平均値のまわりの絶対モーメントについて　I

鈴　木　義　一　郎

(1964年12月受付)

On the Absolute Central Moments I

Giitiro SUZUKI

Some special results of mean deviations are found in the literatures [2], [3], [4], [5], [7] etc. However, most of them are for individual distributions.

We consider, in this paper, the systematic method of calculations for the absolute central moments of both Pearson's type continuous distributions and the discrete distributions which satisfy the similar difference equation.

First, we shall derive the recurrence relations (1.9) and (1.10) for $\{\mu_j\}$, $\{\xi_j\}$ defined by (0.1), (0.3) respectively and calculate the first 5 absolute central moments (Table 1.1 and 2.2, where ν_j defined by (0.2)).

Secondly, we prove that the absolute central moment of any order can be calculated directly from related coefficients (Theorem 4, 5, (3.19), (3.20)) and calculate the absolute central moments of the 3rd to the 7th order (Table 3.1 and 3.3).

In the next series of this paper, we shall give the examples some of which (especially, the cases $n=1, 2$) are contained in the literature [1]~[8].

The Institute of Statistical Mathematics

§0. 序

ここで扱う問題は，ピアソン型の連続分布，およびそれと類似の差分方程式を満足する離散型分布に対する平均値のまわりの絶対モーメントの系統的計算法である．

最初に，この稿を通して用いられる記号について説明すると，$R=(-\infty, \infty)$ 上の分布 $F(x)$ の平均値

$$\mu=\int_{-\infty}^{\infty} x\, dF(x)$$

のまわりの j 次のモーメントおよび絶対モーメントをそれぞれ

$$\mu_j=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^j\, dF(x) \tag{0.1}$$

$$\nu_j=\int_{-\infty}^{\infty}|x-\mu|^j\, dF(x) \tag{0.2}$$

で表わす．特に $\mu_0=\nu_0=1$, $\mu_1=0$ である．更に

$$\xi_j(t)=\int_{-\infty}^{t}(x-\mu)^j\, dF(x) \tag{0.3}$$

特に $\xi_j(\mu)$ を単に ξ_j で表わすと，容易にわかるように

(0.4) $$\nu_j=\mu_j+\{(-1)^j-1\}\xi_j$$

なる関係が成立する.

§1, §2 においてそれぞれ連続型, 離散型の分布に対しての $\{\mu_j\}$, $\{\xi_j\}$ に関する漸化式が初等的計算によって導かれ, 更にその結果と (0.4) を用いて最初の 5 次まで (離散型分布の場合は4次まで) の絶対モーメントの結果が与えられる.

しかしながらこの方法では, 例えば5次の絶対モーメント ν_5 のみを求めたいといった場合でも4次までの値を知らねばならないこと, 更に偶数次の ξ_0, ξ_2, ξ_4 等の値は本来不必要なのに ξ_1, ξ_3, ξ_5 等の値を求めるために計算しなければならないこと等の不都合が起る.

この不都合点を解決するために, §3 では係数の値のみを用いて任意次数の絶対モーメントを直接計算する方法を考える. 更にこの方法によって7次までの絶対モーメントに対する計算結果が示される.

同じ標題のIIにおいて良く知られた個々の分布について係数を計算し, ここで得られた結果を用いて, 5 次までの絶対モーメントを実際に求めてみる予定である. 特に1次の場合は, いわゆる平均偏差で, すでに [2], [3], [4], [5], [7] 等で求められている結果を含む. また2次の場合が分散に等しく, [1], [6], [8] その他の教科書にみられる結果に含まれる.

§1. ピアソン型分布に対する $\{\mu_j\}$, $\{\xi_j\}$ についての漸化式

ピアソン型分布は, 密度函数 $f(x)$ が区間 (M, N) の外では 0, また (M, N) においては

(1.1) $$f'(x)=\frac{a+x}{b_0+b_1x+b_2x^2}f(x)=\frac{A(x)}{B(x)}f(x)$$

なる微分方程式を満足する連続型分布である. (1.1) の関係を書き直すと

(1.2) $$\alpha(x-\mu)f(x)=\beta(x-\mu)f'(x)$$

ここで

(1.3) $$\alpha(x)=a'+x=A(\mu)+x$$

(1.4) $$\beta(x)=b_0'+b_1'x+b_2x^2=B(\mu)+B'(\mu)x+b_2x^2$$

(1.2) の両辺を (M, t) で x に関して積分することによって

(1.5) $$\begin{aligned} a'\xi_0(t)+\xi_1(t)&=\int_M^t \alpha(x-\mu)f(x)\,dx \\ &=\int_M^t \beta(x-\mu)f'(x)\,dx \\ &=\Big[\beta(x-\mu)f(x)\Big]_M^t-\int_M^t \beta'(x-\mu)f(x)\,dx \\ &=\beta(t-\mu)f(t)-\varepsilon_0-[b_1'\xi_0(t)+2b_2\xi_1(t)] \end{aligned}$$

ここで

$$\varepsilon_0=\beta(M-\mu)f(M)$$

(1.5) において $t=N$ とすれば, $\xi_j(N)=\mu_j$ および $\mu_0=1$, $\mu_1=0$ であることに注意して

(1.6) $$a'+b_1'-\delta_0+\varepsilon_0=0$$

ここで

$$\delta_0=\beta(N-\mu)f(N)$$

また, $t=\mu$ と置いて (1.6) の関係を用いて

(1.7) $$-b_0'f(\mu)+\varepsilon_0+(\delta_0-\varepsilon_0)\xi_0+(1+2b_2)\xi_1=0\ .$$

$j\geqq 1$ についても同様の計算によって

$$(1.8)\qquad a'\xi_j(t)+\xi_{j+1}(t)=\int_M^t (x-\mu)^j\alpha(x-\mu)f(x)\,dx$$
$$=\int_M^t (x-\mu)^j\beta(x-\mu)f'(x)\,dx$$
$$=\Big[(x-\mu)^j\beta(x-\mu)f(x)\Big]_M^t-\int_M^t \{(x-\mu)^j\beta(x-\mu)\}'f(x)\,dx$$
$$=(t-\mu)^j\beta(t-\mu)f(t)-\varepsilon_j$$
$$-\{jb_0'\xi_{j-1}(t)+(j+1)b_1'\xi_j(t)+(j+2)b_2\xi_{j+1}(t)\}$$

ここで

$$\varepsilon_j=(M-\mu)^j\beta(M-\mu)f(M)$$

$t=N$ として

$$(1.9)\qquad jb_0'\mu_{j-1}+(jb_1'+\delta_0-\varepsilon_0)\mu_j+\{1+(j+2)b_2\}\mu_{j+1}-\delta_j+\varepsilon_j=0$$

ここで

$$\delta_j=(N-\mu)^j\beta(N-\mu)f(N)$$

更に $t=\mu$ として

$$(1.10)\qquad jb_0'\xi_{j-1}+(jb_1'+\delta_0-\varepsilon_0)\xi_j+\{1+(j+2)b_2\}\xi_{j+1}+\varepsilon_j=0$$

M または（および）N が有限の場合には，多くの分布密度函数がそこで 0 の値をとるし，またそうでない場合には密度函数 $f(x)$ が

$$f(x)=0(x^{-j})\;x\to\pm\infty\,,\qquad j=0,1,2,\cdots,J$$

なる条件を満足している（更に J が ∞ となる場合もある）ことが度々であるから，それほど一般性を失なわずに

$$(1.11)\qquad \delta_j=\varepsilon_j=0\qquad j=0,1,2,\cdots,J$$

と仮定することができる.

