

交通制御の問題の統計数理解析 III

— 信号による交通制御の方法について —

植 松 俊 夫

(1964 年 12 月受付)

Studies in Traffic Control Problems III

— On the Determination of Traffic Signals in the Traffic Control —

Tosio UEMATU

The purpose of this paper is to present traffic control schemes which are applicable in practice. Optimum control by fixed-time traffic signals is discussed both for a single intersection and for a series of intersections along a long street.

For a single intersection a simple model of traffic is presented, and an optimum control is determined on the basis of this model. Applicability of this model is examined in the light of traffic survey data. For a series of intersection a generalization of the result of previous papers [2], [3] is discussed.

Finally we discuss to integrate the optimum controls for individual intersections and streets in a given area so as to obtain a reasonable scheme of traffic control as a whole.

Institute of Statistical Mathematics

§ 1 前 置 き

信号による交通制御の問題をはじめて取上げたのは昭和の30年代の初頭であった。当時は自動車の交通量も現在に比べればだいぶ少なく、交通渋滞が現実の問題として大きく騒がれるような事はなかった。従って、この問題を取上げたのも実際面からの切実な要求があってというわけではなく、問題の取上げ方もやや適切さを欠いた点があった。すなわち最初考えられたのは、単独の交叉点における信号の切換えの二、三の方式を待ち合わせのモデルによって検討したものであり、次いで ([1]) 交叉点の交通制御を、クロスする二つの方向の渋滞発生度をバランスさせるという意味で optimize するというものであった。何れも局所的な問題であり、実際の観点からは不十分なものであったといわねばならない。すなわち個々の交叉点を optimize することは、必ずしも全体的な optimization にならないかもしれない。

その後、東京都内の交通量の急激な増加に伴って、交通制御の問題が現実重要なものとなるとともに、実際に即した考え方をとってゆくことが望まれるようになった。これは個々の交叉点でなくて、一つの路線、更に路線網を対象として、その交通制御の方法を問題としなくてはならないというものである。

この線に沿って取上げた一つの問題が、一つの路線に対する系統式の交通制御の optimiza-

tion ([2], [3]) であった. 所で対象が路線にまで拡張されると, 問題は極めて難解なものとなる. 何らかのポイントをつかんで, これを単純化しない限り, 解を求めることは困難である. [2], [3] では, 交通工学の実際家としての科学警察研究所の埴氏の示唆に基づき, through bands の幅を指標にするという立場をとって, それについての optimization を達成する方法が考えられた.

前に述べたように, 交叉点間の有機的なつながりを無視して個々の交叉点の交通制御をばらばらに optimize する事には問題があるが, この事は単独の交叉点に対する optimization の方法が全然役に立たぬという事を意味するのではない. 今一つの路線を問題としている場合, 更に対象を拡げて, この路線と交叉する路線も含めたとするに, 問題の路線上の流れに割当てるべき各交叉点での青信号の時間は, この各交叉点でクロスする流れの混み具合に応じて変える方がよさそうである. たとえば, ある交叉点において, ここでクロスする方向の流れがすいている場合, この交叉点で, 問題の路線上の流れに青信号の時間をより多く割当てる事により, 問題の路線に対する through bands の幅は一般により広くなり, はけ方がよりよくなる. この様に, 問題の路線上の流れに対して, 各交叉点での青信号の時間を割当てるに当っては, 夫々の交叉点においてクロスする二つの流れの混み具合に基づいて optimum な青信号時間をきめる事が望ましい場合がありうるわけである.

これを要するに, 与えられた交通系に対する optimum な制御の方法を問題とするに当っては, 個々の交叉点単独に対するものと, それらの交叉点のつながり具合に対するものとの両方を考えてゆく事が必要である. それらを適当に組立てる事によって良い結果を得る場合もあり得るわけである. それで以下には, 単一の交叉点の場合と系統式の場合とに分けて, 夫々について信号による交通制御の方法について述べる事にする.

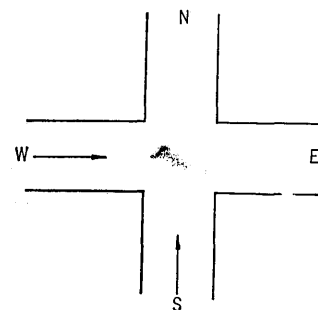
§ 2 交叉点における交通の単純モデル

既に [1] において, 単一の交叉点における交通制御が取上げられた. [1]では, 交叉点においてクロスする二つの方向の渋滞発生度をバランスさせるような制御を問題とした. ここでは, 重複を避けて, 他の規準で問題を取上げる事にする. すなわち, ここでは, 交叉点においてクロスする二つの方向の平均的な混雑度がバランスするような制御を問題にする事とする. この場合考えられる最も単純なモデルについて本節では述べる.

今第1図の様に交叉点で交叉する $S \rightarrow N$ 方向, および $W \rightarrow E$ 方向の二つの自動車の流れに対して, 信号燈による交通整理が行なわれる場合を考える. 実際には $N \rightarrow S$ 方向と $W \leftarrow E$ 方向の流れもあるわけであるが, 向きあった二つの流れについては, そのうち交通量の多い方を問題にすればよいから, この図の様に2方向のクロスする流れがあるとしても一般性を失なわない.

これらの流れに対して行なわれる制御において, 信号の1サイクルの時間を C とするに, この C は, $S \rightarrow N$ 方向の流れに対する青の時間 G と赤の時間 R に分けられる (実際には黄信号の時間もあるわけであるが, これは青の時間にくり入れておく事にする). 勿論 $C = G + R$ である. $W \rightarrow E$ 方向の流れにとっては, 信号の赤の時間が G , 青の時間が R である. 信号の各サイクルは, $S \rightarrow N$ 方向の流れに対する青で始まり赤で終ると考える事にする.

信号の $n+1$ 番目のサイクルの G の間に $S \rightarrow N$ 方向に到着する車の数を ξ_n , R の間の到着数を η_n とする. ま



第1図

た信号の $n+1$ 番目のサイクルの R の間に $W \rightarrow E$ 方向に到着する車の数を ξ_n^* , 信号の $n+2$ 番目のサイクルの G の間に $W \rightarrow E$ 方向に到着する車の数を η_n^* とする.

そこで交叉点における交通に関して次の仮定をする. すなわち $\{\xi_n\}$, $\{\eta_n\}$, $\{\xi_n^*\}$, $\{\eta_n^*\}$ なる四つの系列の夫々が, 互いに独立で, かつ同一の分布を持つ確率変数の系列をなす; これらの分布では何れも平均値が存在する; 四つの系列は互いに独立である. 青信号の間に交叉点を通過して出てゆく (左折, 右折も含めて) 事に関しては次の様に仮定する. 最小の車頭間隔時間で出てゆける単位時間当りの台数を $S \rightarrow N$ 方向につき α , $W \rightarrow E$ 方向につき α^* とする時, これらが一定であるとす. 従って $S \rightarrow N$ 方向では, 青信号の間に最大限 αG 台の流出が可能であり, $W \rightarrow E$ 方向では, 青信号の間に最大限 $\alpha^* R$ 台の流出が可能である (αG , $\alpha^* R$ は整数値で近似する). 今信号の一サイクルの間で最も混雑するとみられる赤信号の終りの時の待合せの車の数を, $S \rightarrow N$ 方向に対して q_n (n 番目のサイクルで), $W \rightarrow E$ 方向に対して q_n^* ($n+1$ 番目のサイクルで) とする. この時待行列の系列 $\{q_n\}$, $\{q_n^*\}$ が, 次のように与えられると仮定する. すなわち,

$$\left. \begin{aligned} q_{n+1} &= (q_n + \xi_n - \alpha G)^+ + \eta_n \\ q_{n+1}^* &= (q_n^* + \xi_n^* - \alpha^* R)^+ + \eta_n^* \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$n=0, 1, 2, \dots$, ここに $a^+ = \begin{cases} a (a > 0 \text{ の時}), \\ 0 (a \leq 0 \text{ の時}), \end{cases}$ とする.

