\infty \phi(\xi)\,d\xi:\alpha\phi(y):\left(\alpha\int_0^y \phi(\xi)\,d\xi-1\right):c/\alpha:\alpha\left(p\int_y^\infty \Delta\phi(\xi)\,d\xi\right.\\ &\qquad\left.+c\int_0^\infty \Delta\phi(\xi)\,d\xi+q\Delta\phi(y)\right)\end{aligned} \tag{4}$$

が得られる.

また (1) 式において，パラメータ p のみの変化があるとして最適解 y を代入すれば

$$\begin{aligned}f_p(x)&=c(y-x)+\alpha\left\{p\int_0^\infty (\xi-y)\phi(\xi)\,d\xi+f_p(0)\int_y^\infty \phi(\xi)\,d\xi+\int_0^y f_p(y-\xi)\phi(\xi)\,d\xi\right.\\ &\qquad\left.+q\int_y^\infty \phi(\xi)\,d\xi\right\}\\ &=c(y-x)+\alpha\left\{p\int_y^\infty (\xi-y)\phi(\xi)\,d\xi+f_p(0)-c\int_0^y (y-\xi)\phi(\xi)\,d\xi+q\int_y^\infty \phi(\xi)\,d\xi\right\}\end{aligned} \tag{5}$$

上式より $x=0$ のとき

$$f_p(0)=\frac{1}{1-\alpha}\left[cy+\alpha\left\{p\int_y^\infty(\xi-y)\phi(\xi)\,d\xi-c\int_0^y(y-\xi)\phi(\xi)\,d\xi+q\int_y^\infty\phi(\xi)\,d\xi\right\}\right] \quad (6)$$

それゆえに

$$\begin{aligned}(1-\alpha)\{f_{p+\Delta p}(x)-f_p(x)\}&=(1-\alpha)\{f_{p+\Delta p}(0)-f_p(0)\}\\ &\fallingdotseq\left(\alpha\int_y^\infty(\xi-y)\phi(\xi)\,d\xi\right)\Delta p-\alpha\left(p\int_y^\infty\phi(\xi)\,d\xi+c\int_0^y\phi(\xi)\,d\xi+q\phi(y)-c\right)\Delta y\\ &=\left(\alpha\int_y^\infty(\xi-y)\phi(\xi)\,d\xi\right)\Delta p \qquad ((2)\text{ による})\end{aligned}$$

$$\therefore\quad f_{p+\Delta p}(x)-f_p(x)=\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\int_y^\infty(\xi-y)\phi(\xi)\,d\xi\right)\Delta p \quad (7)$$

同様に q の変化を考えるときは

$$\begin{aligned}(1-\alpha)\{f_{q+\Delta q}(x)-f_q(x)\}&=\left(c-\alpha p\int_y^\infty\phi(\xi)\,d\xi-\alpha c\int_0^y\phi(\xi)\,d\xi-\alpha q\phi(y)\right)\Delta y\\ &\quad+\left(\alpha\int_y^\infty\phi(\xi)\,d\xi\right)\Delta q\end{aligned}$$

$$\therefore\quad f_{q+\Delta q}(x)-f_q(x)=\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\int_y^\infty\phi(\xi)\,d\xi\right)\Delta q \quad (8)$$

同様に

$$f_{\alpha+\Delta\alpha}(x)-f_\alpha(x)=\frac{\Delta\alpha}{1-\alpha}\left(p\int_y^\infty(\xi-y)\phi(\xi)\,d\xi-c\int_0^y(y-\xi)\,\phi(\xi)\,d\xi+q\int_y^\infty\phi(\xi)\,d\xi\right) \quad (9)$$

が得られる.

次に Karlin による DP 型の在庫モデルを考える. Bellman のときと異なるのは, 割引率を考えるのが少しずれている点と, 在庫維持費を考慮する点である.