この場合，(1.6), (1.7), (1.9), (1.10) の関係はそれぞれ

$$(1.12)\qquad a'+b_1'=0$$
$$(1.13)\qquad -b_0'f(\mu)+(1+2b_2)\xi_1=0$$
$$(1.14)\qquad jb_0'\mu_{j-1}+jb_1'\mu_j+\{1+(j+2)b_2\}\mu_{j+1}=0$$
$$(1.15)\qquad jb_0'\xi_{j-1}+jb_1'\xi_j+\{1+(j+2)b_2\}\xi_{j+1}=0$$

のようになる.

以上をまとめて，次の結果を得る.

定理 1. ピアソン型の分布，すなわち密度函数 $f(x)$ が (1.1) の関係を満すような分布に対しては，(1.6), (1.7) の関係が成立する．更に $j=1,2,\cdots$ に対して (1.9), (1.10) の漸化式が成り立つ．特に $f(x)$ が (1.11) の条件を満足する場合には $j=0,1,\cdots,J$ に対して (1.12)～(1.15) が成立する.

記述を簡略にする目的で

$$S(K)=\left(\prod_{j=1}^{K}\frac{1}{1+(j+1)b_2}\right)b_0'$$

なる記号を用いて (1.14), (1.15) より 5 次までのモーメントを求めてみる.

$$\mu_0=1\,,\qquad \mu_1=0$$
$$\mu_2=-\frac{1}{1+3b_2}(b_0'\mu_0+b_1'\mu_1)=\frac{b_0'}{1+3b_2}$$
$$=-(1+2b_2)S(2)$$

$$\mu_3=\frac{2}{1+4b_2}(b_0'\mu_1+b_1'\mu_2)=\frac{2b_1'}{1+4b_2}(1+2b_2)S(2)$$

$$=2(1+2b_2)S(3)b_1'$$

$$\mu_4=-\frac{3}{1+5b_2}(b_0'\mu_2+b_1'\mu_3)$$

$$=3(1+2b_2)S(4)[(1+4b_2)b_0'-2b_1'^2]$$

$$\mu_5=\frac{4}{1+6b_2}(b_0'\mu_3+b_1'\mu^4)$$

$$=-4(1+2b_2)S(5)[2(1+5b_2)b_0'b_1'-3b_1'\{(1+4b_2)b_0'-2b_1'^2\}]$$

$$=-4(1+2b_2)S(5)b_1'[(5+22)b_0'-6b_1'^2]$$

$$\xi_0=F(\mu)\ ,\qquad \xi_1=S(1)f(\mu)$$

$$\xi_2=-\frac{1}{1+3b_2}(b_0'\xi_0+b_1'\xi_1)$$

$$=-S(2)\{(1+2b_2)F(\mu)+b_1'f(\mu)\}$$

$$\xi_3=-\frac{2}{1+4b_2}\{b_0'\xi_1+b_1'\xi_2\}$$

$$=-2S(3)\{b_0'(1+3b_2)f(\mu)-b_1'[(1+2b_2)F(\mu)+b_1'f(\mu)]\}$$

$$=2S(3)\{(1+2b_2)b_1'F(\mu)-[(1+3b_2)b_0'-b_1'^2]f(\mu)\}$$

$$\xi_4=-\frac{3}{1+5b_2}\{b_0'\xi_2+b_1'\xi_3\}$$

$$=3S(4)\{(1+4b_2)b_0'[(1+2b_2)F(\mu)+b_1'f(\mu)]$$
$$-2b_1'[(1+2b_2)b_1'F(\mu)-[(1+3b_2)b_0'-b_1'^2]f(\mu)]\}$$

$$=3S(4)\{(1+2b_2)[(1+4b_2)b_0'-2b_1'^2]F(\mu)+b_1'[(3+10b_2)b_0'-2b_1'^2]f(\mu)\}$$

$$\xi_5=-\frac{4}{1+6b_2}\{b_0'\xi_3+b_1'\xi_4\}$$

$$=-4S(5)\{2(1+5b_2)b_0'[(1+2b_2)b_1'F(\mu)-[(1+3b_2)b_0'-b_1'^2]f(\mu)]$$
$$+3b_1'[(1+2b_2)[(1+4b_2)b_0'-2b_1'^2]F(\mu)+b_1'[(3+10b_2)b_0'-2b_1'^2]f(\mu)]\}$$

$$=-4S(5)\{(1+2b_2)b_1'[(5+22b_2)b_0'-6b_1'^2]F(\mu)$$
$$-[2(1+3b_2)(1+5b_2)b_0'^2-(11+40b_2)b_0'b_1'^2+6b_1'^4]f(\mu)\}$$

これらの値を用いて (0.4) から 1.1 表の結果を得る.

第 1.1 表

ν_0	1
ν_1	$-2S(1)f(\mu)$
ν_2	$-(1+2b_2)S(2)$
ν_3	$2S(3)\{(1+2b_2)b_1'(1-2F(\mu))+2[(1+3b_2)b_0'-b_1'^2]f(\mu)\}$
ν_4	$3(1+2b_2)S(4)[(1+4b_2)b_0'-2b_1'^2]$
ν_5	$-4S(5)\{(1+2b_2)b_1'[(5+22b_2)b_0'-6b_1'^2](1-2F(\mu))$ $+2[2(1+3b_2)(1+5b_2)b_0'^2-(11+40b_2)b_0'b_1'^2+6b_1'^4]f(\mu)\}$

§2.　離散型分布の場合

$x=0,\ +1,\ \cdots,\ N$ で定義された密度函数 $f(x)$ が, (1.1) と類似の差分方程式

(2.1) $$f(x+1)-f(x)=\frac{a+x}{b_0+b_1x+b_2x^2}f(x)=\frac{A(x)}{B(x)}f(x)\,,\qquad x=0,1,\cdots,N-1$$

を満足する離散型分布について考える．(2.1) の関係を書き直して

(2.2) $$\alpha(x-\mu)f(x)=\beta(x+1-\mu)f(x+1)$$

ここで

$$\alpha(x)=a_0'+a_1'x+b_2x^2=\{A(\mu)+B(\mu)\}+\{A'(\mu)+B'(\mu)\}x+b_2x^2$$
$$\beta(x)=b_0'+b_1'x+b_2x^2=\{B(\mu)-B'(\mu)+b_2\}+\{B'(\mu)-2b_2\}x+b_2x^2$$

この場合にも

$$\mu_j=\sum_{x=0}^{N}(x-\mu)^jf(x)\qquad(\mu=\mu_1)$$
$$\nu_j=\sum_{x=0}^{N}|x-\mu|^jf(x)$$
$$\xi_j=\xi_j(K)=\sum_{x=0}^{K}(x-\mu)^jf(x)\,,\qquad K=[\mu]$$

として，やはり (0.4) の関係が成立している．(2.2) の両辺を x について 0 から $t-1$ まで加えることによって

(2.3) $$\begin{aligned}a_0'\xi_0(t)+a_1'\xi_1(t)+b_2\xi_2(t)-\alpha(t-\mu)f(t)&\\=\sum_{x=0}^{t-1}\alpha(x-\mu)f(x)=\sum_{x=1}^{t}\beta(x-\mu)f(x)&\\=b_0'\xi_0(t)+b_1'\xi_1(t)+b_2\xi_2(t)-\beta(M-\mu)f(M)&\end{aligned}$$