待行列の系列 $\{q_n\}$, $\{q_n^*\}$ の代りに, われわれはまた, 青信号の終りの時の待合せの車の数を考える事ができる. それを $S \rightarrow N$ 方向に対して y_n ($n+1$ 番目のサイクルで), $W \rightarrow E$ 方向に対して y_n^* ($n+1$ 番目のサイクルで) とする. 然る時 $\{y_n\}$, $\{y_n^*\}$ と $\{q_n\}$, $\{q_n^*\}$ の関係は, 明らかに,

$$\left. \begin{aligned} q_{n+1} &= y_n + \eta_n \\ q_{n+1}^* &= y_n^* + \eta_n^* \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$n=0, 1, 2, \dots$, である. (1), (2) から明らかに, 次の関係が得られる.

$$\left. \begin{aligned} y_{n+1} &= (y_n + \eta_n + \xi_{n+1} - \alpha G)^+ \\ y_{n+1}^* &= (y_n^* + \eta_n^* + \xi_{n+1}^* - \alpha^* R)^+ \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$n=0, 1, 2, \dots$.

§ 3 統計的平衡状態における待行列の分布

前節のモデルを仮定した場合において, 待行列に関して, マルコフ連鎖の理論を適用する事ができる. 本節ではこれについて述べる. 流れの $S \rightarrow N$ 方向と $W \rightarrow E$ 方向の何れを考えても同じだから, ここでは前者をとる事にし, かつ $x_n = \eta_n + \xi_{n+1}$, $\mu = \alpha G$ とおく事にする (μ は整数値で近似する). 然る時系列 $\{y_n\}$ は,

$$y_{n+1} = (y_n + x_n - \mu)^+$$

$n=0, 1, 2, \dots$, となる. あるいは更に $u_n = x_n - \mu$ とおけば,

$$y_{n+1} = (y_n + u_n)^+ \quad (4)$$

$n=0, 1, 2, \dots$, となる. 仮定によれば, $\{x_n\}$ ないし $\{u_n\}$ は, 同一分布に従い互いに独立な確率変数の系列で, 従って明らかに, 系列 $\{y_n\}$ は, 非負の整数値を states としてとる, 定常な遷移確率系を持つマルコフ連鎖をなす. なお仮定より, x_n ないし u_n の分布は平均値を持つ.

今マルコフ連鎖 $\{y_n\}$ の遷移確率を次の様におく. すなわち,

$$p_{ij} = Pr\{y_{n+1} = j / y_n = i\}$$

$i, j=0, 1, 2, \dots$, また $P=(p_{ij})$ とおく. P は次の様になる事は容易に分る. すなわち, $P_r\{x_n=j\}=a_j, j=0, 1, 2, \dots$, とおく時,

$$P = \begin{pmatrix} a_0+a_1+\dots+a_\mu & a_{\mu+1} & a_{\mu+2} & \dots & \dots \\ a_0+a_1+\dots+a_{\mu-1} & a_\mu & a_{\mu+1} & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots \\ a_0+a_1 & a_2 & a_3 & \dots & \dots \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & \dots \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & a_0 & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

マルコフ連鎖 $\{y_n\}$ の性質は, μ と $E[x_n]$ の間の関係によってちがってくる. すなわち $\mu \leq E[x_n]$ の場合と $\mu > E[x_n]$ の場合に分かれる. 以後次の仮定をする: $P_r\{u_n=1\} > 0, P_r\{u_n=-1\} > 0$.

この仮定をすれば, 任意の state から他の任意の state への遷移が可能という事になるから, このマルコフ連鎖は irreducible である. この場合 [4] に従ってタイプを分ける事ができる. これは次の結果となる. すなわち,

(i) $\mu \leq E[x_n]$ の場合には, $\{y_n\}$ は transient, ないし recurrent で non-null なマルコフ連鎖である.

(ii) $\mu > E[x_n]$ の場合には, $\{y_n\}$ は ergodic なマルコフ連鎖である.

これらは, 例えば (4) の関係にある系列 $\{y_n\}$ を扱った [5] の結果から導かれる. すなわち, 今 $P^n=(p_{ij}^{(n)})$ とおく時, [5] によれば, $\mu \leq E[x_n]$ の場合には, すべての i, j に対し $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = 0$ であり, $\mu > E[x_n]$ の場合には, 確率分布 $\{p_j\}$ が存在して, すべての i に対して,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = p_j, \quad j=0, 1, 2, \dots,$$

である. 従って [4] によれば上に述べたタイプ分けとなる. なお (i) の場合のうち, $\mu < E[x_n]$ の場合, $\{y_n\}$ は transient なマルコフ連鎖である.

実際 recurrent event ((4) ϵ) として「待行列なし」を考えるに, 初めに ϵ が起ったとして, 以後 ϵ が永久に起らぬ確率, すなわち, $P_r\{y_1 > 0, y_2 > 0, \dots\}$ が正の値である. 何となれば, 大数の強法則により, 確率 1 をもって $(u_1+u_2+\dots+u_n)/n \rightarrow E[u]$ であり, $E[u] = E[x_n] - \mu > 0$ の仮定より, 確率 1 をもって, 充分大なるすべての n に対して $u_1+u_2+\dots+u_n > 0$ である. 然るに $y_n \geq u_1+u_2+\dots+u_n$ であるから, 確率 1 をもって, 充分大なるすべての n に対して $y_n > 0$ である. 従って適当な n をとれば, $P_r\{y_n > 0, y_{n+1} > 0, \dots\} > 0$ である. 今もし $P_r\{y_1 > 0, y_2 > 0, \dots\} = 0$ とすれば, $P_r\{y_1 = 0, y_2 > 0, y_3 > 0, \dots\} = P_r\{y_1 = 0\} \times P_r\{y_1 > 0, y_2 > 0, \dots\} = 0$ となり, 従って $P_r\{y_2 > 0, y_3 > 0, \dots\} = 0$ となる. これから同様にして, すべての k に対し $P_r\{y_k > 0, y_{k+1} > 0, \dots\} > 0$ となり, 矛盾である. 故に $P_r\{y_1 > 0, y_2 > 0, \dots\} > 0$, すなわち ϵ が永久に起らぬ確率は正の値である. 故に $\{y_n\}$ は transient なマルコフ連鎖である.

(i) の場合には, $n \rightarrow \infty$ の時 $p_{ij}^{(n)} \rightarrow 0$ となるが, これは交通の制御が行なわれてゆく時, 初めの待合せの状態がどの様であろうと, 信号のサイクル数が増すにつれて, 待行列が幾らでも長くなってゆく事を意味し, 待行列の長さは無限に発散し, 混雑は幾らでも増して交通は不

能となる。

(ロ) の場合には、 $n \rightarrow \infty$ の時、 i のいかにかわらず $\{p_{ij}^{(n)}\}$ が一定の分布 $\{p_j\}$ に近づくわけであるが、これは交通の制御が行なわれてゆく時、初めの待合せの状態がどの様であろうと、信号のサイクル数が増すにつれて、待行列の起り方は一定の分布に近づいてゆく事を意味する。この場合待行列の分布が一旦 $\{p_j\}$ に到達したとすると、以後の待行列の系列は $\{p_j\}$ を定常な分布として持つに到る。すなわち初期の分布を $\{p_j\}$ とした場合には、マルコフ連鎖 $\{y_n\}$ の分布は定常となる。換言すれば、 $Pr\{y_n=j\}=p_j, j=0, 1, 2, \dots$ となる。この事は [4] の一般論から得られる結果である。この様に待行列の分布が $\{p_j\}$ に到達した状態は、交差点における交通が統計的平衡状態に到達したものととして解釈される。[4] によれば、この時の $\{p_j\}$ を求める方程式が次の様に得られる。すなわち $\{p_j\}$ は次の方程式の解である。

$$\left. \begin{aligned} p_k &= \sum_{j=0}^{\infty} p_j p_{jk}, \quad k=0, 1, 2, \dots, \\ \sum_{j=0}^{\infty} p_j &= 1, \quad p_k > 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

x_n の分布 $\{a_j\}$ および μ が与えられた時、 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n < \mu$ の場合には、統計的平衡状態における待行列の分布 $\{p_j\}$ が (5) によって (この場合 p_{jk} は前頁の P の値を入れる) 定められるわけであるが、今一つ实际的に許容できるある仮定をつけ加える時、 $\{p_j\}$ を求める方法を理論上は与える事ができる。それを次に述べる。

