行為決定モデルについての一注意

林　知己夫

(1962 年 12 月 受 付)

Note on Some Problems of Decision Making

Chikio HAYASHI

In the present paper, the author points out that it is misleading to take into consideration only the mean value in a decision model without regards to survival in trials. In § 1, he treats the problem of determining the size of sample in sampling design with taking into consideration both the loss in the survey and the loss in decision making based on the information given by the survey, only the mean value of loss being usually considered, but, here, the variance of it being also taken with the idea of survival in trials. In § 2, he treats the problem concerning with the min.-max. decision model and shows that the idea of min.-max. decision is not always reasonable, because the variance (or survival in trials) is not taken in it and, in some cases, the variane of min.-max. solution is large, and so this idea is often useless in finite games (or business decision). The author also shows a way of thinking in decision problem which is to be used practically.

Institute of Statistical Mathematics

ここでは，サムプリングの問題及びゲーム理論における行為決定モデルについての一注意をのべておこうと思う．このモデルについての注意は，行為の数量化の方法は勿論のこと，数多くあるのであるが，ここではその一つをとりあげてみよう．ここでの要点は，平均（待望値）のみを考えて行為を決定しようとすることは危険であり，当然，ここに，少くとも，分散の概念をもちこまなければならないとするところにある．我々の行為は有限であり，しかも回数の少い行為に関する知識を得ようとするのであるから，無限回試行のいわば平均だけを問題にするのであっては，方途を誤まらせるものがあろう．以下に，この様な考えの下に，少しく考察するところをのべておこう．

1.　サムプリングの問題について．

考え方をのべるのが目的なので問題をきわめて単純化して考えることにする．複雑な場合は，これをつなぎあわせ，計算を行えばよいのである．調査対象の集り(ユニヴァース)の大きさ N, 標識はすべて数値で与えられている，等しい抽出確率 $1/N$ を与えて母集団を構成する，ユニヴァースの算術平均 $\bar{X}$ (母集団平均と数値的に等しい) を推定するために大きさ n の標本を抽出，標本算術平均 $\bar{x}$ によって $\bar{X}$ を推定することにする．N は十分大，n は N にくらべて大きくなく，n も相当大であるとすれば，$\bar{x}$ は近似的に平均 $\bar{X}$, 分散 $(N-n/N-1)(\sigma_X{}^2/n)\doteqdot(\sigma_X{}^2/n)$, $\sigma_X{}^2$ は母集団分散，のガウス分布をする．したがって $(\bar{x}-\bar{X})/(\sigma_X/\sqrt{n})$ は平均 0, 分散 1 のガウス分布をする．さて，$\bar{X}$ を $\bar{x}$ で推定するために，$\bar{x}-\bar{X}$ だけのくいちがいがおこる．このために $\bar{x}$ と言う知識をも

とにして行為したときに損失をうけると考える．これを $L(\bar{x}, \bar{X})$ と書くことにする．($L<0$ ならば得をすると考える)．ここまでのフォーミュレインションはよいとして，L が実際にこの様な状況の下できめられるものであるか，函数の形としては，定性的にいろいろ想像はつくこともあるが，具体的な形をさだめ，それに含まれるパラメーターまでの価をさだめうるものであるか，となるとなかなか容易なことではない．しかし，立場をさだめるならば，数量化の考え方によって求めることは出来ると思われる．しかし，ここが出来なければ，これ以後の考えは空に等しい．したがってこれから論を進めるにあたっても，$L(\bar{x}, \bar{X})$ の函数はこの様にして明確に――勿論操作的意味に理解されなければならない――さだめ得るのだと云う意識を以ていなければ，論ずる資格はない．この点をぬかすと，砂上楼閣の譏をまぬがれない．

