回帰係数に関する同時信頼区間について*

塩 谷 実
川 上 尚 子

(1962 年 8 月 受 付)

Simultaneous Confidence Interval Estimation on Regression Coefficients

Minoru SIOTANI and Hisako KAWAKAMI

Summary: Simultaneous interval estimation for the given set of linear forms of the regression coefficients in the normal regression analysis is discussed in this paper. This is immediately reduced to one of the problems of multiple comparisons among means of a multivariate normal distribution. The problem has been treated by many authors, especially, by Dunn (1958, [1]; 1961, [2]), Hartley (1950, [4], Scheffé (1953, [8]) and Tukey (1952, [11]).

First, an outline of the results already known is given explanatorily but in a unifying form. After this explanation, the method for obtaning the shorter confidence intervals for the preassigned set of the regression coefficients (with a predetermined simultaneous confidence coefficient) is shown. This is the one which makes Dunn's recent work [2] more precise. Finally illustrative examples are given with some comparisons among various methods.

The Institute of Statistical Mathematics

§ 1. 今迄に知られている回帰係数に関する区間推定**

問題を明らかにするため，今迄に知られている方法をざっと見てゆく．但し説明はできるだけ統一的な形で行なわれるように心掛けられる．

確率変数 y が，平均

$$E(y)=a_1z_1+a_2z_2+\cdots+a_kz_k \tag{1}$$

分散

$$\mathrm{Var}(y)=\sigma^2 \tag{2}$$

の正規分布に従う時，N 個の観測

$$O_N:\ y_\alpha \mid z_{1\alpha},\ z_{2\alpha}, \cdots, z_{k\alpha},\quad \alpha=1, 2, \cdots, N$$

に基いて回帰係数 $a_1, \cdots, a_k$ を推定する場合を考える．以下記述を簡明にするため，ベクトル，行列表示を用いよう．

$$\underline{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} \qquad \underline{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix} \qquad Z=\begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1N} \\ z_{21} & z_{22} & \cdots & z_{2N} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ z_{k1} & z_{k2} & \cdots & z_{kN} \end{pmatrix}$$

---

* これは昭和 36 年度文部省科学研究費による研究の一部である．

** multiple comparisons に関する説明が，吾が国では，充分行われているとは筆者達には思われないので，ここでは説明的な記述をおこなう．

転置行列，横ベクトルはプライムを附して表わし，逆行列は A^{-1} の如く書く．$Z: k\times N$ は確定変数の行列で，計画行列と呼ばれることもあり，われわれには既知である．今 Z のランク（階数）を k とすれば，

$$\underline{\hat{a}}=(ZZ')^{-1}Z\underline{y} \tag{3}$$

は $\underline{a}$ の最尤推定値で，最良不偏線型推定値を与えることはよく知られている．更に $\underline{\hat{a}}$ の分布は，平均 $\underline{a}$，分散共分散行列 $\sigma^2(ZZ')^{-1}$ をもつ k 変数正規分布であり，かつ，σ^2 の不偏推定値

$$s^2=\frac{1}{N-k}(\underline{y}-Z'\underline{\hat{a}})'(\underline{y}-Z'\underline{\hat{a}})$$

$$=\frac{1}{N-k}(\underline{y}'\underline{y}-\underline{\hat{a}}'ZZ'\underline{\hat{a}}) \tag{4}$$

とは統計的に独立である．また $(N-k)s^2/\sigma^2$ は，自由度 $N-k$ の χ^2–分布に従っている．（以上の結果は例えば，[12] の第8章，第2節をみよ．）

以上の結果を利用して，次のような $a_1, a_2, \cdots, a_k$ に対する信頼区間が求められている．

（I）　任意の a_i に対する信頼区間：

$$ZZ'\equiv C \tag{5}$$

と表わし，C^{-1} の (i, j) 要素を c^{ij} とすると

$$t=\frac{\hat{a}_i-a_i}{\sigma\sqrt{c^{ii}}}\bigg/\frac{s}{\sigma}=\frac{\hat{a}_i-a_i}{s\sqrt{c^{ii}}}$$

が自由度 $n\equiv N-k$ の Student の t–分布に従うことより，信頼係数 $1-\gamma$ の信頼区間 $(0<\gamma<1)$

$$\hat{a}_i-t_n(\gamma)s\sqrt{c^{ii}}\leqq a_i\leqq\hat{a}_i+t_n(\gamma)s\sqrt{c^{ii}} \tag{6}$$