$t=N$ と置けば，$\xi_j(N)=\mu_j$ および $\mu_0=1$, $\mu_1=0$ であることから，

(2.4) $$b_0'-a_0'+\delta_0-\varepsilon_0=0$$

ここで

$$\delta_0=\alpha(N-\mu)f(N)\,,\qquad\varepsilon_0=\beta(-\mu)f(0)$$

また $t=K=[\mu]$ と置いて，(2.4) の関係を用いれば

(2.5) $$(\varepsilon_0-\delta_0)\xi_0+(b_1'-a_1')\xi_1+\eta_0-\varepsilon_0=0$$

ここで

$$\eta_0=\alpha(K-\mu)f(K)$$

(2.2) の両辺に $(x-\mu)^j$ $(j\geqq1)$ を掛けて，$t-1$ まで加えると，

(2.6) $$\begin{aligned}&a_0'\xi_j(t)+a_1'\xi_{j+1}(t)+b_2\xi_{j+2}(t)-(t-\mu)^j\alpha(t-\mu)f(t)\\&=\sum_{x=0}^{t-1}(x-\mu)^j\alpha(x-\mu)f(x)=\sum_{x=1}^{t}\{(x-\mu)-1\}^j\beta(x-\mu)f(x)\\&=\sum_{i=0}^{j}(-1)^{j-i}\binom{j}{i}\sum_{x=0}^{t}(x-\mu)^i\beta(x-\mu)f(x)-(-\mu-1)^j\varepsilon_0\\&=\sum_{i=0}^{j}(-1)^{j-i}\binom{j}{i}\{b_0'\xi_i(t)+b_1'\xi_{i+1}(t)+b_2'\xi_{i+2}(t)\}-(-\mu-1)^j\varepsilon_0\\&=\sum_{i=0}^{j}(-1)^{j-i}[c_{j,i}b_0'-c_{j,i-1}b_1'+c_{j,i-2}b_2]\xi_i(t)\\&\qquad+(b_1'-jb_2)\xi_{j+1}(t)+b_2\xi_{j+2}(t)-\varepsilon_j\end{aligned}$$

ここで

$$\varepsilon_j=(-\mu-1)^j\varepsilon_0=(-\mu-1)^j\beta(-\mu)f(0)$$
$$c_{j,i}=\begin{cases}\binom{j}{i}&0\leqq i\leqq j\\0&\text{他の場合}\end{cases}$$

$t=N, K$ と置くことによって

$$(2.7)\qquad (b_1'-jb_2-a_1')\mu_{j+1}-a_0'\mu_j+\sum_{i=0}^{j}(-1)^{j-i}[c_{j,i}b_0'-c_{j,i-1}b_1'+c_{j,i-2}b_2]\mu_i+\delta_j-\varepsilon_j=0$$

$$(2.8)\qquad (b_1'-jb_2-a_1')\xi_{j+1}-a_0'\xi_j+\sum_{i=0}^{j}(-1)^{j-i}[c_{j,i}b_0'-c_{j,i-1}b_1'+c_{j,i-2}b_2]\xi_i+\eta_j-\varepsilon_j=0$$

ここで

$$\delta_j=(N-\mu)^j\delta_0=(N-\mu)^j\alpha(N-\mu)f(N)$$

$$\eta_j=(K-\mu)^j\eta_0=(K-\mu)^j\alpha(K-\mu)f(K)$$

関係式 (2.7), (2.8) の $j=0$ の場合がそれぞれ (2.4), (2.5) になることは容易に確められる. かくて,

定理 2. (2.1) の差分方程式を満足する密度函数 $f(x)$ をもつ離散型分布に対して $j=0, 1, 2, \cdots$ について漸化式 (2.7), (2.8) が成立する.

この場合にも，やはりそれほど一般性を失なうことなく (1.11) の仮定を置くことができる. そこでこのような場合について4次までの絶対モーメントを求めてみる.

$j=7$ までの係数 $c(j,i)$ は 2.1 表のようになるから，まず (2.8) によって3次までの ξ_j を求めてみると,

$$\xi_0=\sum_{x=0}^{K}f(x)=\sum_{x=0}^{[\mu]}f(x)$$

$$\xi_1=c(0,0)\xi_0+d_0'=\frac{a_0'-b_0'}{b_1'-a_1'}\xi_0-\frac{\eta_0}{b_1'-a_1'}=-\frac{\eta_0}{b_1'-a_1'}$$

$$\begin{aligned}\xi_2&=c(1,0)\xi_0+c(1,1)\xi_1+d_1'\\&=\frac{b_0'}{b_1'-a_1'-b_2}\xi_0+\frac{a_0'-(b_0'-b_1')}{b_1'-a_1'-b_2}\xi_1-\frac{\eta_1}{b_1'-a_1'-b_2}\\&=\frac{1}{b_1'-a_1'-b_2}\left\{b_0'\xi_0-\frac{b_1'}{b_1'-a_1'}\eta_0-\eta_1\right\}\\&=\frac{b_0'}{b_1'-a_1'-b_2}\xi_0-\frac{b_1'}{(b_1'-a_1')(b_1'-a_1'-b_2)}\eta_0-\frac{1}{b_1'-a_1'-b_2}\eta_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\xi_3&=c(2,0)\xi_0+c(2,1)\xi_1+c(2,2)\xi_2+d_2'\\&=\frac{1}{b_1'-a_1'-2b_2}\{-b_0'\xi_0+(2b_0'-b_1')\xi_1+(2b_1'-b_2)\xi_2-\eta_2\}\\&=\frac{1}{b_1'-a_1'-2b_2}\left\{-b_0'\xi_0-\frac{2b_0'-b_1'}{b_1'-a_1'}\eta_0+\frac{b_0(2b_1'-b_2)}{b_1'-a_1'-b_2}\xi_0\right.\\&\qquad\left.-\frac{b_1'(2b_1'-b_2)}{(b_1'-a_1')(b_1'-a_1'-b_2)}\eta_0-\frac{2b_1'-b_2}{b_1'-a_1'-b_2}\eta_1-\eta_2\right\}\\&=\frac{b_0'(a_1'+b_1')}{(b_1'-a_1'-b_2)(b_1'-a_1'-2b_2)}\xi_0-\frac{2b_0'(b_1'-a_1'-b_2)+b_1'(a_1'+b_1')}{(b_1'-a_1')(b_1'-a_1'-b_2)(b_1'-a_1'-2b_2)}\eta_0\\&\qquad-\frac{2b_1'-b_2}{(b_1'-a_1'-b_2)(b_1'-a_1'-2b_2)}\eta_1-\frac{1}{b_1'-a_1'-2b_2}\eta_2\end{aligned}$$

また μ_n の場合も同様にして

$$\mu_0=1\,,\qquad \mu_1=0$$

$$\mu_2=c(1,0)\mu_0+c(1,1)\mu_1=\frac{b_0'}{b_1'-a_1'-b_2}$$

$$\mu_3=c(2,0)\mu_0+c(2,1)\mu_1+c(2,2)\mu_2$$

$$=\frac{1}{b_1'-a_1'-2b_2}\left\{-b_0'+(2b_1'-b_2)\frac{b_0'}{b_1'-a_1'-b_2}\right\}$$

$$=\frac{b_0'(a_1'+b_1')}{(b_1'-a_1'-b_2)(b_1'-a_1'-2b_2)}$$

$$\mu_4=c(3,0)\mu_0+c(3,1)\mu_1+c(3,2)\mu_2+c(3,3)\mu_3$$

$$=\frac{b_0'}{b_1'-a_1'-3b_2}\left\{1+\frac{3b_0'-3b'+b_2}{b_1'-a_1'-b_2}+\frac{(a_1'+b_1')(3b_1'-3b_2)}{(b_1'-a_1'-b_2)(b_1'-a_1'-2b_2)}\right\}$$

これらの値を用いて (0.4) より 2.2 表の結果を得る.