まず以て，$L(\bar{x}, \bar{X})$ が $a^2(\bar{x}-\bar{X})^2-b^2$, $a>0$, $b>0$, a, b は一般に $\bar{X}$ の函数，としておこう．さらに簡単に $b^2=0$ としておく．これは a, b を常数とするとき，$\bar{X}$ に対して対称の形となっているが，問題によっては何も対称と云うことにこだわる必要はない．$\bar{x}>\bar{X}$ と思って行動するときはたいした損失はないが，$\bar{x}<\bar{X}$ と思って行動するとき損失は大きいと云うことも考えられることである．どの本にも，この対称な2次式が書かれているのでかえって，固定観念となっている．これが机上の話ですまされているときは，何でもないが，真面目に勇気を以て実際に行動の基準にしようとなると禍は大きくなるので，この固定観念に把われてはならないことに注意しておこう．ここでは，すべてこの辺のところの議論は簡単にすませておくと云う主旨で，先の事を考えることにする．

さてこう考えると $\dfrac{a(\bar{x}-\bar{X})}{a\sigma_{\bar{x}}}$ は平均 0，分散1のガウス分布――$\sigma_{\bar{x}}^2=E(\bar{x}-\bar{X})^2$, N は大，n も大，$N \gg n$ と考えているため――となるから，この二乗は自由度1の χ^2 分布をすることになる．したがって $a^2(\bar{x}-\bar{X})^2$ の分布はただちに $(a, \sigma_{\bar{x}})$ の函数として求められる．さて $a^2(\bar{x}-\bar{X})^2$ の $\bar{x}$ に関する待望値によって平均損失と考えるならば，これは明らかに $a^2\sigma_{\bar{x}}^2$ となる．これは数値的には分散に比例する量（損失）であって，意味的には分散の機能をもつものではない．しかし，あくまでもこれは無限大の試行を想定したときの平均値にすぎない．これだけを用いて行動の基準とすることは危険である．普通の標本調査でも，ある推定値をつくったとき，この平均値がこうなると言うことだけで満足している人はいないのである．我々はなにも無限の試行を考えて行為するのではなく，有限の行為に対する知識を得ようとしているのである．そこで少くとも，損失の分散ぐらいまでは考えに入れておく必要がある．勿論，これとても無限大の試行を仮定した確率をもとにしての論理にすぎないが，一歩進めた段階において無限大がつかわれることになり，いわばプロテクターが一枚入ったことになろう．

これを端的に表現すれば，確率論で有名な破産の問題となる．

第 i 回目の調査にもとづく損失は $Y_i=a^2(\bar{x}-\bar{X})^2$,　i に無関係とする．

破産の問題は

$$(A)\begin{cases} Y_1<S \\ Y_1+Y_2<S \\ Y_1+Y_2+Y_3<S \\ \vdots \\ Y_1+Y_2+\cdots\cdots+Y_{t-1}<S \\ Y_1+Y_2+\cdots\cdots+Y_{t-1}+Y_t \geq S \end{cases}$$

になる確率を求めることになる．これは勿論 n の函数であり，我々としては，この破産の確率一定としたとき，t をなるべく大にする――少数回の試行では破産しない――ことを考えることになる．(A) の両辺を $a^2\sigma_{\bar{x}}^2$ で割れば，左辺は夫々自由度，$1, 2, \cdots t-1$, t の χ^2 分布をすることから，この様なものは，容易に計算できる．這般の考え方は，めずらしいことではなく Shubik の Strategy and Market Structure, Competition, Oligopoly and the Theory of Games, (Developes a theory of games designed especially to deal with economic problems), John Wiley, 1959, にすでにあら

われている．

t を大きくとらずに考える．つまり $Y_1<S$ の段階で考えるとすれば損失として

$$a^2\sigma_{\bar{x}}^2+k\sqrt{\text{Variance}(a^2(\bar{x}-\bar{X})^2)}$$

を考えることが合理的である．$k>0$ であり，ある常数――損失が云々以上にはなってはならない確率は α 以上と云う信頼度を与えることによって，分布の状況から求められる常数――である．

$$\text{Variance } a^2(\bar{x}-\bar{X})^2 \fallingdotseq a^4\sigma^4\left(\frac{\beta_2-3}{n^3}+\frac{2}{n^2}\right)$$