を得る．$t_n(\gamma)$ は自由度 n の t–表にある $100\gamma\%$ 点である．

実際のデータ解析において，各 a_i を，個別に（6）のように区間推定することが屢々行なわれるが問題としては $a_1, a_2, \cdots, a_k$ が同時に推定されるのであり，（6）のような区間を k 個つくっても全体として考えた場合，信頼係数がいくらかはっきりしない．$\hat{a}_1, \hat{a}_2, \cdots, \hat{a}_k$ が必らずしも独立ではないからである．

次に $a_1, \cdots, a_k$ の同時の区間推定を考えよう．

（II）　$a_1, a_2, \cdots, a_k$ 全部に対する信頼領域：　これには，$\underline{\hat{a}}$ の分布が，平均 $\underline{a}$，分散・共分散行列 σ^2C^{-1} の k 変数正規分布であり，従って，

$$(\underline{\hat{a}}-\underline{a})'(\sigma^2C^{-1})^{-1}(\underline{\hat{a}}-\underline{a})=\frac{1}{\sigma^2}(\underline{\hat{a}}-\underline{a})'C(\underline{\hat{a}}-\underline{a})$$

が自由度 k の χ^2–分布に従い，更に，

$$F=\frac{\frac{1}{\sigma_2}(\underline{\hat{a}}-\underline{a})'C(\underline{\hat{a}}-\underline{a})/k}{s^2/\sigma^2}=\frac{(\underline{\hat{a}}-\underline{a})'C(\underline{\hat{a}}-\underline{a})}{ks^2} \tag{7}$$

が自由度 (k, n) の F–分布に従うことを利用すればよい．与えられた $\gamma(0<\gamma<1)$ に対して

$$P_r\{F>F_{k,n}(\gamma)\}=\gamma$$

なる $F_{k,n}(\gamma)$ を F–表から求めれば，

$$(\underline{\hat{a}}-\underline{a})'C(\underline{\hat{a}}-\underline{a})\leqq ks^2F_{k,n}(\gamma) \tag{8}$$

が，信頼係数 $1-\gamma$ の $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 全部に対する信頼領域を与える．しかし，(8) の内容を更に立ち入って調べてみれば，これはこれでまた実際にそぐわない点をもっている．公式

$$(\underline{\hat{a}}-\underline{a})'C(\underline{\hat{a}}-\underline{a})=\operatorname*{Sup}_{\underline{d}}\{\underline{d}'(\underline{\hat{a}}-\underline{a})(\underline{\hat{a}}-\underline{a})'\underline{d}/\underline{d}'C^{-1}\underline{d}\} \tag{9}$$

に注意すれば，(8) は，すべての $\underline{0}$ でない $\underline{d}$ に対する

$$\frac{\underline{d}'(\underline{\hat{a}}-\underline{a})(\underline{\hat{a}}-\underline{a})'\underline{d}}{\underline{d}'C^{-1}\underline{d}}\leqq ks^2F_{k,n}(\gamma)$$

即ち，$\underline{0}$ でないすべての $\underline{d}$ に対する区間群

$$\underline{d}'\hat{\underline{a}}-s\sqrt{kF_{k,n}(\gamma)}\sqrt{\underline{d}'C^{-1}\underline{d}} \leqq \underline{d}'\underline{a} \leqq \underline{d}'\hat{\underline{a}}+s\sqrt{kF_{k,n}(\gamma)}\sqrt{\underline{d}'C^{-1}\underline{d}} \qquad (10)$$

と全く同等であり，従って，これらが全部成立する確率は $1-\gamma$ に等しい．(10) は Scheffé [8] の与えた結果で，$\underline{a}$ の成分のすべての一次式に対する同時信頼区間である．しかし現実の問題としては，それぞれの場に適合した特定の $\underline{d}'\underline{a}$ の組（特定の $\underline{d}$ の値に対する組）だけを対象とした同時信頼区間が要求されることが屢々である．この場合，(10) を使用してゆくと，信頼係数は $\geqq 1-\gamma$ と安全側になるが，(10) が，今の問題に対しては意味をもたないものまで全部含めた区間であることからわかる如く，区間の巾が広がり過ぎ，推定の意味がなくなってしまう恐れが充分考えられる．

(Ⅲ) $\underline{d}'\underline{a}$ の特定の組に対する同時信頼区間の例：　これは $C^{-1}=(1-\rho)I+\rho\underline{1}\,\underline{1}'$ と特別の形をもつときのもので，すべての i, j に対する

$$a_i-a_j \quad (i<j)$$

の同時信頼区間で，Hartley [4]，Tukey [11] の結果である．回帰係数に対するものとしてでなく，分散分析における平均値の多重比較に関連して与えられたものである．記号 I は単位行列，$\underline{1}$ は成分が全部1のベクトル，$\rho>-1/(k-1)$ である．結果は

$$\hat{a}_i-\hat{a}_j-s\sqrt{1-\rho}\,w_n(\gamma;k) \leqq a_i-a_j \leqq \hat{a}_i-\hat{a}_j+s\sqrt{1-\rho}\,w_n(\gamma;k) \qquad (11)$$