第 2.1 表

$j \backslash i$	0	1	2	3
0	$\frac{a_0'-b_0'}{b_1'-a_1'}$			
1	$\frac{b_0'}{b_1'-a_1'-b_2}$	$\frac{a_0'-(b_0'-b_1')}{b_1'-a_1'-b_2}$		
2	$-\frac{b_0'}{b_1'-a_1'-2b_2}$	$\frac{2b_0'-b_1'}{b_1'-a_1'-2b_2}$	$\frac{a_0'-(b_0'-2b_1'+b_2)}{b_1'-a_1'-2b_2}$	
3	$\frac{b_0'}{b_1'-a_1'-3b_2}$	$-\frac{3b_0'-b_1'}{b_1'-a_1'-3b_2}$	$\frac{3b_0'-3b_1'+b_2}{b_1'-a_1'-3b_2}$	$\frac{a_0'-(b_0'-3b_1'+3b_2)}{b_1'-a_1'-3b_2}$
4	$-\frac{b_0'}{b_1'-a_1'-4b_2}$	$\frac{4b_0'-b_1'}{b_1'-a_1'-4b_2}$	$-\frac{6b_0'-4b_1'+b_2}{b_1'-a_1'-4b_2}$	$\frac{4b_0'-6b_1'+4b_2}{b_1'-a_1'-4b_2}$
5	$\frac{b_0'}{b_1'-a_1'-5b_2}$	$-\frac{5b_0'-b_1'}{b_1'-a_1'-5b_2}$	$\frac{10b_0'-5b_1'+b_2}{b_1'-a_1'-5b_2}$	$-\frac{10b_0'-10b_1'+5b_2}{b_1'-a_1'-5b_2}$

$j \backslash i$	4	5
0		
1		
2		
3		
4	$\frac{a_0'-(b_0'-4b_1'+6b_2)}{b_1'-a_1'-4b_2}$	
5	$\frac{5b_0'-10b_1'+10b_2}{b_1'-a_1'-5b_2}$	$\frac{a_0'-(b_0'-5b_1'+10b_2)}{b_1'-a_1'-5b_2}$

第 2.2 表

ν_0	1
ν_1	$\frac{2\eta_0}{t(0)}$
ν_2	$\frac{b_0'}{t(1)}$

第 2.2 表 (つづき)

ν_3	$\dfrac{b_0'(a_1'+b_1')(1-2\xi_0)}{t(1)t(2)}+\dfrac{2\eta_0[2b_0't(1)+b_1'(a_1'+b_1')+t(0)(2b_1'-b_2)([\mu]-\mu)+t(0)t(1)([\mu]-\mu)^2]}{t(0)t(1)t(2)}$
ν_4	$\dfrac{b_0'[t(1)t(2)+t(2)(3b_0'-3b_1'+b_2)+(a_1'+b_1')(3b_1'-3b_2)]}{t(1)t(2)t(3)}$

注. $\left\{\begin{array}{l} t(j)=b_1'-a_1'-jb_2\,, \qquad \xi_0=F([\mu])=\sum\limits_{x=0}^{[\mu]}f(x) \\ \eta_0=\alpha([\mu]-\mu)f([\mu])=\{a_0'+a_1'([\mu]-\mu)+b_2([\mu]-\mu)^2\}f([\mu]) \end{array}\right\}$

§3. (漸化式によらず) 直接係数よりモーメントを求める方法

§1, §2 で得られた $\{\mu_j\}$, $\{\xi_j\}$ についての漸化式から直接 μ_n あるいは ξ_n について解くことを考える.

補助定理

(3.1)
$$\gamma(n, j)=\begin{cases}0 & 0\leqq j\leqq n-1\\ 1 & j=n\end{cases}$$

および $K=1, 2, \cdots, n$ に対して

(3.2) $\quad \gamma(n-K, j)=\gamma(n-K+1, j)+\gamma(n-K+1, n-K+1)c(n-K, j) \qquad (0\leqq j\leqq n-K)$

であるとき $K=1, 2, \cdots, n$ に対して次の 1), 2) が成立する.

1) $$\gamma(n-K, j)=\sum_{i=1}^{K}\gamma(n-i+1, n-i+1)c(n-i, j) \qquad (0\leqq j\leqq n-K)$$

2) $$\gamma(n-K, n-K)=\sum_{j=1}^{K}\sum_{(n;K,j)}\prod_{i=0}^{j-1}c(l_i-1, l_{i+1})$$

ここで $\sum\limits_{(n;K,j)}$ は条件

(3.3) $\quad l_0=n, \quad l_j=n-K, \quad l_i-l_{i+1}-1\geqq 0 \qquad (0\leqq i\leqq j-1)$

を満足するあらゆる組合せ $(l_0, l_1, \cdots, l_j)$ についての和を表わす.

証明. $K=1$ の時には

$$\begin{aligned}\gamma(n-1, j)&=\gamma(n, j)+\gamma(n, n)c(n-1, j)\\ &=\gamma(n, n)c(n-1, j) \qquad (0\leqq j\leqq n-1)\end{aligned}$$

で, 特に

$$\gamma(n-1, n-1)=c(n-1, n-1)$$

であるから, 1), 2) が成立している.

次に K_0 まで 1), 2) が成立していると仮定すると,

$$\begin{aligned}\gamma(n-(K_0+1), j)&=\gamma(n-K_0, j)+\gamma(n-K_0, n-K_0)c(n-(K_0+1), j)\\ &=\sum_{i=1}^{K_0}\gamma(n-i+1, n-i+1)c(n-i, j)\\ &\quad +\gamma(n-(K_0+1)+1, n-(K_0+1)+1)c(n-(K_0+1), j)\\ &=\sum_{i=1}^{K_0+1}\gamma(n-i+1, n-i+1)c(n-i, j)\end{aligned}$$

で, やはり 1) が成立している. 特に $j=n-(K_0+1)$ とすると,

$$\begin{aligned}\gamma(n-(K_0+1), n-(K_0+1))&=\sum_{i=1}^{K_0+1}\gamma(n-i+1, n-i+1)c(n-i, n-(K_0+1))\\ &=\sum_{i=0}^{K_0}\gamma(n-i, n-i)c(n-i-1, n-(K_0+1))\end{aligned}$$

$$=\sum_{i=1}^{K_0}\left\{\sum_{\nu=1}^{i}\sum_{(n;\,i,\nu)}\prod_{j=0}^{\nu-1}c(l_j-1,\,l_{j+1})\right\}c(n-i-1,\,n-(K_0+1))$$
$$+\gamma(n,n)\,c(n-1,\,n-(K_0+1))$$
$$=\sum_{\nu=1}^{K_0}\sum_{i=\nu}^{K_0}\left\{\sum_{(n,\,i,\nu)}\prod_{j=0}^{\nu-1}c(l_j-1,\,l_{j+1})\,c(n-i-1,\,n-(K_0+1))\right\}$$
$$+c(n-1,\,n-(K_0+1))$$
$$=\sum_{\nu=1}^{K_0}\sum_{(n;\,K_0+1,\nu+1)}\prod_{j=0}^{\nu}c(l_j-1,\,l_{j+1})+\sum_{(n;\,K_0+1,1)}\prod_{j=0}^{0}c(l_j-1,\,l_{j+1})$$
$$=\sum_{\nu=1}^{K_0+1}\sum_{(n;\,K_0+1,\nu)}\prod_{j=0}^{\nu-1}c(l_j-1,\,l_{j+1})$$

であるから 2) も成立し,. 補助定理が証明された.