したがって

$$a^2\frac{\sigma^2}{n}+\frac{a^2\sigma^2}{n}k\sqrt{\frac{\beta_2-3}{n}+2}$$

$$=a^2\frac{\sigma^2}{n}\left(1+k\sqrt{\frac{\beta_2-3}{n}+2}\right),\qquad \beta_2 \text{ は母集団の尖度である，}$$

となる．n が大ならば，つまり上述のものが χ^2 分布をするとすれば，$a^2\dfrac{\sigma^2}{n}\left(1+k\sqrt{2}\right)$ となる．

さて，標本数 n とし，一標本を調査するときの費用を c^2 とすれば総損失は

$$c^2n+a^2\frac{\sigma^2}{n}(1+k\sqrt{2})$$

となるからこれを最小にする様に n をきめると云うことになる．第2項は知識にもとづく行動をしたときに見込まれる一応の最大損失であるから総損失は最大損失となる．この考えにたって，我々は k に応じて n をさだめることがより合理的と思われる．

以上の様に考えて，無限大にもとづく平均値だけではなく，その途次のプロセスを考えて，行為決定のモデルをつくるべきであると云う事を示した．

2. ゲームの理論

ミニマックスの考えにしたがって，ゲームの理論（手として確率を与える場合）が考えられることが多い．このミニマックスの考え方はたしかに，合理的な考え方である．しかし，ある人は「この考え方はあまり消極的過ぎる，もっと積極的な考え方がある筈である」と云う．ある観点からすれば，この考え方は，無限の試行を前提とし，取り分（取られ分）の待望値のみを問題にしたものであるから，有限の行為に対する決定を行うに際しての指針としてはむしろ危険を蔵しているとも云われよう．即ち，その行為決定としての確率の附与において，その分散が大になる場合もあり，破産と云う現実的配慮を加えた場合――所謂破産の問題――甚だ危険な場合もおこり得るのである．破産と云うことを考慮しなければ， 競馬必勝の賭け方も強く笑えるものではない． 以上二つの相反した見方，「消極的にすぎる」,「危険である」がともに成立するところに実際的にみた場合のゲームの理論の弱点がある．ここを解決しておかねば，この上に楼閣を築こうとも空に等しい．なおこれが，現実的に深酷な意味をもたぬゲームの世界におけることであれば一応首肯できないこともないが――勿論，このような場合には所謂ミニマックス解以上にオプティマムな考察ができるであろうが――，現実の有限回の行為にもとずく問題（例えばビジネスゲーム）に適用しようとすることは必ずしも合理的ではない．「ゲームは，現象解析のためのモデル作成に対する予備的知識を得るための道具である」と云うことは十分みとめられるのであるが，ミニマックスのみの前提に立つゲームを無条件にビジネス解明の手がかりとすることは上述の論拠により正鵠を欠くものである．前記の Shubik のゲームにおける生き残り（survival）の様なフォーミュレイションが必要であると考えられる．

素朴に考えても，取り分（取られ分）の待望値だけではなく，少くとも，取り分（取られ分）の

分散位は考慮しなくてはならない．分散の大きい手の採用は，我々にとって危険であると考えられるのである（ビジネス経営においては)．しかし，分散の少い手は，我々の手の内をみせることによって敗北を意味することにもなる．この辺の兼合いがフォーミュレイトされねばならないと思われる．

さて，ここでは一つの簡単な例をあげてこの間の事情を考えてみることにする．

ゲームとして甲，乙２人を考え，その取り分（取られ分）――甲が乙からその分だけもらうと云う零和ゲームとする――の行列を次の様にする．甲，乙の出すべき手は２個であるとする．