で，i, j の $1/2\,k(k-1)$ 個の組に対して，(11) が全部成り立つ同時の信頼係数が $1-\gamma$ である．ここに，$w_n(\gamma;k)$ は，$\hat{a}_i-a_i$, $i=1,2,\cdots,k$ の studentized range $w_n(k)=\max_{i<j}\{|\hat{a}_i-\hat{a}_j-a_i+a_j|/s\sqrt{1-\rho}\}$ の $100\gamma\%$ 点である．

(Ⅳ) Dunn の同時信頼区間：$\hat{\underline{a}}$ の分布が，平均 $\underline{a}$，分散・共分散行列 σ^2C^{-1} をもつ k 変数正規分布であることは既にみた．O. J. Dunn [1] は，一つの多変数正規分布の平均ベクトルの各成分につき，分散・共分散行列に条件を附した後，同時信頼区間のいくつかの型を論じているが，$\hat{a}_i$ についても勿論通じるものである．更に，彼女は最近 [2]，この論文で取り扱う問題に密接に関係のある議論を行なっている．これについては，次節のいろいろの議論の中でふれてゆく．

§ 2.　有限個の a_i の一次函数に関する同時信頼区間

同時信頼区間が要求されている $a_1, a_2, \cdots, a_k$ の一次函数の組を

$$\theta_i \equiv \underline{p}_i'\underline{a}=p_{i1}a_1+p_{i2}a_2+\cdots+p_{ik}a_k \quad (i=1,2,\cdots,m) \qquad (12)$$

とする．$\underline{p}_i$ はあらかじめ与えられた定数ベクトルである．

2.1　区間設定の筋道

$$\hat{\theta}_i \equiv \underline{p}_i'\hat{\underline{a}}=p_{i1}\hat{a}_1+p_{i2}\hat{a}_2+\cdots+p_{ik}\hat{a}_k \quad (i=1,2,\cdots,m), \qquad (13)$$

を考える．これらは

$$E(\hat{\theta}_i)=\theta_i,\ \mathrm{Var}(\hat{\theta}_i)=\sigma^2\underline{p}_i'C^{-1}\underline{p}_i \quad (i=1,2,\cdots,m), \qquad (14)$$

をもつ m 個の正規変数である．故に σ^2 の不偏推定値 $s^2((4))$ を用いて，自由度 $n\equiv N-k$ の t-分布に従う m 個の変数

$$t_i=\frac{\hat{\theta}_i-\theta_i}{s\sqrt{\underline{p}_i'C^{-1}\underline{p}_i}}=\frac{p_i'(\hat{\underline{a}}-\underline{a})}{s\sqrt{\underline{p}_i'C^{-1}\underline{p}_i}}, \qquad (i=1,2,\cdots,m) \qquad (15)$$

を得る．さて，任意の $i(i=1,2,\cdots,m)$ に対して

$$|t_i|=\left|\frac{\hat{\theta}_i-\theta_i}{s\sqrt{\underline{p}_i'C^{-1}\underline{p}_i}}\right| \leqq g, \quad (g>0)$$

または，これと同等である

$$t_i^2=\frac{(\hat{\theta}_i-\theta_i)^2}{s^2\underline{p}_i'C^{-1}\underline{p}_i}=\frac{\underline{p}_i'(\hat{\underline{a}}-\underline{a})(\hat{\underline{a}}-\underline{a})'\underline{p}_i}{s^2\underline{p}'C^{-1}\underline{p}_i}\leqq g^2 \tag{16}$$

を考える．すべての i について，(16) を考えた時，($\hat{\underline{a}}$, $\underline{a}$, s^2, C 及び g をとめて考える)

$$\text{all } t_i^2\leqq g^2 \Longleftrightarrow \max_i\{t_i^2\}\leqq g^2 \tag{17}$$