系. ある h ($\geqq 1$) が存在して各 n ($\geqq h+1$) に対して $c(n-1,\,j)=0$ $(0\leqq j\leqq n-1-h)$ ならば, $K=1,2,\cdots,n$ に対して

(3.4) $$\gamma(n-K,\,n-K)=\sum_{j=K(h)}^{K}\sum_{(n;\,K,\,j)}^{(h)}\prod_{i=0}^{j-1}c(l_i-1,\,l_{i+1})$$

ここで $K(h)=\left[\dfrac{K-1}{h}+1\right]$ で ([ ] はガウス記号) $\sum\limits_{(n;\,K,\,j)}^{(h)}$ は条件

(3.3$-h$) $$l_0=n,\quad l_j=n-K,\quad 0\leqq l_i-l_{i+1}-1\leqq h-1\qquad (0\leqq i\leqq j-1)$$

を満足するあらゆる組合せ $(l_0,\,l_1,\,\cdots,\,l_j)$ についての和を表わす.

証明. 仮定より $l_i-l_{i+1}-1\geqq h$ に対しては, $c(l_i-1,\,l_{i+1})=0$ となる i, 更に

$$1\leqq l_i-l_{i+1}\leqq h$$

であるためには

$$j\leqq\sum_{i=0}^{j-1}(l_i-l_{i+1})=l_0-l_j=K\leqq hj$$

従って

$$\frac{K}{h}\leqq j\leqq K$$

でなければならないから (3.4) の関係が成立する.

定理 3. 数列 $\{\alpha_n\}$ の間に

(3.5) $$\alpha_n=\sum_{j=0}^{n-1}c(n-1,\,j)\alpha_j+d_{n-1}\qquad (n\geqq 1)$$

なる関係があれば,

(3.6) $$\alpha_n=\gamma_n{}^n d_0+\sum_{j=1}^{n}\gamma_{n-j}{}^n d_{j-1}$$

ここで

(3.7) $$\gamma_K{}^n=\begin{cases}1 & K=0\\ \displaystyle\sum_{j=1}^{K}\sum_{(n;\,K,\,j)}\prod_{i=0}^{j-1}c(l_i-1,\,l_{i+1}) & 1\leqq K\leqq n\end{cases}$$

証明. (3.5) に表われる $\{c(n-K,\,j);\ 0\leqq j\leqq n-K,\ 1\leqq K\leqq n\}$ を用いて (3.1), (3.2) によって $\{\gamma(n-K,\,j);\ 0\leqq j\leqq n-K,\ 0\leqq K\leqq n\}$ を定義すれば, (3.5) の関係から

(3.8) $$\alpha_n\sum_{j=0}^{n-K}\gamma(n-K,\,j)\alpha_j+\sum_{j=n-K+1}^{n}\gamma(j,\,j)\,d_{j-1}\qquad (1\leqq K\leqq n)$$

が導かれる. なぜなら, (3.1), (3.2) より $\gamma(n,n)=1$, $\gamma(n-1,\,j)=c(n-1,\,j)$ であるから, $K=1$ のときは (3.5) の定義式そのものである.

更に K_0 まで (3.8) が成立していれば, (3.5), (3.2) より

$$\begin{aligned}\alpha_n&=\sum_{j=0}^{n-K_0-1}\gamma(n-K_0,j)\alpha_j+\gamma(n-K_0,n-K_0)\alpha_{n-K_0}+\sum_{j=n-K_0+1}^{n}\gamma(j,j)d_{j-1}\\&=\sum_{j=0}^{n-K_0-1}\gamma(n-K_0,j)\alpha_j+\gamma(n-K_0,n-K_0)\left\{\sum_{j=0}^{n-K_0-1}c(n-K_0-1,j)\alpha_j+d_{n-K_0-1}\right\}\\&\quad+\sum_{j=n-K_0+1}^{n}\gamma(j,j)d_{j-1}\\&=\sum_{j=0}^{n-K_0-1}\{\gamma(n-K_0,j)+\gamma(n-K_0,n-K_0)c(n-K_0-1,j)\}\alpha_j+\sum_{j=n-K_0}^{n}\gamma(j,j)d_{j-1}\\&=\sum_{j=0}^{n-(K_0+1)}\gamma(n-(K_0+1),j)\alpha_j+\sum_{j=n-(K_0+1)+1}^{n}\gamma(j,j)d_{j-1}\end{aligned}$$

従って K_0+1 のときにも成立する.

(3.8) で $K=n$ として $\gamma_j{}^n=\gamma(n-j,n-j)$ と置けば (3.6) の関係が得られ，更に $\gamma_K{}^n$ が (3.7) によって表わされることは補助定理より明らかである.

系 1. $n\ (\geqq h+1)$ に対して $c(n-1,j)=0\ (0\leqq j\leqq n-1-h)$ となるような $h\ (\geqq 1)$ が存在すれば

$$\alpha_n=\gamma_n{}^n(h)\alpha_0+\sum_{K=1}^{n}\gamma_{n-K}{}^n(h)\,d_{K-1}\tag{3.9}$$

ここで $\gamma_K{}^n(h)$ は $K=0$ のときには 1, $1\leqq K\leqq n$ のときには (3.4) の右辺で与えられるものである.

系 2. $n\geqq 3$ に対して $c(n-1,j)=0\ (0\leqq j\leqq n-3)$ $d_n=0\ (n=1,2,\cdots)$ ならば,

$$\alpha_n=\alpha_0\sum_{K=n_0}^{n}C_n{}^n(K)+d_0\sum_{K=n_1}^{n-1}C_{n-1}{}^n(K)\tag{3.10}$$

$$n_0=\left[\frac{n+1}{2}\right],\qquad n_1=\left[\frac{n}{2}\right]$$

ここで

$$C_n{}^n(K)=\sum_{(n;n,K)}^{(2)}\prod_{i=0}^{K-1}c(l_i-1,l_{i+1})\tag{3.11}$$

$$C_{n-1}{}^n(K)=\sum_{(n;n-1,K)}^{(2)}\prod_{i=0}^{K-1}c(l_i-1,l_{i+1})\tag{3.12}$$

更に具体的に表現すると

$$C_n{}^n(n)=\sum_{(n;n,n)}^{(2)}\prod_{i=0}^{n-1}c(l_i-1,l_{i+1})=\prod_{j=0}^{n-1}c(n-1-j,n-1-j)$$

$$C_n{}^n(n-1)=\sum_{(n;n,n-1)}\prod_{i=0}^{n-2}c(l_i-1,l_{i+1})=\sum_{K=0}^{n-2}c_n(n;K)$$

ここで $c_n(n;K)$ は $c_n(n)=\prod_{j=0}^{n-1}c(n-1-j,n-1-j)$ における $c(n-1-K)c(n-2-K,n-2-K)$ の因子を $c(n-1-K,n-2-K)$ で置き換えて得られるものである. 一般に,

$$C_n{}^n(n-j)=\sum_{K_1=0}^{n-2j}\sum_{K_2=K_1+2}^{n-2(j-1)}\cdots\sum_{K_j=K_{j-1}+2}^{n-2}c_n(n;K_1,K_2,\cdots,K_j)\tag{3.13}$$

ここで $c_n(n;K_1,K_2,\cdots,K_j)$ は $c_n(n)$ における因子

$$\prod_{i=1}^{j}c(n-1-K_i,n-1-K_i)c(n-2-K_i,n-2-K_i)$$

を $\prod_{i=1}^{j}c(n-1-K_i,n-2-K_i)$ で置き換えて得られる $(n-j)$ 項の積である.