つけ加える仮定は次のものである。ある正の整数 m があって、 $a_m \neq 0$ かつ m より大きいすべての j に対して $a_j = 0$ 。すなわち、信号の一サイクルの間に到着する車の数に上限があるという仮定である。なお $m \leq \mu$ の場合はつまらないので、ここでは $m > \mu$ とする。

この仮定をした場合、今

$$F_n = p_0 + p_1 + \dots + p_n, \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

$$F_{-1} = F_{-2} = \dots = F_{\mu-m} = 0 \quad (7)$$

とおくと、(5) は次の様に書き直せる

$$\left. \begin{aligned} F_k &= \sum_{j=0}^m a_j F_{\mu+k-j}, \quad k=0, 1, 2, \dots \\ F_0 &\leq F_1 \leq F_2 \leq \dots \rightarrow 1 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

(8) を解くには、[5] の方法を用いればよい。すなわち今方程式

$$\varphi(s) = \sum_{j=0}^m a_{m-j} s^j - s^{m-\mu} = 0 \quad (9)$$

を考えるに、その任意解 s に対し、 $F_k = s^k, k = \mu - m, \mu - m + 1, \dots, 0, 1, \dots$ は (8) の第一式の形式的解をなす。然るに [5] によれば、(9) は 1 より小なる正根を持ち、今その最大のものを s_1 として $s_1 < \rho < 1$ なる ρ をとる時、(9) は絶対値が ρ より小なる根を丁度 $m - \mu$ 個持つ。今それらを $s_1, s_2, \dots, s_{m-\mu}$ とする。ここでこれらがすべて単根であるという仮定を追加する。 $c_1, c_2, \dots, c_{m-\mu}$ を任意の常数とする時、明らかに、

$$F_k = 1 - \sum_{j=1}^{m-\mu} c_j s_j^k \quad (10)$$

は (8) の第一式の形式的な解である。そこで $c_1, c_2, \dots, c_{m-\mu}$ を、境界条件 (7) を用いて定める。すなわち連立一次方程式

$$\sum_{j=1}^{m-\mu} c_j s_j^{-\nu} = 1, \quad \nu = 1, 2, \dots, m - \mu \quad (11)$$

を解いて $c_1, c_2, \dots, c_{m-\mu}$ を定める。この様にして得られた $\{F_k\}$ については、(8) の第 2 の関係も成立つ事がいえる ((5)). $\{p_j\}$ は $\{F_k\}$ から $p_j = F_j - F_{j-1}$ によって求められる。

この方法で $\{p_j\}$ を求めるには、代数方程式の複素根を求めなくてはならない。実際問題の場合の m は相当大きいので、この代数方程式の次数も高くなり、実用上は難点がある。実用上は、(5)を適当に有限の所で切って得る連立一次方程式

$$p_k = \sum_{j=0}^N p_j p_{jk}, \quad k=0, 1, \dots, N-1 \tag{12}$$

の $p_j > 0, \sum_{j=0}^N p_j = 1$ を満足する解を求めるというやり方が考えられる。この場合 N をきめるには、これを順次大きくして行って、得られる解の収斂をみてゆくようにすればよい。

次に統計的平衡状態の場合の待行列の平均値 $E[y_n] = \sum_{n=1}^{\infty} n p_n$ について考える。今 x_n が2次の moment を持つと仮定する。すなわち $E[x_n^2] < \infty$ とする。然る時は $\sum_{n=1}^{\infty} n p_n < \infty$ となる事がいえる。この事について述べる。

今 $\{a_n\}$ および $\{p_n\}$ の generating function を $A(t), P(t)$ とす: $A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, P(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n t^n$. 然る時 (6) と P の形から、

$$P(t) = \frac{\sum_{j=0}^{\mu-1} \sum_{k=0}^j p_k a_{j-k} t^j - \left\{ \sum_{j=0}^{\mu-1} \left(\sum_{k=0}^j a_k \right) p_{\mu-1-j} \right\} t^{\mu}}{A(t) - t^{\mu}} \tag{13}$$

を得る。今(13)の分母を $f(t)$, 分子を $g(t)$ とおく。すなわち $P(t) = g(t)/f(t)$. 故に、

$$P'(t) = \frac{g'(t)f(t) - g(t)f'(t)}{\{f(t)\}^2}$$

となる。そこで $t \rightarrow 1$ とするに、 $f(1) = 0, g(1) = 0$ であるから、右辺の極限は不定形となる。よって、

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 1} P'(t) &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{g''(t)f(t) - g(t)f''(t)}{2f(t)f'(t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \left\{ \frac{g''(t)}{2f'(t)} - \frac{f''(t)}{2f'(t)} P(t) \right\} = \frac{\lim_{t \rightarrow 1} [g''(t) - \{A''(t) - \mu(\mu-1)t^{\mu-2}\}P(t)]}{\lim_{t \rightarrow 1} 2\{A'(t) - \mu t^{\mu-1}\}} \end{aligned}$$

然るに、仮定より、 $\lim_{t \rightarrow 1} A'(t), \lim_{t \rightarrow 1} A''(t)$ は存在して、夫々 $E[x_n], E[x_n^2] - E[x_n]$ に等しい。故に $\lim_{t \rightarrow 1} P'(t)$ は存在して、

$$\lim_{t \rightarrow 1} P'(t) = \frac{E[x_n^2] - E[x_n] - \mu(\mu-1) - g''(1)}{2\{\mu - E[x_n]\}} \tag{14}$$

に等しい。ここに、

$$g''(1) = \sum_{j=2}^{\mu-1} \sum_{k=0}^j j(j-1) p_k a_{j-k} - \mu(\mu-1) \sum_{j=0}^{\mu-1} \left(\sum_{k=0}^j a_k \right) p_{\mu-1-j} \tag{15}$$

故に $E[y]$ は存在して、(14)の右辺で与えられる。

(14)の右辺において $g''(1)$ の項には $p_0, p_1, \dots, p_{\mu-1}$ が含まれている。然し $p_{\mu}, p_{\mu+1}, \dots$ は含まれていない。故に $p_0, p_1, \dots, p_{\mu-1}$ が何らかの方法で(例えば前に述べた、 P を有限の所で切る近似法で)求められた時、 $E[y_n]$ を求めるには、(14)を使えばよい。

以上系列 $\{y_n\}$ で考えたが、系列 $\{q_n\}$ に対しても平行的な議論ができるわけである。然し $\{q_n\}$ に対する結果は、 $\{y_n\}$ に対する結果から求めることができるわけである。すなわち系列 $\{q_n\}$ に対しても前述の(i)と(ii)の場合が区別され、夫々前と同じ意味を持つ。特に(ii)の場合には、 $\{q_n\}$ に対する、統計的平衡状態が存在しうる。この場合の待行列の分布は、 $\{p_j\}$ と η_n の分布の convolution で与えられる。平均値については、

$$E[q_n] = E[y_n] + E[\eta_n] \quad (16)$$

と求められる。

§ 4 単一の交叉点の交通制御への応用

前節の結果を単一の交叉点の交通制御に応用する事について述べる。先づ信号の1サイクルの間の $S \rightarrow N$ 方向の車の到着数の平均を A , $W \rightarrow E$ 方向の車の到着数の平均を A^* と書く事にする。即ち前述の $\xi_n, \eta_n, \xi_n^*, \eta_n^*$ に対し, $A = E[\xi_n + \eta_{n+1}]$, $A^* = E[\xi_n^* + \eta_{n+1}^*]$ である。われわれはここで次の様な交通制御を考える事にする。すなわち, 今 $S \rightarrow N$ 方向に対して青信号を長くすればこの方向の待行列は短くなり, $W \rightarrow E$ 方向の待行列は長くなる。 $W \rightarrow E$ 方向に対して青信号を長くすれば前とは逆となる。そこでこの待行列の平均的な長さがバランスする様な制御が望ましいと考える事にする。ただし, バランスといっても, その場合二つの方向の道路幅の大小が, 待行列数に対して, その時生ずる混雑度を左右すると考えられる。それ故この事をとり入れるため, 両方向の待行列の平均的な長さのバランスとは, 両方向の待行列の平均的な長さの比が前もって与えておいたある値 (これは道路幅の大小に関係してきめるわけである) になる場合であるとする。そこでこの比の値を γ とする。そこで上述の意味のバランスがとれるように, 信号の時間 G, R を決定する事を考える。ただし今信号の1サイクルの長さ C は与えられたものとして, この C をどのように G と R に分割するかという事を問題にする。なお待行列としては, 信号の1サイクルのうちで一番混むと考えられる時点, すなわち赤信号の終りのものとする事にする。