記号は前と同様とし, 初期在庫量を x とし, 最適在庫方式をとったときの無限期間における最小期待損失を $f(x)$ とすると

$$\begin{aligned}f(x)=\min_{y\geq x}\Bigg[&c(y-x)+\int_0^y\{h(y-\xi)-r\xi\}\phi(\xi)\,d\xi+\int_y^\infty\{p(\xi-y)-ry\}\phi(\xi)\,d\xi\\ &+\alpha f(0)\int_y^\infty\phi(\xi)\,d\xi+\alpha\int_0^y f(y-\xi)\,\phi(\xi)\,d\xi\Bigg]\end{aligned} \quad (10)$$

となる.

(10) を y で微分して 0 とおき

$$c'(y-x)+\int_0^y\{h'(y-\xi)+\alpha f'(y-\xi)\}\,\phi(\xi)\,d\xi-\int_y^\infty\{p'(\xi-y)+r\}\,\phi(\xi)\,d\xi=0 \quad (11)$$

特に $c(\cdot)=cz$, $h(\cdot)=hz$, $p(\cdot)=pz$ なるときは, (11) 式は

$$(c-p-r)+(h+p+r-\alpha c)\int_0^y\phi(\xi)\,d\xi=0 \quad (12)$$

これより

$$\int_0^y\phi(\xi)\,d\xi=\frac{p+r-c}{p+r+h-\alpha c} \quad (13)$$

を解いて, 最適在庫水準 y が定まる.

(13) 式で $\alpha=0$ とおいたものが, one stage のときの最適在庫水準を求める式になっている.

$\phi(\xi)$ が正規分布のとき (13) より $p, h, c, \alpha, M, \sigma$ の微小変化に対する y の変化を求めて

$$\left|\frac{\partial y}{\partial c}\right| : \left|\frac{\partial y}{\partial p}\right| : \left|\frac{\partial y}{\partial h}\right| : \left|\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right| : \left|\frac{\partial y}{\partial M}\right| : \left|\frac{\partial y}{\partial \sigma}\right|$$
$$=\left(1-\alpha\int_0^y \phi(\xi)\,d\xi\right) : \int_y^\infty \phi(\xi)\,d\xi : \int_0^y \phi(\xi)\,d\xi : c\int_0^y \phi(\xi)\,d\xi$$
$$: (p+r+h-\alpha c)\int_0^y \phi(\xi)\frac{\xi-M}{\sigma^2}\,d\xi : (p+r+h-\alpha c)\int_0^y \phi(\xi)\frac{(\xi-M)^2-\sigma^2}{\sigma^3}\,d\xi \tag{14}$$

6. LP 方式による在庫管理モデル

LP を用いる在庫管理法では需要量が毎期既知として取扱われる．従ってわれわれの場合のように需要量の分布は分っていても，確率的な変動をもつ場合を考察するのには不適当なモデルであろう．直接的には stochastic LP として取扱わねばならない不便がある．

ここでは LP モデルから前述の Karlin モデルへの変形を通じてその様相を眺めてみよう．

注文費 c，在庫維持費 h，罰金費用 p，収入 r（すべて単位当り）とし，第 t 期末の在庫量を I_t，第 t 期の需要量を ξ_t，最適在庫水準を y_tとおくと，n 期間における全費用は

$$L_1=c\sum_{t=1}^n(y_t-I_{t-1})+\sum_{t=1}^n\left(t\,\frac{I_{t-1}+I_t}{2}-r\,\xi_t\right) \tag{1}$$
$$\text{for}\quad I_0+\sum_{t=1}^l y_t \geqq \sum_{t=1}^l \xi_t\,, \qquad l=1,2,\cdots,n$$
$$L_2=c\sum_{t=1}^n y_t+\sum_{t=1}^n\{p(\xi_t-y_t)-ry\} \tag{2}$$
$$\text{for}\quad I_0+\sum_{t=1}^l y_t \leqq \sum_{t=1}^l \xi_t\,, \qquad l=1,2,\cdots,n$$