同様の記号を用いれば, (3.12) に対しても

$$C_{n-1}{}^n(n-1)=\sum_{(n;n,n-1)}^{(2)}\prod_{i=0}^{n-2}c(l_i-1,l_{i+1})=\prod_{j=0}^{n-2}c(n-1-j,n-1-j)$$

$$C_{n-1}^n(n-1-j)=\sum_{K_1=0}^{n-1-2j}\sum_{K_2=K_1+2}^{n-1-2(j-1)}\cdots\sum_{K_j=K_{j-1}+2}^{n-1-2}c_{n-1}(n-1;K_1,K_2,\cdots,K_j) \tag{3.14}$$

なる表現を得る．

さて，(1.9) や (1.10) の形の漸化式を解くには，定理 3 の系 1 (の $h=2$ の場合) を用いることができ，実際 $b_2\geqq 0$ ならば $n\geqq 1$ に対して

$$c(n-1,n-1)=\pi(n-1)b_1'-\frac{\delta_0-\varepsilon_0}{1+(n+1)b_2} \tag{3.15}$$

$$c(n-1,n-2)=\pi(n-1)b_0' \tag{3.16}$$

$$d_{n-1}=\frac{\delta_{n-1}-\varepsilon_{n-1}}{1+(n+1)b_2} \tag{3.17}$$

ここで

$$\pi(n-1)=-\frac{n-1}{1+(n+1)b_2}$$

であるから，(3.9), (3.4) によって μ_n を求めることができる．また，ξ_n の場合は (3.17) の代りに

$$d_{n-1}'=\begin{cases}\dfrac{b_0'f(\mu)-\varepsilon_0}{1+2b_2} & (n=1)\\[2ex] -\dfrac{\varepsilon_{n-1}}{1+(n+1)b_2} & (n\geqq 2)\end{cases} \tag{3.18}$$

を用いて同様の方法で計算され，更に (3.15), (3.16) の係数が μ_n, ξ_n に対して共通であることから (3.9) の右辺の $\{\gamma_j^n(2)\}$ も共通になり，従って (0.4) より

定理 4. $b_2\geqq 0$ として (1.1) を満足する密度函数 $f(x)$ をもつ分布の n 次の平均値のまわりの絶対モーメント ν_n は

$$\gamma_n^n(2)\{1+[(-1)^n-1]F(\mu)\}+\sum_{K=1}^{n}\gamma_{n-K}^n(2)\{d_{K-1}+[(-1)^n-1]d_{K-1}'\} \tag{3.19}$$

と表現できる．ここで $\gamma_K^n(2)$ は (3.15), (3.16) の係数を用いて (3.4) の右辺で $h=2$ としたものによって定義され，また，d_{K-1}, d_{K-1}' はそれぞれ (3.17), (3.18) の右辺で定義されるものである．

特に $f(x)$ が (1.11) の条件を満足している場合には d_0' が

$$\frac{b_0'}{1+2b_2}f(\mu)$$

で与えられ，他の d_K, d_K' はすべて 0 になる．そこでこの場合について，3 次から 7 次までのモーメントを求めてみる．

まず (3.15) から $c(0,0)=\pi(0)b_1'=0$ となるから

$$C_n^n(n)=0$$

更に (3.13) の右辺が $K_j=n-2$ であるとき以外は 0 になることに注意して他の係数を求めると

$$c_3^3(2)=c(2,2)c(1,0)=\pi(2)\pi(1)b_0'b_1'$$
$$c_2^3(2)=c(2,2)c(1,1)=\pi(2)\pi(1)b_1'^2$$
$$c_2^3(1)=c(2,1)=\pi(2)b_0'$$
$$c_4^4(3)=c(3,3)c(2,2)c(1,0)=\pi(3)\pi(2)\pi(1)b_0'b_1'^2$$
$$c_4^4(2)=c(3,2)c(1,0)=\pi(3)\pi(1)b_0'^2$$
$$c_5^5(4)=c(4,4)c(3,3)c(2,2)c(1,0)=\pi(4)\pi(3)\pi(2)\pi(1)b_0'b_1'^3$$
$$c_5^5(3)=c(4,3)c(2,2)c(1,0)+c(4,4)c(3,2)c(1,0)$$

$$=\pi(4)[\pi(3)+\pi(2)]\pi(1)b_0'^2b_1'$$

$$c_4{}^5(4)=c(4,4)c(3,3)c(2,2)c(1,1)=\pi(4)\pi(3)\pi(2)\pi(1)b_1'^4$$

$$c_4{}^5(3)=c(4,3)c(2,2)c(1,1)+c(4,4)c(3,2)c(1,1)+c(4,4)c(3,3)c(2,1)$$
$$=\pi(4)[\pi(3)\pi(2)+\pi(3)\pi(1)+\pi(2)\pi(1)]b_0'b_1'^2$$

$$c_4{}^5(2)=c(4,3)c(2,1)=\pi(4)\pi(2)b_0'^2$$

以下同様の計算を行なえば，

$$c_6{}^6(5)=\pi(5)\pi(4)\pi(3)\pi(2)\pi(1)b_0'b_1'^4$$

$$c_6{}^6(4)=\pi(5)[\pi(4)\pi(3)+\pi(4)\pi(2)+\pi(3)\pi(2)]\pi(1)b_0'^2b_1'^2$$

$$c_6{}^6(3)=\pi(5)\pi(3)\pi(1)b_0'^3$$

$$c_7{}^7(6)=\pi(6)\pi(5)\pi(4)\pi(3)\pi(2)\pi(1)b_0'b_1'^5$$

$$c_7{}^7(5)=\pi(6)[\pi(5)\pi(4)\pi(3)+\pi(5)\pi(4)\pi(2)+\pi(5)\pi(3)\pi(2)$$
$$+\pi(4)\pi(3)\pi(2)]\pi(1)b_0'^2b_1'^3$$

$$c_7{}^7(4)=\pi(6)[\pi(5)\pi(3)+\pi(4)\pi(3)+\pi(4)\pi(2)]\pi(1)b_0'^3b_1'$$

$$c_6{}^7(6)=\pi(6)\pi(5)\pi(4)\pi(3)\pi(2)\pi(1)b_1'^6$$

$$c_6{}^7(5)=\pi(6)[\pi(5)\pi(4)\pi(3)\pi(2)+\pi(5)\pi(4)\pi(3)\pi(1)$$
$$+\pi(5)\pi(4)\pi(2)\pi(1)+\pi(5)\pi(3)\pi(2)\pi(1)+\pi(4)\pi(3)\pi(2)\pi(1)]b_0'b_1'^4$$

$$c_6{}^7(4)=\pi(6)[\pi(5)\pi(4)\pi(2)+\pi(5)\pi(3)\pi(2)+\pi(5)\pi(3)\pi(1)$$
$$+\pi(4)\pi(3)\pi(2)+\pi(4)\pi(3)\pi(1)+\pi(4)\pi(2)\pi(1)]b_0'^2b_1'^2$$

$$c_6{}^7(3)=\pi(6)\pi(4)\pi(2)b_0'^3\ ,$$

これらの値を用いて (3.10) により μ_n, ξ_n を求め，(0.4) から ν_n を計算すると 3.1 表のような結果を得る．

また，(2.7), (2.8) の形の漸化式には定理 3 を用いて，

定理 5. $b_2\geqq 0$ として (2.1) の差分方程式を満足する密度函数 $f(x)$ をもつ離散型分布の n 次の平均値のまわりの絶対モーメント ν_n は

$$\gamma_n{}^n\{1+[(-1)^n-1]\sum_{x=0}^{[\mu]}f(x)\}+\sum_{j=1}^{n}\gamma_{n-j}{}^n\{d_{j-1}+[(-1)^n-1]d_{j-1}'\} \tag{3.20}$$