である．故に与えられた γ に対して

$$t^2_{\max}\equiv\max_i\{t_i^2\} \tag{18}$$

の分布の上方 $100\gamma\%$ 点，即ち，

$$P_r\{t^2_{\max}>t^2_{\max}(\gamma;n,m)\}=\gamma \tag{19}$$

なる $t^2_{\max}(\gamma;n,m)$ を，(16) の g^2 として用いれば，

$$\begin{aligned}1-\gamma&=P_r\{t^2_{\max}\leqq(t^2_{\max}\gamma;n,m)\}\\&=P_r\{\text{all } t_i^2\leqq t^2_{\max}(\gamma;n,m)\}\\&=P_r\{\text{all}|t_i|\leqq t_{\max}(\gamma;n,m)\}\\&=P_r\left\{\text{all}\left|\frac{\underline{p}_i'(\hat{\underline{a}}-\underline{a})}{s\sqrt{\underline{p}_i'C^{-1}\underline{p}_i}}\right|\leqq t_{\max}(\gamma;n,m)\right\}\\&=P_r\{\underline{p}_i'\hat{\underline{a}}-s\,t_{\max}(\gamma;n,m)\sqrt{\underline{p}_i'C^{-1}\underline{p}_i}\\&\quad\leqq\underline{p}_i'\underline{a}\leqq\underline{p}_i'\hat{\underline{a}}+s\,t_{\max}(\gamma;n,m)\sqrt{\underline{p}_i'C^{-1}\underline{p}_i}:\text{for all } i\}\end{aligned} \tag{20}$$

が得られる．(20) の m 個の区間が，同時信頼係数 $1-\gamma$ をもつ求める同時信頼区間である．各区間の巾は，

$$s\,t_{\max}(\gamma;m,n)\sqrt{\underline{p}_i'C^{-1}\underline{p}_i} \tag{21}$$

の2倍である．

以上の区間設定の原理は，Roy-Bose [7] の union-intersection principle で，先ず各 i について出来るだけよい性質をもつ信頼区間をつくり，これを充す標本空間の集合の intersection をとり，その確率が与えられた $1-\gamma$ になるようにきめてゆくのである．われわれの $|t_i|\leqq g$ により導かれる $\underline{p}_i'\underline{a}$ に対する区間は，Lehmann [5] の意味で，most accurate unbiased confidence interval であることを注意しておく．

2.2 $t_{\max}(\gamma:n,m)$ の評価

$\theta_i=\underline{p}_i'\underline{a}$, $i=1,2,\cdots,m$ に対する，同時信頼係数が $1-\gamma$ なる同時信頼区間は

$$\hat{\theta}_i-L_i\leqq\theta_i\leqq\hat{\theta}_i+L_i \tag{22}$$

$$L_i=s\,t_{\max}(\gamma;n,m)\sqrt{\underline{p}_i'C^{-1}\underline{p}_i} \tag{23}$$

と書かれたのであるが，$t_{\max}(\gamma;n,m)$ が評価できなければ実用にならない．(12) の一次式が一次独立ならば，$t_{\max}(\gamma;n,m)$ は，m 個の t_i の同時分布の密度函数を $f_n(t_1,\cdots,t_m)$ として

$$\int_{-c}^{c}\cdots\int_{-c}^{c}f_n(t_1,\cdots,t_m)dt_1dt_2\cdots dt_m=1-\gamma \tag{24}$$

を充す c の値となるが，m の値が3を越すと評価が極めて困難である．

われわれは，あらかじめ与えられた m に対して $t_{\max}(\gamma;n,m)$ を評価しなければならない．しかし，$t^2_{\max}$ の正確な分布を知ることは，t_i^2 が互に独立でないことからわかる如く，一般に困難である．そこで当面の問題である $t_{\max}(\gamma;n,m)$ の評価には，$t^2_{\max}$ の分布の右すその部分だけに着目し，ここの確率を評価することによって行なうことを考える．この方針の下に，確率論における基本公式

$$P_r\{t^2_{\max}>c^2\}=\sum_{i=1}^{m} P_r\{t_i^2>c^2\}-\sum_{i<j} P_r\{t_i^2>c^2,\ t_j^2>c^2\}$$
$$+\sum_{i<j<k} p_r\{t_i^2>c^2,\ t_j^2>c^2,\ t_k^2>c^2\}-\cdots \tag{25}$$

を適用する．$1-\gamma$ が大きく，従って，γ が小さい時は $t^2_{\max}(\gamma;n,m)$ は分布の右すその方の値となる． 故に，(25) の左辺は，右辺の最初の一，二項によって，実用のためには充分な精度で近似されるので，これを利用するのである．