の何れかを確率的にとるものと考えられる．

$$I_t=y_t-\xi_t \tag{3}$$

を用いて L_1 を書き変えると

$$L_1=c\sum_{t=1}^n(y_t-y_{t-1}+\xi_{t-1})+\sum_{t=1}^n\left\{\frac{h}{2}(y_{t-1}+y_t)-\frac{h}{2}(\xi_{t-1}+\xi_t)-r\xi_t\right\}$$

ただし

$$y_0=\xi_0=0 \tag{4}$$

ここで

$$P_r\{y_t\geqq\xi_t\}=1-\alpha\,,\qquad t=1,2,\cdots,n \tag{5}$$

となるように y_t をきめる，換言すれば

$$y_t=M_t+k\sigma \tag{6}$$

とする．M_t は第 t 期における需要分布の平均，σ は標準偏差（毎期同じと仮定）で，k は α に対応する値である．

ξ_t のままでは LP 方式で解けないから平均値を考える．

$$E(L_1)=c\sum_{t=2}^n(y_t-y_{t-1}+M_{t-1,1})+\frac{h}{2}\sum_{t=2}^n(y_{t-1}+y_t-M_{t-1,1}-M_{t,1})$$
$$-r\sum_{t=1}^n M_{t,1}+cy_1+\frac{h}{2}(y_1-M_{1,1}) \tag{7}$$

ここで

$$\phi_t(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\xi-M_t)^2\right\}\,,\qquad \varphi(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}$$

とすれば*

$$M_{t,1}=\frac{1}{1-\alpha}\int_{-\infty}^{M_t+k\sigma}\xi\phi_t(\xi)\,d\xi=\frac{1}{1-\alpha}\int_{-\infty}^{k}(M_t+u\sigma)\varphi(u)\,du$$

$$=\frac{1}{1-\alpha}\left\{M_t(1-\alpha)+\sigma\int_{-\infty}^{k}u\varphi(u)\,du\right\}=M_t-\frac{\sigma\varphi(k)}{1-\alpha} \tag{8}$$

(8) 式を用いると (7) 式は

$$E(L_1)=\left(c+\frac{h}{2}\right)\sum_{t=1}^{n}y_t+\left(\frac{h}{2}-c\right)\sum_{t=2}^{n}y_{t-1}+c\sum_{t=2}^{n}\left\{M_{t-1}-\frac{\sigma\varphi(k)}{1-\alpha}\right\}$$

$$-\frac{h}{2}\sum_{t=2}^{n}\left\{M_t-\frac{\sigma\varphi(k)}{1-\alpha}\right\}-\frac{h}{2}\sum_{t=2}^{n}\left\{M_{t-1}-\frac{\sigma\varphi(k)}{1-\alpha}\right\}-r\sum_{t=1}^{n}\left\{M_t-\frac{\sigma\varphi(k)}{1-\alpha}\right\}$$

$$-\frac{h}{2}\left\{M_1-\frac{\sigma\varphi(k)}{1-\alpha}\right\}$$

$$=\left(c+\frac{h}{2}\right)y_n+h\sum_{t=1}^{n-1}y_t+\frac{\sigma\varphi(k)}{1-\alpha}\left(rn-(n-1)c+h\left(n-\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$+c\sum_{t=2}^{n}M_{t-1}-\frac{h}{2}\sum_{t=2}^{n}(M_t+M_{t-1})-\frac{h}{2}M_1-r\sum_{t=1}^{n}M_t \tag{7$'$}$$

同様にして

$$E(L_2)=c\sum_{t=1}^{n}y_t+\sum_{t=1}^{n}\{p(M_{t,2}-y_t)-ry_t\}$$

$$=(c-p-r)\sum_{t=1}^{n}y_t+\frac{\sigma\varphi(k)}{\alpha}pn+p\sum_{t=1}^{n}M_t \tag{9}$$

ここで

$$M_{t,2}=\frac{1}{\alpha}\int_{M_t+k\sigma}^{\infty}\xi\phi_t(\xi)\,d\xi=M_t+\frac{\sigma\varphi(k)}{\alpha} \tag{10}$$