によって与えられる．ここで $\gamma_K{}^n$ は係数

$$c(n-1,n-1)=\frac{a_0'-(c_{n-1,n-1}b_0'-c_{n-1,n-2}b_1'+c_{n-1,n-3}b_2)}{b_1'-a_1'-(n-1)b_2}$$
$$c(n-1,j)=\frac{(-1)^{n-1-j}(c_{n-1,j}b_0'-c_{n-1,j-1}b_1'+c_{n-1,j-2}b_2)}{b_1'-a_1'-(n-1)b_2}\qquad 0\leqq j\leqq n-2 \tag{3.21}$$
$$n-1=0,1,2,\cdots$$

を用いて (3.7) の右辺によって定義されるもの d_{K-1}, d_{K-1}' は

$$d_{K-1}=\frac{\varepsilon_{K-1}-\delta_{K-1}}{b_1'-a_1'-(K-1)b_2}\ ,\qquad d_{K-1}'=\frac{\varepsilon_{K-1}-\eta_{K-1}}{b_1'-a_1'-(K-1)b_2} \tag{3.22}$$

によって与えられるものである．

また，(1.11) の関係が成立している場合について定理 5 によって，3 次から 6 次までの絶対モーメント ν_j を求めてみる．

まず 2.1 表の係数の表より $\gamma_j{}^n$ を計算する．この場合にも $c(0,0)=\dfrac{b_0'-a_0'}{b_1'-a_1'}=0$ であることから

$$\sum_{(n;n,n)}\prod_{i=0}^{n-1}c(l_i-1,l_{i+1})=0$$

となることおよび偶数の n に対しては $\gamma_n{}^n$ のみ求めれば良いことに注意して

$$t(j)=b_1'-a_1'-jb_2$$

$$(n;\,K,\,j)=\sum_{(n;\,K,\,j)}\prod_{i=0}^{j-1}c(l_i-1,\,l_{i+1})$$

なる記号を導入して計算式を示すと，

$$(3;\,3,\,2)=c(2,\,2)c(1,0)=\frac{b_0'(2b_1'-b_2)}{t(1)\,t(2)}$$

$$(3;\,3,\,1)=c(2,\,0)=-\frac{b_0'}{t(2)}$$

$$(3;\,2,\,2)=c(2,\,2)c(1,\,1)=\frac{b_1'(2b_1'-b_2)}{t(1)t(2)}$$

$$(3;\,2,\,1)=c(2,\,1)=-\frac{2b_0'-b_1'}{t(2)}$$

$$(3;\,1,\,1)=c(2,\,2)=\frac{2b_1'-b_2}{t(2)}$$

$$(4;\,4,\,3)=c(3,\,3)c(2,\,2)c(1,0)=\frac{b_0'(2b_1'-b_2)(3b_1'-3b_2)}{t(1)t(2)t(3)}$$

$$\begin{aligned}(4;\,4,\,2)&=c(3,\,3)c(2,\,0)+c(3,\,2)c(1,\,0)\\&=-\frac{b_0'(3b_1'-3b_2)}{t(2)t(3)}+\frac{b_0'(3b_0'-3b_1'+b_2)}{t(1)t(3)}\end{aligned}$$

$$(4;\,4,\,1)=c(3,\,0)=\frac{b_0'}{t(3)}$$

これより，

$$\gamma_3{}^3=(3;\,3,\,2)+(3;\,3,\,1)=\frac{b_0'}{t(1)t(2)}\{(2b_1'-b_2)-t(1)\}=\frac{b_0'(a_1'+b_1')}{t(1)t(2)}$$

$$\begin{aligned}\gamma_2{}^3&=(3;\,2,\,2)+(3;\,2,\,1)=\frac{1}{t(1)t(2)}\{b_1'(2b_1'-b_2)-t(1)(2b_0'-b_1')\}\\&=\frac{2b_0't(1)+b_1'(a_1'+b_1')}{t(1)t(2)}\end{aligned}$$

$$\gamma_1{}^3=(3;\,1,\,1)=\frac{2b_1'-b_2}{t(2)}$$

$$\gamma_0{}^3=1$$

$$\begin{aligned}\gamma_4{}^4&=(4;\,4,\,3)+(4;\,4,\,2)+(4;\,4,\,1)\\&=\frac{b_0'}{t(1)t(2)t(3)}\{[(2b_1'-b_2)-t(1)](3b_1'-3b_2)+t(2)(3b_0'-3b_1'+b_2)+t(1)t(2)\}\\&=\frac{b_0'}{t(1)t(2)t(3)}\{3b_0't(2)+3(b_1'-b_2)(a_1'+b_1')-(3b_1'-b_2)t(2)+t(1)t(2)\}\end{aligned}$$

$n=5,\,6$ の場合にも $b_2=0$ であるときの係数が 3.2 表のようになり，従って (3.20) より絶対モーメントに関しての 3.3 表を得る．

統計数理研究所

第 3.1 表

ν_3	$\dfrac{2b_0'b_1'}{(1+3b_2)(1+4b_2)}(1-2F(\mu))+\dfrac{4b_0'[(1+3b_2)b_0'-b_1'^2]}{(1+2b_2)(1+3b_2)(1+4b_2)}f(\mu)$
ν_4	$\dfrac{3b_0'[(1+4b_2)b_0'-2b_1'^2]}{(1+3b_2)(1+4b_2)(1+5b_2)}$
ν_5	$\dfrac{-4b_0'b_1'[(5+22b_2)b_0'-6b_1'^2]}{(1+3b_2)(1+4b_2)(1+5b_2)(1+6b_2)}(1-2F(\mu))+\dfrac{-8b_0'[2(1+3b_2)(1+5b_2)b_0'^2-(11+40b_2)b_0'b_1'^2+6b_1'^4]}{(1+2b_2)(1+3b_2)(1+4b_2)(1+5b_2)(1+6b_2)}f(\mu)$
ν_6	$\dfrac{-5b_0'[3(1+4b_2)(1+6b_2)b_0'^2-2(13+62b_2)b_0'b_1'^2+24b_1'^4]}{(1+3b_2)(1+4b_2)(1+5b_2)(1+6b_2)(1+7b_2)}$
ν_7	$\dfrac{6b_0'b_1'[(35+378b_2+976b_2^2)b_0'^2-2(77+394b_2)b_0'b_1^2+120b_1'^4]}{(1+3b_2)(1+4b_2)(1+5b_2)(1+6b_2)(1+7b_2)(1+8b_2)}(1-2F(\mu))$ $+\dfrac{2b_0'[8(1+3b_2)(1+5b_2)(1+7b_2)b_0'^3-(129+1208b_2+2620b_2^2)b_0'^2b_1'^2+2(137+574b_2)b_0'b_1'^4-120b_1'^6]}{(1+2b_2)(1+3b_2)(1+4b_2)(1+5b_2)(1+6b_2)(1+7b_2)(1+8b_2)}f(\mu)$