(25) の右辺を評価するためには，t_i^2 あるいは，t_i の2個，3個，…の組の同時分布が必要である．しかし，同時信頼区間を与えるべき m 個の一次式 $\theta_i=\underline{p}_i'\underline{a}$, $i=1,2,\cdots,m$ は，必らずしも一次独立ではない．すなわち，$\underline{p}_i$ を列にもつ $k\times m$ の行列 $\{\underline{p}_1,\ \underline{p}_2,\cdots,\underline{p}_m\}$ の階数は $\leqq\min(k,m)$ である．故に $t_i's$ の同時分布といっても，その中の一次独立なものの同時分布であり，これにより確率が評価されるのである．例えば

$$\theta_1=a_1-a_2,\ \theta_2=a_2-a_3,\ \theta_3=a_1-a_3$$

の時は

$$t_1=(\hat{\theta}_1-\theta_1)/s\sqrt{C^{11}-2\,C^{12}+C^{22}},\qquad t_2=(\hat{\theta}_2-\theta_2)/s\sqrt{C^{22}-2\,C^{23}+C^{33}},$$
$$t_3=(\hat{\theta}_3-\theta_3)/s\sqrt{C^{11}-2\,C^{13}+C^{33}}$$

で

$$t_3=(t_1\sqrt{C^{11}-2\,C^{12}+C^{22}}+t_2\sqrt{C^{22}-2C^{23}+C^{33}})/\sqrt{C^{11}-2\,C^{13}+C^{33}}$$

であるから，$P_r\{t_1^2>c^2,\ t_2^2>c^2,\ t_3^2>c^2\}$ は t_1 と t_2 の同時分布から評価される．

今 $t_1,\ t_2,\cdots,t_\nu$ を一次独立な ν 個の組とし，これの同時分布を考える．$\hat{\theta}_1,\ \hat{\theta}_2,\cdots\hat{\theta}_\nu$ が ν 変数正規分布をもつことに注意すれば，求める分布は，所謂，ν 変数 t-分布 (Dunnet-Sobel [3]) で，その密度函数は

$$f_n(t_1,\ t_2,\cdots,t_\nu)=\frac{\Gamma\left[\dfrac{1}{2}(n+\nu)\right]}{|P|^{\frac{1}{2}}(n\pi)^{\frac{1}{2}\nu}\,\Gamma\left(\dfrac{1}{2}n\right)}\left[1+\frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^{\nu}\rho^{ij}t_it_j\right]^{-\frac{1}{2}(n+\nu)} \tag{26}$$

である．ここに

$$\rho_{ij}=\frac{\underline{p}_i'C^{-1}\underline{p}_j}{\sqrt{\underline{p}_i'C^{-1}\underline{p}_i}\sqrt{\underline{p}_j'C^{-1}\underline{p}_j}}\qquad i,\ j=1,2,\cdots,\nu \tag{27}$$

$$P=(\rho_{ij}),\quad P^{-1}=(\rho_{ij})^{-1}=(\rho^{ij}) \tag{28}$$

である．

$$P_r\{t_i^2>c^2\}=P_r\{t_i>c\}+P_r\{t_i<-c\}=2\,P_r\{t_i>c\}$$
$$=2\int_c^\infty S_n(t)dt \tag{29}$$

ここに，$S_n(t)$ は自由度 n の Student の t-分布の密度函数である．

$$P_r\{t_i^2>c^2,\ t_j^2>c^2\}=P_r\{t_i>c,\ t_j>c\}+P_r\{t_i>c,\ t_j<-c\}$$
$$+P_r\{t_i<-c,\ t_j>c\}+P_r\{t_i<-c,\ t_j<-c\}$$
$$=2\cdot P_r\{t_i>c,\ t_j>c\}+2\cdot P_r\{t_i>c,\ t_j<-c\}$$
$$=2\left[\int_c^\infty\int_c^\infty+\int_c^\infty\int_{-\infty}^{-c}\right]f_n(t_i,t_j)dt_idt_j \tag{30}$$

但し，(26) より

$$f_n(t_i,t_j)=\frac{1}{2\,\pi\sqrt{1-\rho_{ij}^2}}\left[1+\frac{t_i^2-2\,\rho_{ij}t_it_j+t_j^2}{n(1-\rho_{ij}^2)}\right]^{-\frac{1}{2}(n+2)} \tag{31}$$

であるが，一般に ρ_{ij} は一定でなく，このため $\sum_{i<j}P_r\{t_i^2>c^2,\ t_j^2>c^2\}$ の評価をわずらわしいもの

とする．t_i が3つ以上の場合も同様にやればよいが，わずらわしさは更に大きくなろう．

さて $t^2{}_{\max}(\gamma;n,m)$ を実際に評価する手順を示そう．

［手順 1］ 第1近似を求めること．$P_r\{t^2{}_{\max}>c^2\}$ を (25) の右辺第1項だけで近似して

$$m\cdot P_r\{t_1{}^2>c^2\}=\gamma$$

即ち

$$\int_c^\infty S_n(t)dt=\gamma/(2m) \tag{32}$$

を充す c^2 を $t^2{}_{\max}(\gamma;n,m)$ の第1近似と名付け $c_1{}^2(\gamma;n,m)\equiv c_1{}^2(\gamma)$ で表わす．