われわれの formulation によれば, 問題は, C が一定の下で, G, R を,

$$E[q_n]/E[q_n^*] = \gamma \quad (17)$$

となる様にきめる, という事になる。この(17)を考えるに当って, われわれは交叉点の交通が統計的平衡状態にある場合を考える事にする。

何れか一方の流れに対して割当てられる青信号が非常に短い場合には, この方向の待行列は急激に増えてゆき平衡状態にはないわけであるが, この様な制御ははじめから良くないやり方として除外できる。問題は, 信号をどうきめても, 何れか少なくとも一方の流れの待行列が急激に増える場合であるが, もしこの様な事になったとすれば, どの様な制御を行なったとしても交通の麻痺は避けられないわけで, 従ってかかる場合は議論の対象から除かねばならない。問題にしうるのは, 適当な制御をすれば, 何れの流れもが統計的平衡状態になり得る場合である。その為の条件は, 前節の結果より次の様に述べられる, すなわち; ある G, R に対して, $A < \alpha G$, $A^* < \alpha^* R$ となりうる。これから, 両方の流れを同時に統計的平衡状態にし得るための必要条件として,

$$\frac{A}{\alpha} + \frac{A^*}{\alpha^*} < C \quad (18)$$

を得る。逆にこの条件があれば, ある範囲の G, R に対して, それを用いた制御では, 何れの流れも統計的平衡状態に達しうる。この場合の G の範囲は,

$$\frac{A}{\alpha} < G < C - \frac{A^*}{\alpha^*} \quad (19)$$

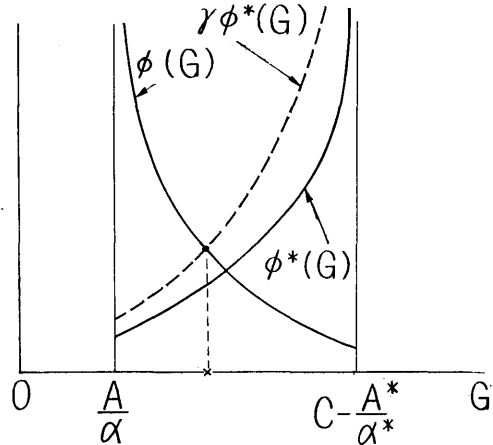
で与えられる事は容易に分る。

今 α, α^*, A, A^* が条件(17)を満足する場合とする。然る時は前節の結果から, 夫々の方向に流れにおける1サイクル当りの車の到着数の分布に2次の moment の存在が仮定される時, 赤信号の終りにおける待行列の長さの平均値 (統計的平衡状態の下での) $E[q_n], E[q_n^*]$ が定まる。 G をきめた時, これらは §3 に述べた所により求まる。 $E[q_n], E[q_n^*]$ は G の函数

であるから、今これを、

$$\phi(G) = E[q_n], \quad \phi^*(G) = E[q_n^*]$$

とおく。然る時 $\phi(G)$ は G に関して単調減少、 $\phi^*(G)$ は G に関して単調増大である。今これらの函数をグラフにかいたとすれば、第2図の様なグラフが得られる。そこで $\phi(G)$ のグラフと $\gamma\phi^*(G)$ のグラフの交点を求めれば、これにより、所求の青信号の時間を、第2図によって求め得る事になる。実際に応用する場合には、数値計算によって幾つかの点を計算してグラフを描き、それをを用いる事になる。



第2図

§5 実地への適用の検討

前節に述べた、単純モデルに基づく単一交叉点の交通管制の方法を、実地に適用し得るか否かは、実際の交叉点における実測を基にして慎重に検討すべき問題である。われわれはこの点に留意して、昭和35年春と昭和36年の春に、日比谷交叉点において一連の交通調査を行なって実測のデータをとった。

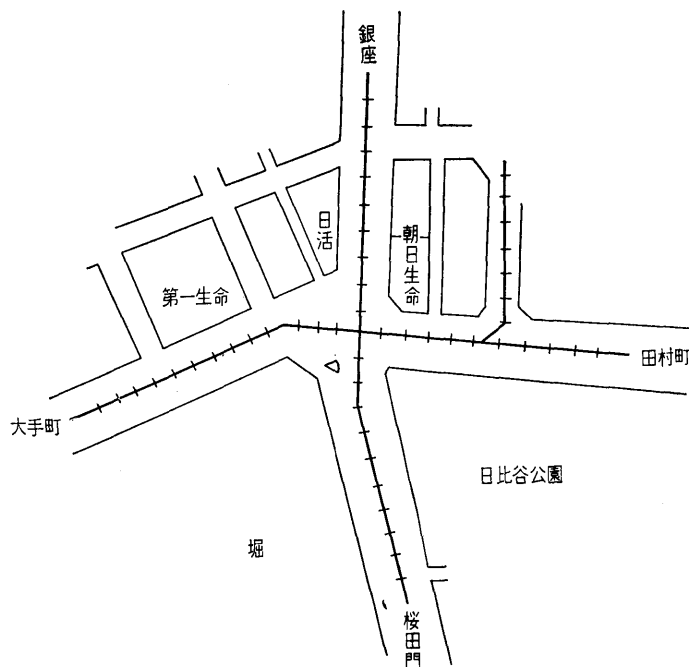
日比谷交叉点を選んだ理由は、なるべく交通量が多く、交叉点交通に関する諸要因ができるだけ多く関与した、交通の様相の複雑な交叉点を探ろうとした事と、実測を行なうに当っての便宜を考えたためである。実測は日比谷交叉点角の朝日生命ビルの屋上で行なった。

われわれの単純モデルでは、車の滞留状況を表現するものとしての車の待行列が、1サイクル内の車の到着数ないし赤信号の間の車の到着数と、最小の車頭間隔時間を出てゆける車の単位時間当りの台数（交叉点の交通容量を表現する）、および青信号の時間の長さに関して、(1)の形であるという単純化を行なっている。ここで先づ問題となるのは、このモデルのごとく、流出数を交叉点の交通容量という一定量に関して規定してよいかという点である。実際の流出には交通容量で決らないランダムな変動があると思われる。その大きさの検討が必要である。

日比谷交叉点における車の流れの方向は、銀座から桜田門へ方向、田村町から大手町へ方向、桜田門から銀座へ方向および大手町から田村町へ方向の4つがあるわけであるが(第3図参照)、実測時において単位時間当りの車の流出数のランダムな変動が一番大きいものは、大手町から田村町へ方向であった。36年度の3日間のデータを夫々の日につき計算した所では、この大手町→田村町方向についての、サイクル内単位時間当り流出数の変異係数は、0.082, 0.222, 0.089であった。ただし、サイクル内単位当り流出数としては、待合せの車が流出してしまって車の流れが途切れるまで（すなわち最小の車頭間隔での流出が続く間）のものを考えた。この結果からみると、日比谷交叉点において、調査時の様な交通状況の下では、最小の車頭時間間隔の下での、単位時間当りの車の流出数は、その平均値（交通容量と考える）のまわりに、1割から2割程度の変動があり得るわけである。この値は大して大きいものでもないから、近似的にこれを平均値でおきかえて、一定としたモデルでもよさそうである。

若しこの変動を、更に精密に取入れたモデルを考えようとすれば、一応この変動の起源について考えてみる必要がある。自然な考え方は、交叉点が本来持っている各方向の交通容量があるが、実際には各方向の車のはけは、その時の右折車、左折車、他の方向の車等の妨害、その他いろいろの阻害要因があるために、その能率が落ちるとみる考え方である。