甲＼乙	a	b
α	1	-2
β	-1	2

このミニマックス解は

$$p_\alpha=\frac{1}{2}=p_\beta$$

$$q_a=\frac{2}{3}\qquad q_b=\frac{1}{3}$$

でゲームの待望値 V は 0 である．

p, q を用い待望値を書いてみると　　$V=(2p_\alpha-1)(3q_a-2)$

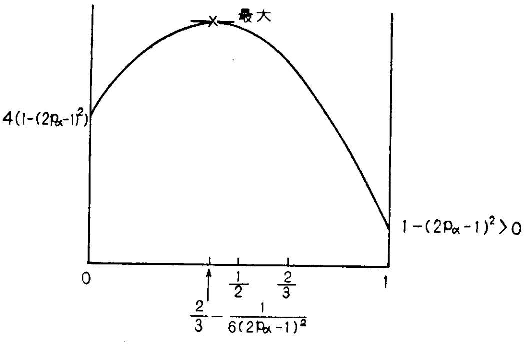
であり，その分散 $\sigma_V{}^2$ は

$$\sigma_V{}^2=4-3q_a-\{(2p_\alpha-1)(3q_a-2)\}^2$$

まず，ミニマックスの解では，分散は $\sigma_V{}^2=4-3q_a$ となり，分散が小となる解ではないことがわかる．q_a を一定とし（$q_a \neq 2/3$）p_α に関して考えれば $p_\alpha=1/2$ は $\sigma_V{}^2$ は最大なものとなる．この様な考えをとると，甲が $p_\alpha=1/2$ をとることに臆病にならざるを得ないと思われる．しかし，もし乙が $q_a=2/3$ となるとき，Vは 0 となり $\sigma_V{}^2=4-3\times 2/3$ になり，甲は自分では分散も待望値もかえられないことになり，甚だ不利である．しかし甲が $p_\alpha=1/2$ とくれば，$V=0$ となり，乙は分散は小さい方がよいので q_a を大にした方が得となると考えるであろう（$q_a>2/3$)．ここまで見透せば甲は $p_\alpha>1/2$ ととり $V>0$ としたいと思うであろう．このときまた $\sigma_V{}^2$ はますます小となるからである．逆に乙がここまで見とおせば $q_a=2/3$ まで確率を下げてくることになる．しかし，さらに下げると $p_\alpha>1/2$ のとき $q_a<2/3$ とすれば $V<0$ となり乙は得をしてのぞましいことになるが，

$$q_a=\frac{2}{3}-\frac{1}{6(2p_\alpha-1)^2},\quad (p_\alpha(\neq 1/2)\text{ に応じて，}1\geqq q_a\geqq 0\text{ の範囲で考える})$$

で $\sigma_V{}^2$ が最大になるので，ここまでは下げられない（q_a の値の最大は 1/2 であるから 1/2 以下に下げることは合理的ではない)．左図でわかる通り q_a は 1 より小となれば分散は大となるので，この場合とても 2/3 をさらに下まわることはうまい考え方ではなかろう．一方 $q_a<2/3$ となれば当然これに応じて $p_\alpha<1/2$ も考えられてくることになる．以上の様な工合で乙が分散の小をねらい q_a を 2/3 と 1 との間を往復させると甲は p_α は1/2 と 1 との間を往復させ，さらに，また，これに応じて q_a は 2/3 より少し下まわって得をする様な思考をすることもあるし，p_α もそれに応じて 1/2 を少し下まわる手を出すと云うことも考えられるのである．