従って

$$F(\alpha)\equiv(1-\alpha)E(L_1)+\alpha E(L_2)$$

$$=(1-\alpha)\left(c+\frac{h}{2}\right)y_n+(1-\alpha)h\sum_{t=1}^{n-1}y_t+\alpha(c-p-r)\sum_{t=1}^{n}y_t$$

$$+\sigma\varphi(k)\left\{rn-(n-1)c+h\left(n-\frac{1}{2}\right)+pn\right\}+(1-\alpha)\left\{c\sum_{t=2}^{n}M_{t-1}\right.$$

$$\left.-\frac{h}{2}\sum_{t=1}^{n}M_t-r\sum_{t=1}^{n}M_t\right\}+\alpha p\sum_{t=1}^{n}M_t \tag{11}$$

上式において $y_t=M_t+k\sigma$ とおき，$F(\alpha)$ を最小になるように α を求めると，$F'(\alpha)=0$ より $dk/d\alpha=-1/\varphi(k)$ なることに注意して

$$1-\alpha=\frac{p+r-c}{p+r+h-c+(c-(h/2))n} \tag{12}$$

が得られる.

一方また

$$\int_{-\infty}^{M_t+k\sigma}\phi_t(\xi)\,d\xi=1-\alpha$$

であるから，もし M_t が t の如何に拘わらず，一定の M であるとおける場合は

$$\int_{-\infty}^{M+k\sigma}\phi(\xi)\,d\xi=\frac{p+r-c}{p+r+h-c+(c-(h/2))n} \tag{13}$$

---

* 本節では ξ の下限を $-\infty$ と記したが，前述までの議論同様に実際上は下限を 0 と考えても差支えない.

が得られ，$y=M+k\sigma$ が最適在庫水準を表わすことになる．

この結果は $n=1$ とおくと，分母の h が $h/2$ となるだけで one stage の Karlin モデルの結果と一致する．この食い違いの理由は第 t 期間内の平均在庫量を I_{t-1}, I_t の平均を用いて表わしたためである．

7. 一次決定方式による在庫管理モデル

ここでは Holt, Modigliani, Muth および Simon 等による一次決定方式 [2] について考察してみよう．いま [2] に従って

P_t： 第 t 期の生産量
I_t： 第 t 期末の在庫量
W_t： 第 t 期の労働量
S_t： 第 t 期の販売量
c_2： 労働量水準の変化による費用
c_3： 残業賃銀による費用
c_7： 在庫および受注残による費用
c_8： 定数（在庫水準に関係する）

とおくとき，T 期間の全費用は

$$C=\sum_{t=1}^{T}[c_2(W_t-W_{t-1})^2+c_3(P_t-W_t)^2+c_7(I_t-c_8)^2] \qquad (1)$$

ただし

$$I_t=I_{t-1}+P_t-S_t$$

この費用 C を最小にするような労働力 W_t を求めるには

$$GW_{t+2}-(4G+H)W_{t+1}+(6G+2H+1)W_t-(4G+H)W_{t-1}+GW_{t-2}=S_t \qquad (2)$$

ただし

$$G=c_2/c_7, \qquad H=c_2/c_3$$

を満足するようなを W_t を求めればよい．

また，このときの最適生産量は

$$P_t=-HW_{t+1}+(2H+1)W_t-HW_{t-1} \qquad (3)$$

によって与えられる．

以下 W_t についてのみ考察する．

(2) 式の定差方程式を解いて W_t が求められるが，S_t の形が分らないと特別解が求められない．Holt 等は $S_t=S\sin at$ のごとき周期函数について種々検討を行なっている．

この場合は $A=2\sin a/2$ とおくと

$$W_t=\frac{S_t}{1+HA^2+GA^4} \qquad (4)$$

が特別解として得られ，一般解はこれに

$$\alpha_1\lambda_1{}^t+\alpha_2\lambda_2{}^t+\alpha_3\lambda_3{}^t+\alpha_4\lambda_4{}^t \qquad (5)$$