この考え方の検討のために、われわれは、車の流れの夫々の方向について、信号の各サイク



第3図

ルにおける、単位時間当りの車の流出数と、その場合の阻害諸要因との間の重相関係数を計算してみた。ただし信号の各サイクルにおいて単位時間当りの車の流出数としては、ここでも待ち合せの車が流出してしまつて車の流れが途切れるまでのものを考えた。

阻害要因としては、流出数を問題としている方向の、同じ信号サイクル内における左折車数、右折車数、大型車数、横断の歩行者数、待行列数、向いあつた方向の同じ信号サイクル内における右折車数、クロスする2つの方向の夫々の同じ信号サイクル内における右折車数、問題としている方向およびそれと向いあつた方向の、信号の同じサイクル内に発車した都電の台数の合計、1台目の都電および2台目の都電が発車してから交差点を横断して終るまでの夫々の時間の11項目をとつた。

前記4つの方向のうちで、大手町→田村町方向が、実測時において、流出数と阻害諸要因間の重相関係数も一番高く出た。36年度の3日間のデータを夫々の日につき計算した所では、この大手町→田村町方向についての、サイクル内単位時間当り流出数と上述の11項目との間の重相関係数の値は、0.44, 0.50, 0.40であつた。重相関係数の自乗としては、0.19, 0.25, 0.16であり、これからみて、流出数の変動中に占める阻害要因の寄与は2割前後という事になる。

他の3つの方向では、阻害要因の影響は更に小さい。すなわち日比谷交差点において、調査時の様な交通状況の下では、車の流出数は、要因規定のできないランダムな変動が大きく、それに比べれば、阻害要因として上に取上げた11項目に関しての流出数の低下は、余り問題にならない程度である。

従つてモデルを流出数の変動を取入れたものに精密化するに當つて、この変動を阻害要因によって規定してモデルに組みこむという行き方はとれない。変動をランダムなものとして、誤差項として(1)の αG , $\alpha^* R$ につけ加えるという形にせざるを得ない。これを行なえば、(1)

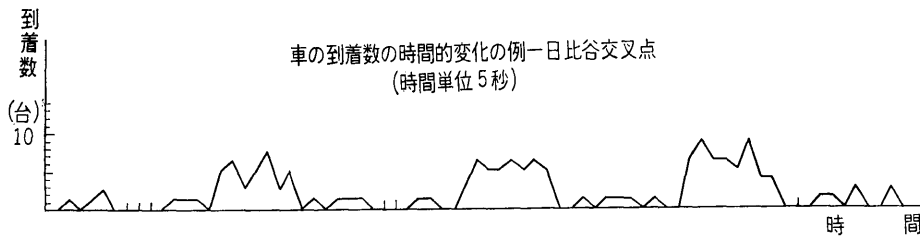
のより精密なモデルは、

$$\left. \begin{aligned} q_{n+1} &= (q_n + \xi_n - \alpha G - \varepsilon_n)^+ + \eta_n \\ q_{n+1}^* &= (q_n^* + \xi_n^* - \alpha^* R - \varepsilon_n^*)^+ + \eta_n^* \end{aligned} \right\} \quad (1')$$

$n=0, 1, 2, \dots$, ただし $\{\varepsilon_n\}$, $\{\varepsilon_n^*\}$ は互いに独立に、夫々同一分布 (G に関する) に従い、 $E\varepsilon_n = E\varepsilon_n^* = 0$, また $\{\xi_n\}$, $\{\xi_n^*\}$, $\{\eta_n\}$, $\{\eta_n^*\}$ とも独立な確率変数系列となる。

このモデルは、 $\xi_n - \varepsilon_n$ および $\xi_n^* - \varepsilon_n^*$ を夫々まとめれば、(1) と全く同じ形であり、§3 の一般論がやはり適用できる。然し §4 の如く実際に交通制御に応用しようとする場合には、 ε_n , ε_n^* の分布について適当な仮定が必要であり、また解を求めるための数値計算は更に複雑となる。前に述べた様に、 ε_n , ε_n^* の変動はそう大きなものではなく、近似的にはこれらを見捨ててもよいであろう。

次に問題となるのは、車の来方に関する仮定である。われわれの単純モデルでは $\{\xi_n\}$, $\{\xi_n^*\}$, $\{\eta_n\}$, $\{\eta_n^*\}$ は夫々が同一分布をしていると仮定している。然し実際の交通では、一つの交叉点への流入は、その前の交叉点で制御を受けたものであり、従って一度増加して次に減少するという型を、一定週期 T (前の交叉点の制御の週期) で繰返すものと考えられる。日比谷での実測の例を一つあげれば、第4図に見る通りである。



第4図

この様な車の来方は次の様なモデルで考えられよう。すなわち時刻 t での到着数 $\xi(t)$ が、

$$\xi(t) = f(t) + \varepsilon(t) \quad (20)$$

ただし $f(t)$ は週期 T のある周期函数、 $\varepsilon(t)$ はランダムな変動で、 $\varepsilon(t)$ と $\varepsilon(t+T)$ は同一分布に従う、というものが考えられる。

このモデルで考えたとすれば、任意の流れについて、ある一定時間間隔毎にその間の到着数を考える時、それらの時間内の車の到着数は、同一分布でない。例えばこれらの分布の平均や分散が一定でない。

然し、考えている交叉点での信号制御の週期が、その前の交叉点での信号制御の週期と一致している限り、すぐ上に考えた車の到着のモデルの下では、 $\{\xi_n\}$, $\{\xi_n^*\}$, $\{\eta_n\}$, $\{\eta_n^*\}$ の分布は夫々同一となる。実際の場合、多くの場合に、信号制御の週期は、隣接する交叉点の間でほぼ一定であると思われるので、われわれの単純モデルにおける車の来方の仮定には、それほど問題はない。

以上単純モデルについて色々検討してきたが、実際に単純モデルを適用した場合にどうなるかという事を、われわれの日比谷交叉点の実測に関して試してみる事にする。

われわれの調査時において、日比谷交叉点の各方向の交通量は時刻とともに変化しており、また交通制御の信号時間も時刻により少しずつ変更されていたが、調査期間を通じて平均的な信号規制は、1サイクルが90秒の場合であった。そこでここでは $C=90$ 秒の場合を取上げる事にする。

また調査期間中、大手町→田村町の方向の交通量が田村町→大手町の方向のそれよりも多かったので、この向きあった2方向中の主要なものとしては、大手町→田村町の方向をとる。桜田門→銀座の方向と、銀座→桜田門の方向のうちでは、桜田門→銀座の方向をとる事にする。これは、銀座→桜田門の方向の車の流れに対する待行列の詳しい測定が、測定の場所の地勢上不可能であったからである。

大手町→田村町の方向の交通量、桜田門→銀座の方向の交通量共に、勿論時刻と共に変化があったのであるが、そのうち最も普通であったのは、毎秒当りの車の到着数の平均が、大手町→田村町の方向で0.66台、桜田門→銀座の方向で0.40台なるものであった。よってここではこの場合を考えることにする。なお、日比谷交叉点において、測定当時のこれら2つの方向に対する交通容量は夫々1.42台/秒、0.98台/秒であった。

この場合にわれわれの単純モデルを適用するわけであるが、ここで更に次の仮定をする。すなわち上記2方向の夫々の車の到着がポアソン過程をなすと仮定する。これは時間を Δt を単位として測る時、(20)において $f(t)$ が t に係らず一定、すなわち $f(t) \equiv \lambda \Delta t$ 、 $\epsilon(t)$ が $\epsilon(t) = \xi(t) - \lambda \Delta t$ 、ただし $\xi(t)$ は平均が $\lambda \Delta t$ のポアソン分布に従う確率変数、なる特別の場合に含まれる。

この仮定は、前に述べた様に実際の多くの場合に $f(t)$ が一定ではない事からみて、実際と食いちがう仮定であるが、ここでは一応、これを一つの近似とみて、そのモデルに基づいて結果を出し、後でそれを実測とつきあわせて検討する事にする。