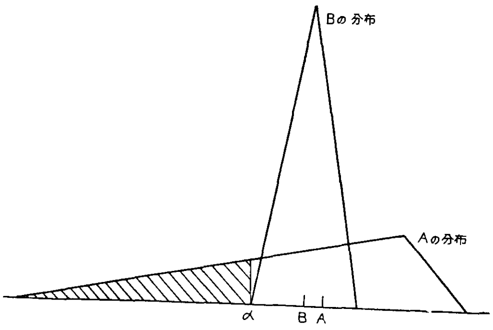


分散まで問題にし，１回の行為を問題にするとき，とるべき合理的な手としてはミニマックス解ではないことが了解せられよう．

取り分（取られ）の変動を考えるとすれば

甲は，取り分，　$V-k\sigma_V$　　が最も大となる様に
乙は，取られ分，$V+k\sigma_V$　　が最も小となる様に　（k はある正の常数）

考えて，手を出すことが妥当と思われる．つまり，同じ量を甲，乙がミニマックスで考えて手をきめると云うことではなしに，異った量を頭において手をきめることになるのである．なお，何回かの試行後の取り分，取られ分を考えても全く同様に考えを進められるのである．S回の試行後を考えれば，$SV-k\sqrt{S}\sigma_V$，$SV+k\sqrt{S}\sigma_V$ を考えることになる．なお，1回ごとにやりとりをして破産の問題とすることも勿論可能である．こう考えれば，V だけで議論することの危険性が明確になろう．



左図において解かる様に，平均値においては，$A>B$ であり，取り分を多くしようとするとき平均 A を示すものが得策の様であるが，平均 A をもつものが，分散が大であれば α 以下になる確率が相当あり，むしろ，平均 B をもつものの方が手固く，得策になるとも考えられるのである．

今 $k=10$，5 について $V+k\sigma_V$ を図化してみよう．(次頁，次々頁参照)．乙はこれを小にする様な行為をとるのである．p_α による変化をみるとき，q_α をどの程度 2/3 をもとにして動かすべきかの様相が把握できよう．p_α が 1/2 といちぢるしく下らないとき，この値は q_α 一定とするとき，p_α の変化に鈍感である．この点，乙は手をきめやすい．さて q_α を 2/3 より小にするとき，p_α が小のときVは負となり小となるが σ_V が増大し，$V+k\sigma_V$ はそう小とならなくなるのである．また，ある p_α について考えてみるに，$V+k\sigma_V$ が最も小となるのは，$q_\alpha=2/3$ ではないことが，容易にわかるのである．次頁の図及び V,σ_V と q_α, p_α との関係を検討して考えてみるとき，乙としては「危からず」としては，q_α を 2/3 より大にとるのが一般に妥当な行為となることが了解されよう．$q_\alpha>2/3$ であり，$p_\alpha>1/2$ のとき，$V>0$ となるが σ_V が大とならぬと云う点からみて，$V+k\sigma_V$ は大とならず，むしろ乙は有利なことがわかる．とくに $p_\alpha=0$ とか $p_\alpha=1$ とかのきわめて特種の場合をのぞき，$V+k\sigma_V$ を小にするのは，一般に $q_\alpha>2/3$ の方がのぞましくなるのである．乙のとるべき手の方向として 2/3 より小にする場合は，甲の大にしたいところの $V-k\sigma_V$ を小にすることが出来るが，これは乙の取り分の変化の幅の許容性から決定さるべきものであろう．また，綜合して，乙としては (乙+(−甲))=(乙−甲) を問題にする (小さくしようとする)，或は (α乙$-\beta$甲)——ここに，乙，甲と云うのは夫々 $V+k\sigma_V$，$V-k\sigma_V$ であり $\alpha+\beta=C$ (常数) とする——を問題にするのであれば，前者は分散のみ問題となり，後者は $(\alpha-\beta)V+Ck\sigma_V)$ を問題にする (小さくしようとする) ことになり，全く同様に議論することが出来る．