第 3.2 表

(5; 5, 4) (5; 5, 3) (5; 5, 2) (5; 5, 1)	$24b_0'b_1'^3(b_1'-a_1')^{-4}$ $4b_0'b_1'(5b_0'-9b_1')(b_1'-a_1')^{-3}$ $-2b_0'(5b_0'-7b_1')(b_1'-a_1')^{-2}$ $-b_0'(b_1'-a_1')^{-1}$	$(b_1'-a_1')^4\gamma_5^5$	$10b_0'(b_1'-a_1')(a_1'+b_1')+2a_1'b_1'(b_1'+3a_1')+(a_1'+b_1')^3$
(5; 4, 4) (5; 4, 3) (5; 4, 2) (5; 4, 1)	$24b_1'^4(b_1'-a_1')^{-4}$ $4b_1'^2(11b_0'-9b_1')(b_1'-a_1')^{-3}$ $2(4b_0'^2-17b_0'b'b_1'+7b_1'^2)(b_1'-a_1')^{-2}$ $(4b_0'-b_1')(b_1'-a_1')^{-1}$	$(b_1'-a_1')^4\gamma_4^5$	$8b_0'^2(b_1'-a_1')^2+2b_0'(b_1'-a_1')[b_1'(5b_1'+9a_1')+2(a_1'+b_1')^2]$ $+b_1'[2a_1'b_1'(b_1'+3a_1')+(a_1'+b_1')^3]$
(5; 3, 3) (5; 3, 2) (5; 3, 1)	$24b_1'^3(b_1'-a_1')^{-3}$ $4b_1'(5b_0'-6b_1')(b_1'-a_1')^{-2}$ $-2(3b_0'-2b_1')(b_1'-a_1')^{-1}$	$(b_1'-a_1')^3\gamma_3^5$	$2b_0'(b_1'-a_1')(3a_1'+7b_1')+4b_1'[2a_1'b_1'+(a_1'+b_1')^2]$
(5; 2, 2) (5; 2, 1)	$12b_1'^2(b_1'-a_1')^{-2}$ $2(2b_0'-3b_1')(b_1'-a_1')^{-1}$	$(b_1'-a_1')^2\gamma_2^5$	$4b_0'(b_1'-a_1')+6b_1'(a_1'+b_1')$
(5; 1, 1)	$4b_1'(b_1'-a_1')^{-1}$	$(b_1'-a_1')\gamma_1^5$	$4b_1'$
		γ_0^5	1
(6; 6, 5) (6; 6, 4) (6; 6, 3) (6; 6, 2) (6; 6, 1)	$120b_0'b_1'^4(b_1'-a_1')^{-5}$ $10b_0'b_1'^2(13b_0'-24b_1')(b_1'-a_1')^{-4}$ $5b_0'(3b_0'^2-26b_0'b_1'+30b_1'^2)(b_1'-a_1')^{-3}$ $5b_0'(5b_0'-6b_1')(b_1'-a_1')^{-2}$ $b_0'(b_1'-a_1')^{-1}$	$(b_1'-a_1')^5\gamma_6^6$	$15b_0'^3(b_1'-a_1')^2+5b_0'^2(b_1'-a_1')[6a_1'b_1'+5(a_1'+b_1')^2]$ $+b_0'[30a_1'b_1'(a_1'+b_1')^2+(b_1'-a_1')^4]$

第 3.3 表

ν_3	$\dfrac{b_0'(a_1'+b_1')(1-2\xi_0)}{(b_1'-a_1'-b_2)(b_1'-a_1'-2b_2)}+\dfrac{2\eta_0[2b_0'(b_1'-a_1'-b_2)+b_1'(a_1'+b_1')+(2b_1'-b_2)(b_1'-a_1')([\mu]-\mu)+(b_1'-a_1')(b_1'-a_1'-b_2)([\mu]-\mu)^2]}{(b_1'-a_1')(b_1'-a_1'-b_2)(b_1'-a_1'-2b_2)}$
ν_4	$\dfrac{b_0'[3b_0'(b_1'-a_1'-2b_2)+3(b_1'-b_2)(a_1'+b_1')-(3b_1'-b_2)(b_1'-a_1'-2b_2)+(b_1'-a_1'-b_2)(b_1'-a_1'-2b_2)]}{(b_1'-a_1'-b_2)(b_1'-a_1'-2b_2)(b_1'-a_1'-3b_2)}$
ν_5	$\dfrac{1-2\xi_0}{(b_1'-a_1')^4}\{10b_0'(b_1'-a_1')(a_1'+b_1')+2a_1'b_1'(b_1'+3a_1')+(a_1'+b_1')^3\}$ $+\dfrac{2\eta_0}{(b_1'-a_1')^5}\{8b_0'^2(b_1'-a_1')^2+2b_0'(b_1'-a_1')[b_1'(5b_1'+9a_1')+2(a_1'+b_1')^2]+b_1'[2a_1'b_1'(b_1'+3a_1')+(a_1'+b_1')^3]$ $+(b_1'-a_1')([\mu]-\mu)[2b_0'(b_1'-a_1')(3a_1+7b_1')+4b_1'\{2a_1'b_1'+(a_1'+b_1')^2\}]$ $+(b_1'-a_1')^2([\mu]-\mu)^2[4b_0'(b_1'-a_1')+6b_1'(a_1'+b_1')]+(b_1'-a_1')^3([\mu]-\mu)^3\cdot 4b_1'+(b_1'-a_1')^4([\mu]-\mu)^4\}$
ν_6	$\dfrac{b_0'[15b_0'^2(b_1'-a_1')^2+5b_0'(b_1'-a_1')[6a_1'b_1'+5(a_1'+b_1')^2]+30a_1'b_1'(a_1'+b_1')^2+(b_1'-a_1')^4]}{(b_1'-a_1')^5}$

注. $\left\{\begin{array}{l}\xi_0=F([\mu])=\sum_{x=0}^{[\mu]}f(x),\quad \eta_0=\alpha([\mu]-\mu)f([\mu])=\{a_0'+a_1'([\mu]-\mu)+b_2([\mu]-\mu)^2\}f([\mu])\\ \nu_5,\ \nu_6 \text{ については } b_2=0 \text{ の場合の結果が示されてある.}\end{array}\right\}$

参 考 文 献

[1] Cramér: *Mathematical methods of statistics*, Princeton Univ. Press, 1946.
[2] Crow: The mean deviation of the Poisson Distribution, ***Biometrika***, 45 (1958), pp. 556–559.
[3] Johnson: A note on the mean deviation of the binomial distribution, ***Biometrika***, 44 (1957), pp. 532–533.
[4] Kamat: Incomplete and absolute moments of the multivariate normal distribution with some applications, ***Biometrika***, 40 (1953), pp. 20–34.
[5] Kamat: Incomplete and absolute moments of some discrete distributions, Proceedings of the International Symposium on Discrete Distributions held at McGill University. (1963) (筆者未見)
[6] Kendall: The advanced theory of statistics, Griffin, Vol. 1 (1948).
[7] Ramasuffan: The mean difference and the mean deviation of some discontinuous distributions, ***Biometrika***, 45 (1958), pp. 549–556.
[8] Wilks, S. S.: *Mathematical Statistics*.

統計数理研究所