Dunn の Bonferroni の不等式にもとずく結果は，この第1近似によるもので

$$\begin{aligned} P_r\{-c_1(\gamma)\leqq t_i\leqq c_1(\gamma),\ i=1,2,\cdots,m\} &\\ =P_r\{t^2{}_{\max}\leqq c_1{}^2(\gamma)\} &\\ \geqq 1-m\cdot P_r\{t_1{}^2>c_1{}^2(\gamma)\} &\\ =1-\gamma & \end{aligned} \tag{33}$$

である．([1] の § 6.2; [2] の § 2) これは (25) の右辺で，第2項以下を考慮する時に生ずる計算のわずらわしさを避けるものであるが，信頼区間の区間巾の点における損失も当然覚悟しなければならない．Dunn が行なっている，Scheffé の区間との比較で示される如く ([2] の第3表)，k の小さい時，m が大きい時特にひどくなる．われわれは第1近似を用いた時の誤差評価に進もう．

［手順 2］ 第1近似の誤差を評価すること．このためには，Bonferroni の不等式

$$\sum_{i=1}^m P_r\{t_i{}^2>c^2\}-\sum_{i<j}^m P_r\{t_i{}^2>c^2,\ t_j{}^2>c^2\}\leqq P_r\{t^2{}_{\max}>c^2\}\leqq\sum_{i=1}^m P_r\{t_i{}^2>c^2\} \tag{34}$$

を利用する．$c^2=c_1{}^2(\gamma)$ とおいて

$$-\sum_{i<j}^m P_r\{t_i{}^2>c_1{}^2(\gamma),\ t_j{}^2>c_1{}^2(\gamma)\}\leqq P_r\{t^2{}_{\max}>c_1{}^2(\gamma)\}-\gamma\leqq 0 \tag{35}$$

となるので，

$$\delta(\gamma,m)\equiv\sum_{i<j}^m P_r\{t_j{}^2>c_1{}^2(\gamma),\ t_j{}^2>c_1{}^2(\gamma)\} \tag{36}$$

を評価すればよいことになる．これが無視できる程小さいならば

$$t^2{}_{\max}(\gamma;n,m)\approx c_1{}^2(\gamma;n,m)$$

とするのである．もし無視できなければ，(29) の第2項まで考慮しなければならない．

［手順 3］第2近似を求めること．

普通のやり方では

$$\sum_{i=1}^m P_r\{t_i{}^2>c^2\}-\sum_{i<j}^m P_r\{t_i{}^2>c^2,\ t_j{}^2>c^2\}=\gamma \tag{37}$$

を充す c^2 を求めるのであるが，—$c_2{}^2(\gamma)$ と書く—，これは $t^2{}_{\max}(\gamma;n,m)$ の underestimate を与えること，$c_1{}^2(\gamma)$ に対して計算された $\delta(\gamma,m)$ を利用すると，分布の右すその部分で第1図に示すような事情があることを考慮して次の方法を採用する．すなわち

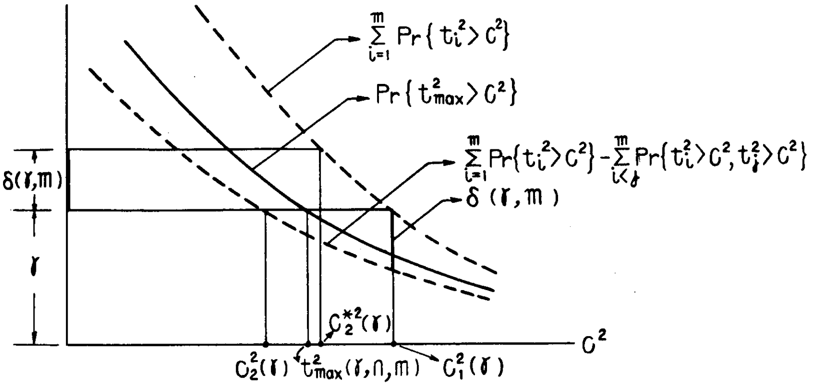
$$m\cdot P_r\{t_1{}^2>c_2{}^{*2}(\gamma)\}=2m\int_{c_2{}^*(\gamma)}^\infty S_n(t)dt=\gamma+\delta(\gamma,m) \tag{38}$$