次に甲の取り分 $V-k\sigma_V$ をみよう．グラフから直ちにわかる様に $q_\alpha=0$ と云った極限的な場合をのぞいて，一般に q_α が大となると取り分が大になる．つまり乙が自己に有利な手を出そうとすると，甲も有利になることがわかる．しかし，甲は自分の手の出し方によって取り分をそういちぢるしく変化させ得ないと云うことがわかる．即ちこの意味でゲームの主導権は乙に，にぎられていると云うことがわかる．これは全く不利なことで，この点で甲はゲームを行いたくないとさえ思うであろう．(とくに，$p_\alpha=1/2$ のときは全く乙の一人角力となる)．この様なことを考えるとき，自己の保有財産によってとるべき手を異にする破産の問題として取扱うならば甲は特に不利である．

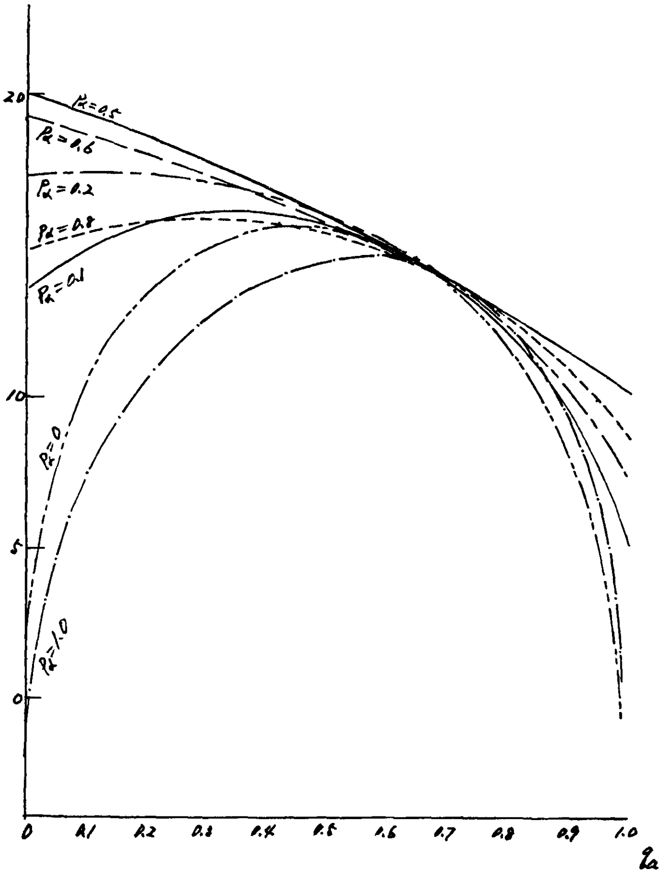
なお，参考のため，V と σ_V とを計算しておくが，一般的にみて，σ_V のオーダーが V にくらべて大きいことがわかる．こうみると，上に示した通り，大事な所で σ_V を大きく左右する力のない甲にとっては，これは有利なゲームではないと思われる．こうした考察にもとづけば，むしろ甲はゲームを行わない方が望ましいことになるのである．