（λ_i は (2) の随伴方程式の根，簡単のためにすべて異なる実根とする）

を加えたものであるが，t が大きい所では主として (4) によって変動が生じるものと考えられる．

そこで G, H, S, a について微小な誤差があるとき

$$\delta W_t=\frac{1}{(1+HA^2+GA^4)^2}\Big[\delta S\cdot\sin at(1+HA^2+GA^4)$$

$$+2S(1+HA^2+GA^4)\cos\left(a+\frac{\delta a}{2}\right)t\sin\left(\frac{t\delta a}{2}\right)$$
$$-S_t\left\{A^2\delta H+A^4\delta G+2A(H+2GA^2)\cos\frac{a}{2}\delta a\right\}\Bigg] \qquad (6)$$

これより

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial W_t}{\partial S}&=\frac{\sin at}{1+HA^2+GA^4}\\
\frac{\partial W_t}{\partial a}&=\frac{2S\cos(a+(\delta a/2))t\cdot\sin(t\delta a/2)}{1+HA^2+GA^4}-\frac{2SA(H+2GA^2)\sin at\cos(a/2)}{(1+HA^2+GA^4)^2}\\
\frac{\partial W_t}{\partial G}&=-\frac{A^4S\sin at}{(1+HA^2+GA^4)^2}\\
\frac{\partial W_t}{\partial H}&=-\frac{A^2S\sin at}{(1+HA^2+GA^4)^2}
\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

[2] の例での
$$\left.\begin{aligned}&\text{case 1:}\quad G=24,\quad H=10\\ &\text{case 2:}\quad G=240,\quad H=100\end{aligned}\right\}$$
の場合に対して，$A=2\sin(a/2)=2$，すなわち $\sin(a/2)=1$，$\cos(a/2)=0$ とすると

$$\left|\frac{\partial W_t}{\partial S}\delta S\right|:\left|\frac{\partial W_t}{\partial a}\delta a\right|:\left|\frac{\partial W_t}{\partial G}\right|\delta G:\left|\frac{\partial W_t}{\partial H}\delta H\right|$$
$$=\begin{cases}425|\delta S|:850S:16S|\delta G|:4S|\delta H| & \text{for case 1.}\\ 4241|\delta S|:8482S:16S|\delta G|:4S|\delta H| & \text{for case 2.}\end{cases}$$

$S=100$，相対誤差はすべて 1 割とおいてみると

$$\left|\frac{\partial W_t}{\partial a}\delta a\right|>\left|\frac{\partial W_t}{\partial S}\delta S\right|>\left|\frac{\partial W_t}{\partial G}\delta G\right|>\left|\frac{\partial W_s}{\partial H}\delta H\right|$$

なることが分る．この場合も販売量（需要量）の変動が一番大きくひびく．

S_t が一般の函数のときは $\delta W_t=U_t$ とおくと (2) 式より

$$\begin{aligned}&GU_{t+2}-(4G+H)U_{t+1}+(6G+2H+1)U_t-(4G+H)U_{t-1}+GU_{t-2}\\ &=\delta S_t-\{W_{t+2}\delta G-(4\delta G+\delta H)W_{t+1}+2(3\delta G+\delta H)W_t\\ &\quad-(4\delta G+\delta H)W_{t-1}+W_{t-2}\delta G\}\equiv\varepsilon(t)\end{aligned} \qquad (2)'$$

これを U_t について解いて δS_t, δG, δH の影響を求める．そこで

$$U_t=\sum_{i=1}^{4}k_iu_i(t) \qquad (8)$$

ただし

$$u_i(t+1)-\lambda_iu_i(t)=\varepsilon(t) \qquad (9)$$

とおくとき，(2)′ を満足するように k_i をきめるには

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{4}k_i/\lambda_i=0\\ &\sum_{i=1}^{4}k_i/\lambda_i^2=0\\ &\sum_{i=1}^{4}k_i\lambda_i=1/G\\ &\sum_{i=1}^{4}k_i=0\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