を充す $c_2{}^{*2}(\gamma)$ を第2近似として用いる．

$$c_2{}^2(\gamma)\leqq c_2{}^{*2}(\gamma)\leqq c_1{}^2(\gamma) \tag{39}$$

は容易に分る．実際 $c_1{}^2(\gamma)\geqq c_2{}^2(\gamma)$ より

$$\sum_{i<j}^m P_r\{t_i{}^2>c_2{}^2(\gamma),\ t_j{}^2>c_2{}^2(\gamma)\}\geqq\sum_{i<j}^m P_r\{t_i{}^2>c_1{}^2(\gamma),\ t_j{}^2>c_1{}^2(\gamma)\}=\delta(\gamma,m).$$



第 1 図

両辺に γ を加えて $m\cdot P_r\{t_1^2>c_2^2(\gamma)\}\geqq m\cdot P_r\{t_1^2>c_2^{*2}(\gamma)\}$. 故に $c_2^2(\gamma)\leqq c_2^{*2}(\gamma)$ を得る. $c_2^{*2}(\gamma)\leqq c_1^2(\gamma)$ は明らかである. 筆者の数々の経験によると, $\gamma\leqq 0.05$ の範囲に対し, $c_2^{*2}(\gamma)$ はなかなかよい近似を与えるのである. この方法の正当性, 背後にある条件を明らかにすることは, 数値計算法における面白い問題であろう.

2.3 Scheffé の区間 (10) との比較.

$\theta_i=\underline{p}_i'\underline{a}$, $i=1,2,\cdots,m$ に対する同時信頼区間として Scheffé の結果を用いると, (10) において $\underline{d}=\underline{p}_i$ として

$$\hat{\theta}_i-s\sqrt{kF_{k,n}(\gamma)}\sqrt{\underline{p}_i'C^{-1}\underline{p}_i}\leqq\theta_i\leqq\hat{\theta}_i+s\sqrt{kF_{k,n}(\gamma)}\sqrt{\underline{p}_i'C^{-1}\underline{p}_i}\qquad i=1,\cdots,m \tag{40}$$

を得る. この場合信頼係数は $\geqq 1-\gamma$ である. われわれの結果 (22) と比較すると, 区間巾のちがいは, $\sqrt{kF_{k,n}(\gamma)}$ と $t_{\max}(\gamma;n,m)$ のちがいに依るものである. 当然のことながら

$$\sqrt{kF_{k,n}(\gamma)}\geqq t_{\max}(\gamma;n,m) \tag{41}$$

である. 実際

$$P_r\left\{\operatorname*{Sup}_{\underline{d}}\frac{\underline{d}'(\hat{\underline{a}}-\underline{a})(\hat{\underline{a}}-\underline{a})'\underline{d}}{s^2\underline{d}'C^{-1}\underline{d}}>t^2_{\max}(\gamma;n,m)\right\}$$
$$\geqq P_r\left\{\max_i\frac{\underline{p}_i'(\hat{\underline{a}}-\underline{a})(\hat{\underline{a}}-\underline{a})'\underline{p}_i}{s^2\underline{p}_i'C^{-1}\underline{p}_i}>t^2_{\max}(\gamma;n,m)\right\}=\gamma$$

一方

$$P_r\left\{\operatorname*{Sup}_{\underline{d}}\frac{\underline{d}'(\hat{\underline{a}}-\underline{a})(\hat{\underline{a}}-\underline{a})'\underline{d}}{s^2\underline{d}'C^{-1}\underline{d}}<kF_{k,n}(\gamma)\right\}=\gamma$$

であるから, $kF_{k,n}(\gamma)\geqq t^2_{\max}(\gamma;n,m)$, したがって(41) を得る.

$t^2_{\max}(\gamma;n,m)/kF_{k,n}(\gamma)$ は, Dunn が [2] の第3表で示した $c_1^2(\gamma;n,m)/kF_{k,n}(\gamma)$ のように, 1より大きくなることは決してない. $c_2^{*2}(\gamma;n,m)$ を用いた場合, $c_2^{*2}(\gamma;n,m)/kF_{k,n}(\gamma)$ が1を越すことがあるかも知れないが, 殆んど問題とはならないであろう.