今大手町→田村町の方向の車の、単位時間当りの到着数の平均を λ 、桜田門→銀座の方向の車に対するそれを λ^* とかく事にする。今の場合は $\lambda = 0.66$ 台/秒、 $\lambda^* = 0.40$ 台/秒である。また各方向に対する日比谷交叉点の交通容量 α 、 α^* は、前述のごとく、 $\alpha = 1.42$ 台/秒、 $\alpha^* = 0.98$ 台/秒である。われわれのモデルにおいては、大手町→田村町に対する青信号の時間を G 、赤信号の時間を R とする時、 ξ_n 、 η_n 、 ξ_n^* 、 η_n^* の分布は夫々パラメーターが λG 、 λR 、 $\lambda^* R$ 、 $\lambda^* G$ のポアソン分布であり、 $\xi_n + \eta_n$ 、 $\xi_n^* + \eta_n^*$ の分布は夫々パラメーターが λC 、 $\lambda^* C$ のポアソン分布である。よって $A = E[\xi_n + \eta_n] = \lambda C$ 、 $A^* = E[\xi_n^* + \eta_n^*] = \lambda^* C$ である。

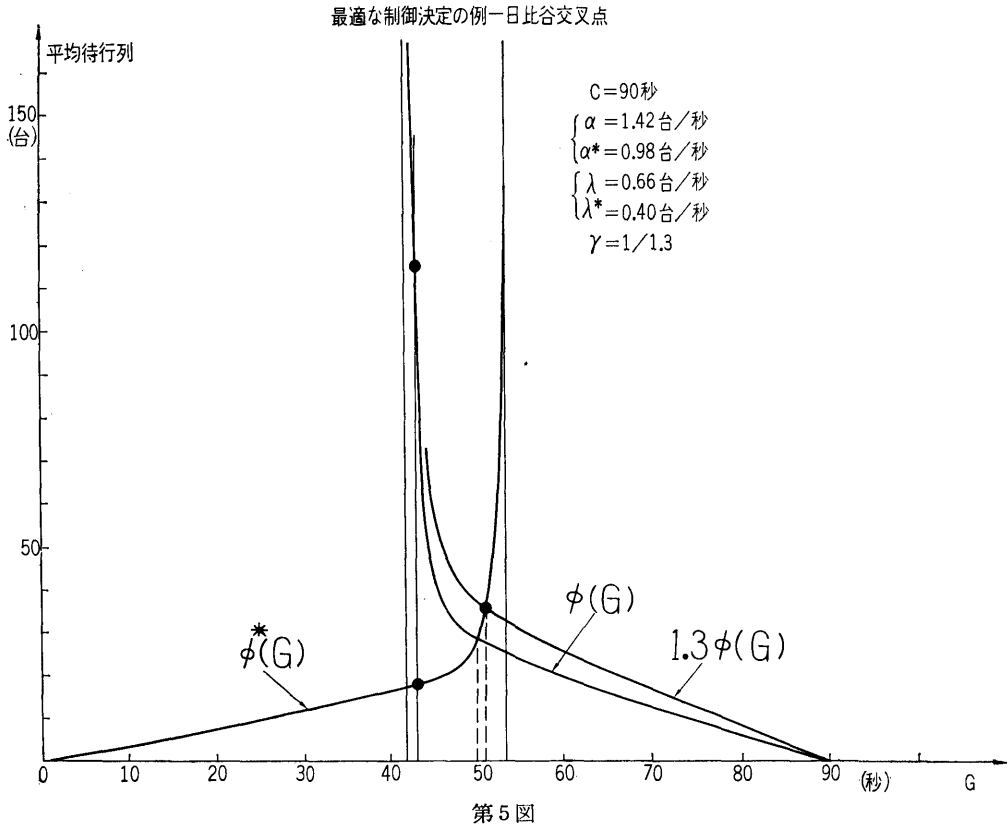
今の場合、 $A = 59.4$ 、 $A^* = 36.0$ 、 $\alpha = 1.42$ 、 $\alpha^* = 0.98$ だから、§4の(18)が満足される。よって§4のformulationによって G の解を求める事ができる。この場合考えられる G の範囲は、(19)により、 $41.8 \text{ 秒} < G < 53.3 \text{ 秒}$ である。

統計的平衡状態を考えた時、大手町→田村町の方向の待行列 q_n^* の平均、桜田門→銀座の方向の待行列 q_n の平均が、上の範囲の G に対し、その函数としてきまる。それらを $\phi(G) = E[q_n]$ 、 $\phi^*(G) = E[q_n^*]$ とする。これらは、色々の G に対して、§3に述べた様に(12)の形の連立一次方程式の数値計算によって、待行列の極限分布の近似を求める事により定める事ができる。然しこの近似をよくしようとするとならば実際の数値計算が膨大なものとなって処理しきれない。それで、ここでは次の様にした。

先づ粗い近似で、すなわち前に述べた無限行列 P を有限でできて(12)の形の連立一次方程式とする場合に、次元が余り大きくないようにして、待行列の極限分布 $\{p_j\}$ のうちの最初の方の p_j を定める（その中に負になるものがでたら、0でおきかえる）。それ以外の p_j をすべて0とおく。この様にして定まった $\{p_j\}$ を使って、待行列の平均を与える式(14)、(15)によって、待行列の平均の近似値を定める。

上述の様にして、色々の G に対して $\phi(G)$ 、 $\phi^*(G)$ を近似的に求めて、それを滑らかな曲線にしたものが第5図である。

第5図により、前述の交通量の下での日比谷交叉点に対する交通制御の、われわれの意味で最適のものをきめる事ができる。大手町→田村町の方向に対する道路幅と桜田門→銀座の方向



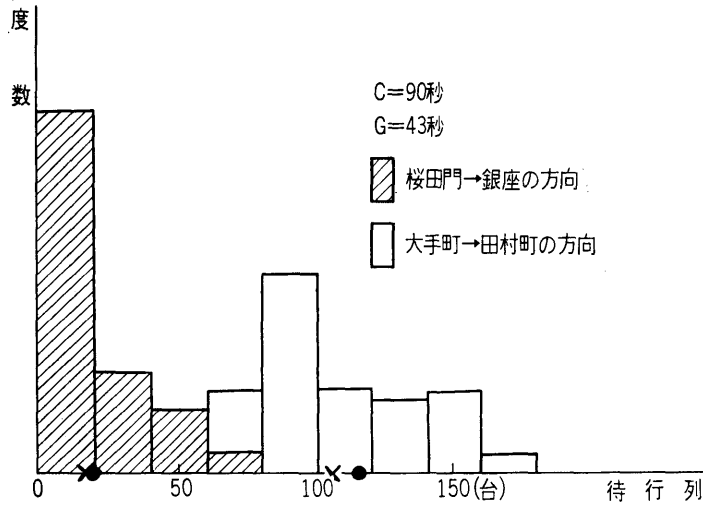
に対する道路幅が若し等しいのであれば、第5図の $\phi(G)$ と $\phi^*(G)$ の交点から、最適な G （大手町→田村町方向の流れに対する青信号の時間）は $G=50$ 秒ときまる。実際には、この2つの方向に対する実質上の道路幅の比は、大略1:1.3であった。故に§4の意味での最適な G は、 $1.3\phi(G)$ と $\phi^*(G)$ の交点から求まる。それは大体 $G=51$ 秒である。

上述の交通管制の決定は、われわれの単純モデルをもとにしている。更に、車の来方についてランダム性を仮定しており、この仮定は実際とは大分ちがうという事は前に述べた通りである。それ故、この決定の方法の妥当性については更に検討がなされねばならない。そこで、ここでは、上の例について仮定したモデルの下での待行列についての理論的な帰結と、実測した待行列とを比べてみる事にする。

実測の間に、 $C=90$ 秒、 $\lambda=0.66$ 台/秒、 $\lambda^*=0.40$ 台/秒の下に、大手町→田村町方向の流れに対する青信号時間が、 $G=43$ 秒で制御された一連の60サイクルがあったが、それに対してその各サイクルの待行列（信号が赤から青に変わる瞬間のもの）を実測したものが、大手町→田村町および桜田門→銀座の各方向につき、第6図の様な分布であった。