を満足するようにえらべばよい．ただし λ_i は

$$G\lambda^4-(4G+H)\lambda^3+(6G+2H+1)\lambda^2-(4G+H)\lambda+G=0$$

の 4 根である．

このとき λ_i がすべて相異なる実根となれば，任意の定数 a_i を用いて

$$u_i(t)=a_i\lambda_i{}^t+\lambda_i{}^{t-1}\Delta^{-1}\frac{\varepsilon(t)}{\lambda_i{}^t} \tag{11}$$

$$=a_i\lambda_i{}^t+\lambda_i{}^{t-1}\sum_{v=2}^{t-1}\varepsilon(v)/\lambda_i{}^v \tag{11$'$}$$

ただし

$$\Delta f(t)\equiv f(t+1)-f(t)=g(t)$$

を満足する $f(t)$ を $f(t)=\Delta^{-1}g(t)$ で表わした．

かくて一般に (10) を満足する k_i と，任意の定数 A_i を用いて

$$U_t=\sum_{i=1}^{4}A_i\lambda_i{}^t+\sum_{i=1}^{4}k_i\lambda_i{}^{t-1}\sum_{v=2}^{t-1}\varepsilon(v)/\lambda_i{}^v \tag{12}$$

なることが分る．

t が大きくなると一般には第 2 項が主項となるので，これについて調べてみると

$$\sum_{v=0}^{t-1}\frac{\varepsilon(v)}{\lambda_i{}^v}=\sum_{v=2}^{t-1}\frac{\delta S_v}{\lambda_i{}^v}+\delta G\sum_{v=2}^{t-1}(-W_{v+2}+4W_{v+1}-6W_v+4W_{v-1}-W_{v-2})/\lambda_i{}^v$$
$$+\delta H\sum_{v=2}^{t-1}(W_{v+1}-2W_v+W_{v-1})/\lambda_i{}^v$$

従って

$$U_t=\delta W_t\fallingdotseq\sum_{i=1}^{4}k_i\lambda_i{}^{t-1}\left\{\sum_{v=2}^{t-1}\frac{\delta S_v}{\lambda_i{}^v}+\delta G\sum_{v=2}^{t-1}(-W_{v+2}+4W_{v+1}\right.$$
$$\left.-6W_v+4W_{v-1}-W_{v-2})/\lambda_i{}^v+\delta H\sum_{v=2}^{t-1}(W_{v+1}-2W_v+W_{v-1})/\lambda_i{}^v\right\} \tag{13}$$

特に $\delta S_0=\delta S_1=\cdots=\delta S_{t-1}\equiv\delta S$ とおける場合は

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial W_t}{\partial S}&=\sum_{i=1}^{4}k_i\lambda_i{}^{t-3}\left(1+\frac{1}{\lambda_i}+\cdots+\frac{1}{\lambda_i{}^{t-3}}\right)=\sum_{i=1}^{4}k_i\lambda_i{}^{t-3}\left(1+\frac{1}{\lambda_i}+\cdots+\frac{1}{\lambda_i{}^{t-5}}\right)+1/G\\
\frac{\partial W_t}{\partial G}&=-\sum_{i=1}^{4}k_i\lambda_i{}^{t-1}\sum_{v=2}^{t-1}\Delta^4W_{v-2}/\lambda_i{}^v\\
\frac{\partial W_t}{\partial H}&=\sum_{i=1}^{4}k_i\lambda_i{}^{t-1}\sum_{v=2}^{t-1}\Delta^2W_{v-1}
\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

が得られる．

統計数理研究所

参 考 文 献

[1] Arrow, K. J., Karlin, S., Scarf, H.: Studies in the Mathematical Theory of Inventory and Production, *Stanford Univ. Press*, 1958.

[2] Holt, C. C., Muth, J. F., Modigliani, F. and Simon, H. A.: Planning, Production, Inventories and the Work Force, *Prentice Hall*, 1960.

[3] Gluss, B.: Costs of Incorrect Data in Optimal Inventory Computations, *Management Science*, vol. 6, 1960.

[4] Hanssman, F.: Operations Research in Production and Inventory Control, *John Wiley and Sons, New York*, 1962.