p_α, q_α にもとづく平均値 V と標準偏差 σ_V の表

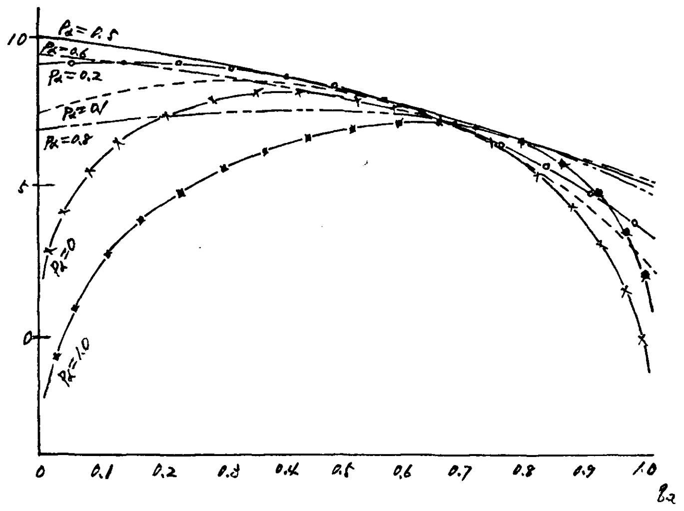
p_α \ q_α	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	2.00 0	1.70 0.90	1.40 1.20	1.10 1.38	0.80 1.47	0.50 1.50	0.20 1.47	−0.10 1.38	−0.40 1.20	−0.70 0.90	−1.00 0
0.1	1.60 1.20	1.36 1.36	1.12 1.47	0.88 1.53	0.64 1.55	0.40 1.53	0.16 1.48	−0.08 1.38	−0.32 1.22	−0.56 0.99	−0.80 0.60
0.2	1.20 1.60	1.02 1.63	0.84 1.64	0.66 1.63	0.48 1.60	0.30 1.55	0.12 1.48	−0.06 1.38	−0.24 1.24	−0.42 1.06	−0.60 0.80
0.4	0.40 1.96	0.34 1.89	0.28 1.82	0.22 1.75	0.16 1.67	0.10 1.58	0.04 1.48	−0.02 1.38	−0.08 1.26	−0.14 1.13	−0.20 0.98
0.5	0 2.00	0 1.92	0 1.84	0 1.76	0 1.67	0 1.58	0 1.48	0 1.38	0 1.27	0 1.14	0 1.00
0.6	−0.40 1.96	−0.34 1.89	−0.28 1.82	−0.22 1.75	−0.16 1.67	−0.10 1.58	−0.04 1.48	0.02 1.38	0.08 1.26	0.14 1.13	0.20 0.98
0.8	−1.20 1.60	−1.02 1.63	−0.84 1.64	−0.66 1.63	−0.48 1.60	−0.30 1.55	−0.12 1.48	0.06 1.38	0.24 1.24	0.42 1.06	0.60 0.80
1.0	−2.00 0	−1.70 0.90	−1.40 1.20	−1.10 1.38	−0.80 1.47	−0.50 1.50	−0.20 1.47	0.10 1.38	0.40 1.20	0.70 0.90	1.00 0

上段： V,　　下段： σ_V

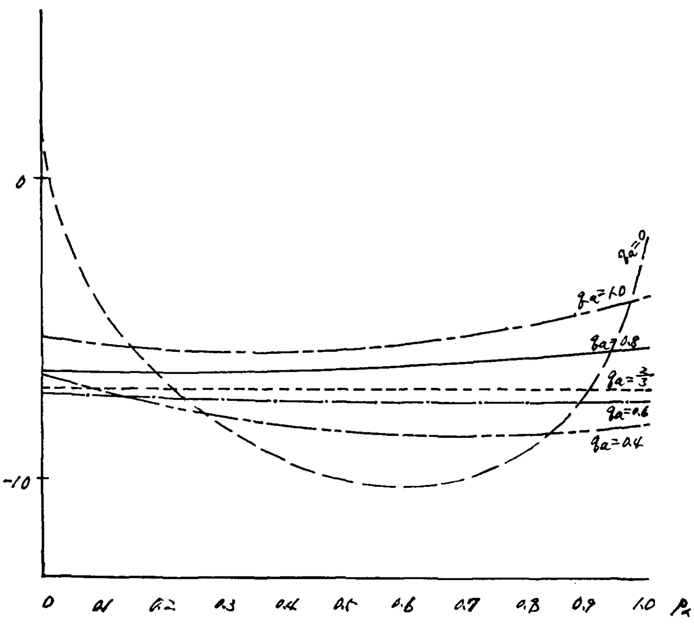
乙の取られ分　その 1　　$V+k\sigma_V$, $k=10$



乙の取られ分 その 2 $V+k\sigma_V$, $k=5$



甲の取り分 $V-k\sigma_V$, $k=5$



深酷な問題における有限回しか行わぬ行為決定においては，ミニマックスの考えは，安全な立場のものではないことを繰返し強調しておこう．

統計数理研究所