この場合の制御は、この分布から見られる所では、桜田門→銀座方向に対して甚だ有利であり、待行列の2つの実測の分布は、殆んど完全に分れてしまった程である。平均をとると、大手町→田村町方向の流れについて約105台、桜田門→銀座方向の流れについて約18台であり（第6図の×印参照）、その比は約5.8:1である。

一方、われわれのモデルから得られる結論も、この制御は桜田門→銀座方向に対し甚だ有利という事になる。われわれのモデルからは、平均待行列は、大手町→田村町方向の流れについて約115台、桜田門→銀座方向の流れについて約19台であり、（第6図の●印参照）、



第6図

その比は約6.1:1である。

この例からみた限りでは、われわれのモデルから導いた結果は実際をかなりよく表現しているといえよう。

以上により、われわれが実測を行なった日比谷交叉点あるいはこれと条件の余り違わない交叉点に関しては、われわれの単純モデルを利用して決定される単一交叉点の交通制御が妥当性を持つと考えられる。日比谷交叉点は、都内の交叉点中でも交通量の一番多い方であり、相当な輻輳がみられるのであるが、交叉点自体も非常に広く、そのために交通容量を低下せしめる阻害要因が以外ときかず、その故に交通の様子を単純モデルによって充分近似し得るのであろう。本節の結論がどのような交叉点に対しても当てはまると考えるのは危険であろう。狭い交叉点では、交叉点交通についてもっと複雑なモデルが必要であるかもしれない。

§ 6 系統式の交通制御における信号設定

[2], [3]においては、系統式の信号機系列により、路線の自動車交通を制御する場合、系列の各信号設定をこの路線の向いあった2つの方向に対する through bands に関して optimum に決定する事を問題とした。すなわち2つの方向に対する through bands の幅の和は可能な限り大きく、また夫々の方向に対する through band の幅の比が、2つの方向の車の来方の頻度の比に等しいような信号設定の可能性を論じ、このような意味の optimality を、個々の交叉点の信号を独立に或る方式できめてゆくやり方(個別的に optimum な系統式制御)で達成しうるための条件をしらべた。

ここでは前よりも一般的な場合として、信号のうちの青の時間が赤の時間に等しいか、または赤の時間より長い場合を取上げてみる事にする。記号や基本的概念については[3]にならう事にする。信号の1サイクルの時間 C は $C=2$ とし、そのうちの青の時間と赤の時間を夫々 $G, R(C=G+R)$, $G \geq R > 1/2$ とし、これらは路線上のすべての交叉点に共通であるとする。[2], [3] の場合には、 $G=R=1$ であった。

われわれが目標とする系統式制御は、今の場合、次の基準を満足するものである([3]参照)。すなわち、系統式制御において指定する速度の勾配 α をその与えられた限界 $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ 内で動かし、また offsets の組 S を任意に動かす場合において、

(A) $Q_a(S)$ が最大となる事

(B) 各方向に対する通過指数が各方向の車の来方の頻度に比例する事. ただしこの場合, 各方向の通過指数を何れも充分大きくとる事が可能なら, そのために上述の比例関係が破られても, この条件の方を優先させる.

(B)をもっと詳しく述べれば次の通りである. (A)によって考えた $Q_a(S)$ の最大値を M とする時, 両方向の車の来方の相対頻度を w_1, w_2 とし, (B)は次の意味である. すなわち,

(i) $M \leq G + \frac{\min\{w_1, w_2\}}{\max\{w_1, w_2\}}$ の場合: この場合には, 各方向の通過指数が w_1 と w_2 に比例するという意味とする.

(ii) $M > G + \frac{\min\{w_1, w_2\}}{\max\{w_1, w_2\}}$ の場合: この場合には, 車の来方の頻度の多い方向の通過指数が G となり, 今一つの方向の通過指数が $M - G$ となるという意味とする.

この(A)ないし(B)を満足する制御が, [3] に述べた個別的に optimum な信号設定によって達成されるための条件を以下問題とする. この信号設定は [3] の §2 において (a), (b), (c) で規定したが, この時考えられた帯 T_0, T_0^* は, 今の場合, 幅が G のものを考える事になる. なお, この(a)については, ここでは (i), (ii) ([3] 参照) を採る事にする. なお, [3] の §2 において, (ii) は, 若し (ii) が適用できる交叉点の場合には (ii) を, (ii) が適用できぬ交叉点の場合には (ii) を意味するものと定めているわけだが, 今の場合, (ii) に代っている "1/2" は "G/2" でおきかえねばならない.

初めに $\alpha=1$ の場合に time-space diagram 上に原点を通る帯 T_0 を考えたとき, offset が 0 の下で, 原点から距離 x にある交叉点での信号の生起が T_0 に生ぜしめる上側の縮小を $U(x)$, 下側の縮小を $L(x)$ とする. ただしこの地点での赤信号の生起が T_0 の内部に含まれた場合には, T_0 の上, 下の限界のうちのこの赤信号に対して近い方をとり, 赤信号からこの限界に到る全体を縮小とみる (第7図参照). この $U(x), L(x)$ は, 明らかに,

$$\begin{aligned} 2k \leq x < 2k+1 \text{ の場合: } & \left. \begin{aligned} U(x) &= x - 2k \\ L(x) &= 0 \end{aligned} \right\} \\ 2k+1 < x \leq 2k+2 \text{ の場合: } & \left. \begin{aligned} U(x) &= 0 \\ L(x) &= 2k+2-x \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

である. これは [2] の $G=R=1$ 場合の関係 (8), (10) 式と全く同じである.

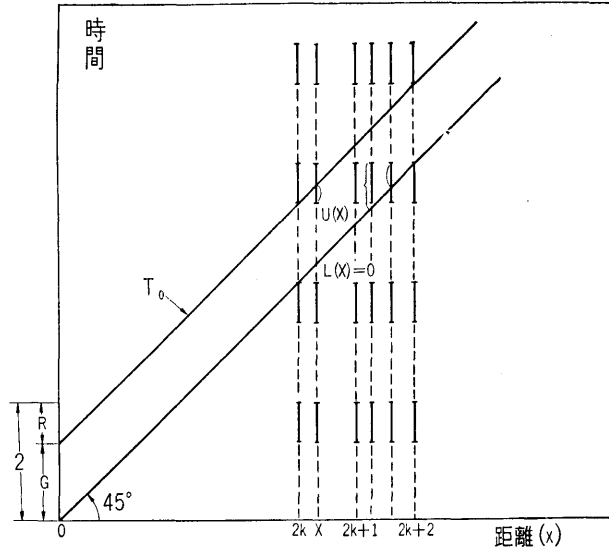
[3] の §2 の結果は, この [2] の (8), (10) の関係をもとにして導かれたものである事に注意すれば, 上述の事より, [3] の §2 はこれを適当にいいかえる時, $G \geq R > 1/2$ の場合についてそのまま成立つ事が結論される. 特に α, λ^* を固定して time-space diagram 上に幅 G の帯 T_0, T_0^* をとったとし, 任意の交叉点について, その座標を x とする時, この交叉点に対して (i) と (ii) によって offset をきめる事ができるための必要充分条件を書きあげれば,

$$\max\{w_1(G-\zeta), w_2(G-\zeta)\} \leq \frac{G}{2} \quad (21)$$

となる. ここに ζ は, この交叉点において T_0 と T_0^* に起る縮小の大きさの和の最小値である.

[3] の §3 の結果は, [3] の §2 の結果を用いているものであるが, その内容を逐一追ってゆくと, 今の $G \geq R$ の場合でも, 適当ないいかえをすれば, ほぼそのまま成立つ事を見る事ができる. これにより, 前述の(A)を満足する制御が, 個別的に optimum な信号設定によって達成されるための条件を次のように述べる事ができる. すなわち,

[定理1] 一番左の交叉点での赤信号によっては縮小が全然起らぬ帯を T_0, T_0^* とする時,



第7図

これらに対応する λ^* の値を λ_0^* であらわす事にする. 与えられた, 車の来方の相対頻度は w_1, w_2 とする. この時, 個別的に optimum な信号設定によって(A)が達成されるための必要かつ充分な条件は,

$$\sup_{\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2} Q_\alpha(S_{\alpha, \lambda_0^*, 1/2, 1/2}) \geq G \tag{22}$$

なる事である. この条件が成立つ場合, 上式の左辺は実は最大値であって, この最大値を達せしめる α の値を α_0 とすれば,

$$\max_{\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2} Q_\alpha(S) = Q_{\alpha_0}(S_{\alpha_0, \lambda_0^*, w_1, w_2}) = Q_{\alpha_0}(S_{\alpha_0, \lambda_0^*, 1/2, 1/2})$$

となる.

なお [3] の条件(31)は, 上の定理の条件が成立つための一つの充分条件である. すなわち,

$$\sup_{\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2} Q_\alpha(\tilde{S}_{\alpha, \lambda_0^*, 1/2, 1/2}) \geq 1 \tag{23}$$

ならば, (22) が成立つ (ただし, この式の $\tilde{S}_{\alpha, \lambda_0^*, 1/2, 1/2}$ は, $G=1$ の場合の $w_1=w_2=1/2$ に対する個別的に optimum な offsets の組の意味である).

何となれば, $Q_\alpha(S_{\alpha, \lambda_0^*, 1/2, 1/2}) = Q_\alpha(\tilde{S}_{\alpha, \lambda_0^*, 1/2, 1/2}) + 2(G-1)$ であるから, (23) が成立てば,

$$\sup_{\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2} Q_\alpha(S_{\alpha, \lambda_0^*, 1/2, 1/2}) \geq 1 + 2(G-1) = G + (G-1) \geq G, \text{ すなわち, (22) が成立つ.}$$

前述の (A), (B) が同時に, 個別的に optimum な信号設定によって達成されるための一つの充分条件が, やはり [3] の場合と同じく成立つ. すなわち, 路線上の交叉点のうち [3] の §3 に述べられたと同じ意味のものを I_{m_0}, I_{n_0} とする時,

[定理2] 若し定理1の条件とともに,

$$\max \left\{ G - \frac{G}{2w_1}, G - \frac{G}{2w_2} \right\} \leq \zeta_{m_0}, \zeta_{n_0}$$

ならば, α_0 と $S_{\alpha_0, \lambda_0^*, w_1, w_2}$ の下での制御によって, (A)とともに(B)も達成する事ができる.

§7 信号体系の組立て

以上単独の交叉点の場合と系統式制御の場合とに分けて, 信号による交通制御に関して

いろ述べてきたが、具体的な应用到っては、上述の結果を利用しつつ、全体の交通系の流れをできる限りスムーズならしめるように信号の体系を組立ててゆかなくてはならない。これは一般的に論じ得る問題ではないが、二、三の場合について考え方を述べてみる。

先づ特に重要な一本の幹線路線があって、これが多くの路線と交叉する場合を考える。かかる場合には、どの交叉点においても、この幹線路線上の流れに対して青信号の時間をより多く割当てゝる事が妥当であろう。先づ各交叉点夫々において、ここを単独に考えた時の信号時間の optimum な割りふりを定める。こうしてきまった各交叉点の青信号の時間のうち一番短いものをとってみる。今の場合、これは信号の $\frac{1}{2}$ サイクルよりも長いであろう。この青信号時間の長さを、各交叉点の共通のものとした場合の、optimum な系統式制御をこの路線に対して決定する。この決定が比較的簡単にできるための条件は § 6 に論じられた通りである。この系統式制御が決定できたなら、その場合の共通の青信号時間を、各交叉点毎に初めに求めてある夫々の optimum なものに手直しする。この手直しにおける offset の決定は試行錯誤的に行なわざるを得ないが、うまくいった場合には、幹線路線上の through bands を一段と拡大できる事になるであろう。

次に路線の第 8 図の様な網の目の場合を取上げてみる。若し横の方向のどの路線でも、向いあった二つの方向の車の来方の相対頻度がほぼ同じ位であり、また縦の方向の路線同志でも同様であれば、横、縦の各方向夫々を [3] に述べられた系統的制御にのせ、しかも全体を組上げる事ができる。すなわち第一行の各交叉点の横の流れの optimum な offsets を y_1, y_2, \dots, y_6 、第一列の各交叉点の縦の流れの optimum な offsets を z_1, z_2, \dots, z_7 、ただし、 $z_1 = y_1 + 1$ 、とする時、第 2、第 3、 \dots 各行の横の流れの offsets として夫々

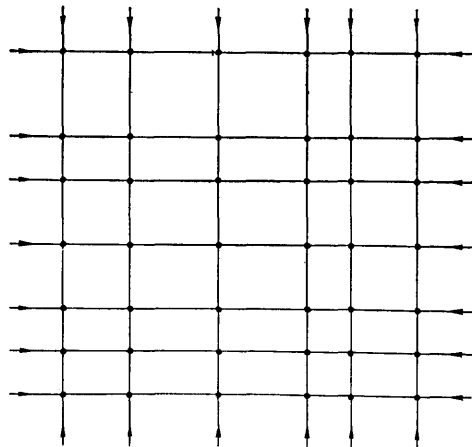
$$\begin{matrix} y_1 + (z_2 - z_1), & y_2 + (z_2 - z_1), & \dots, & y_6 + (z_2 - z_1) \\ y_1 + (z_3 - z_1), & y_2 + (z_3 - z_1), & \dots, & y_6 + (z_3 - z_1) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \end{matrix}$$

第 2、第 3、 \dots 各列の縦の流れの offsets として夫々

$$\begin{matrix} z_1 + (y_2 - y_1), & z_1 + (y_3 - y_1), & \dots & \dots \\ z_2 + (y_2 - y_1), & z_2 + (y_3 - y_1), & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots \\ z_7 + (y_2 - y_1), & z_7 + (y_3 - y_1), & \dots & \dots \end{matrix}$$

をとれば、これにより路線網全体の信号が系統信号（青時間＝赤時間なるもの）として、optimum になるように組上げられる。なお、この場合各路線の交通量の絶対量の多寡も考えるようにし、第一行および第一列の系統式制御をきめるのに青時間 > 赤時間となる事も許して § 6 の結果を利用する事を考えれば、更により制御が得られる事もある。

やはり同じく網の目の路線の場合、縦の方向ないしは横の方向において、向いあった二つの方向の車の来方の相対頻度が路線によってまちまちである場合には（実際問題ではその様な場合が多いであろう）、最早や上に述



第 8 図

べた様な組上げは不可能である。この場合には、路線のうち最も重要なものを縦、横方向に対して選び、それらの optimization のみを行なって他の路線を犠牲にするか、あるいは縦方向と横方向夫々について、その向いあった二方向の路線全体としての相対頻度を考えて、これに比例して through bands の幅の割りふりをするといったやり方をとらざるを得ない。何れにしてもかかる場合には、非常に条件の悪い路線がでてくる事はやむを得ない事である。そのために局部的に渋滞が起る事のない様に、時間と共に制御の仕方をずらしてゆくといったきめのこまかい方法を考えてゆく事が必要と思われるが、これは今後の問題である。

終りに、交通問題の研究を強力に推進していろいろ御指導をいただいた林第2研究部長、石田室長に深く感謝の意を表するものである。また研究の基礎となる日比谷交叉点の実測データを得るに当っては、第2研究部の西平、崎野、鈴木達三、清水、高橋の諸氏、旧研究所員大石、高倉、寺崎、西鳥羽、袖崎、宮田、井上、田熊、坂本、郷古の諸氏の絶大なる御支援をいただいた事をつけ加える次第である。

統計数理研究所

参 考 文 献

- [1] T. Uematu, "On the traffic control at an intersection controlled by the repeated fixed-cycle traffic lights", *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, Vol. IX, No. 2 (1957).
- [2] 植松俊夫・袖崎淑子, "交通制御の問題の統計数理解析 (I)", *統計数理研究所彙報* 9巻1号 (1962).
- [3] 植松俊夫・袖崎淑子, "交通制御の問題の統計数理解析 (II)", *統計数理研究所彙報* 10巻1号 (1962).
- [4] W. Feller, "An introduction to probability theory and its application", Vol. 1, John Wiley & Sons, INC., New York (1950).
- [5] D. V. Lindley, "The theory of queues with a single server", *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, Vol. 48 (1952).