§ 3. $\delta(\gamma, m)$ の計算のし方

前節で $t^2_{\max}(\gamma;n,m)$ の近似として $c_2^{*2}(\gamma)$ を求める方法を述べたが, 実際には

$$\delta(\gamma, m)=\sum_{i<j}^{m}P_r\{t_i^2>c_1^2(\gamma),\ t_j^2>c_1^2(\gamma)\} \tag{36}$$

の計算が厄介である. それは $P_r\{t_i^2>c_1^2(\gamma),\ t_j^2>c_1^2(\gamma)\}$ が

$$\rho_{ij}=\frac{\underline{p}_i'C^{-1}\underline{p}_j}{\sqrt{\underline{p}_i'C^{-1}\underline{p}_i}\sqrt{\underline{p}_j'C^{-1}\underline{p}_j}} \tag{27}$$

に依存するため，一つ一つ計算しなければならないからである．m が少し大きくなると，相当の労力を必要とする．これではわれわれの第2近似まで考慮した方法も実際的ではないので，この不便をすくうための計算上の解説と数表を与えよう．

t_i と t_j の同時分布の密度函数 (31) を，ρ_{ij} を強調して，$f_n(t_i, t_j; \rho_{ij})$ と書く．このとき

$$P_r\{t_i^2>c^2,\ t_j^2>c^2\}=2[P_r\{t_i<-c,\ t_j<-c\}+P_r\{t_i>c,\ t_j<-c\}]$$
$$=2\left[\int_{-\infty}^{-c}\int_{-\infty}^{-c}+\int_{c}^{\infty}\int_{-\infty}^{-c}\right]f_n(t_i, t_j; \rho_{ij})d_jtdt_i \tag{30}$$

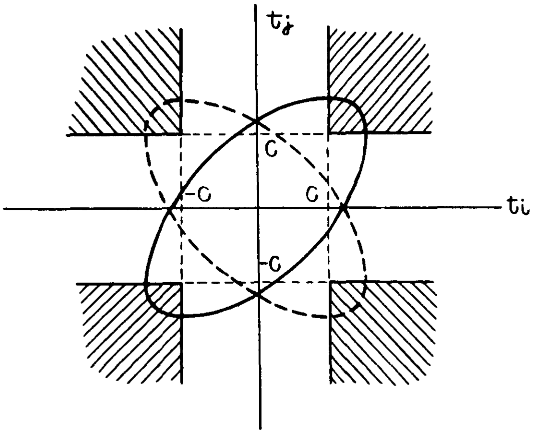
である．Dunnet と Sobel [3] は

$$P\equiv\int_{-\infty}^{k}\int_{-\infty}^{h}f_n(t_i, t_j; \rho_{ij})dt_jdt_i$$

を評価する正確な式，及び，漸近的な式を与えている．これを利用するためには

$$\int_{c}^{\infty}\int_{-\infty}^{-c}f_n(t_i, t_j; \rho_{ij})dt_jdt_i=\int_{-\infty}^{-c}\int_{-\infty}^{-c}f_n(t_i, t_j; -\rho_{ij})dt_jdt_i \tag{42}$$

として計算すればよい．(42) は第2図から容易に分ることである．



第 2 図

これにより

$$P(c,\ n,\ \rho_{ij})\equiv P_r\{t_i^2>c^2,\ t_j^2>c^2\} \tag{43}$$

は c, n をとめたとき，ρ_{ij} の偶函数である．更に $c_1(\gamma)$ は普通の場合大きいので，ρ_{ij} が 0 に近くない限り，その正，負により，(30) の何れか一方の積分は無視できるほど小さい．

以上の点を考慮して

$$P(c,\ n,\ \rho)\equiv P_r\{t_1^2>c^2,\ t_2^2>c^2\}$$

の数表を

$c=2.0(0.5)4.5$

$n=10(2)50(5)90, 100, 120, 150, 200, \infty$

$|\rho|=0.00(0.10)0.90, 0.95$

に対して作り，この論文の終りにまとめておいた．なお，第1近似 $c_1(\gamma)$ の数表は，Dunn [2] により与えられていることを注意しておく．

§4.　この方法を使用する場合

われわれは，さきに Scheffé の方法と比較して，$t^2{}_{\max}$ を用いる方が，同じ同時信頼係数に対してより狭い巾の区間を得ることを述べたが，使用上には重要な区別がある．

われわれの方法及び Dunn の方法は，調べるべき a_i, $i=1, \cdots, k$ の一次結合の m 個が，あらかじめ指定され得る場合に適用されねばならない．データを見た後，その与える情報に基いてきめられた a_i の一次結合の組に対するものではない．データを見た後に，比較すべき a_i の一次結合を考えざるを得ない場合は，Scheffé の方法によらざるを得ない．Scheffé の方法は，このように，データを見てから，一次結合を自由に撰択することを許す利点をもつが，その代償として，区間巾を不当に広くしてしまう恐れがある．特に k が大きい場合にはそうである．一般に，科学的研究にあっては，解明すべき目的，従って，比較すべき事柄は，前もって慎重に検討され，これらに最もよく適合する実験を組み，かくしてデータがとられ，分析が行なわれるのである．かくしてわれわれの方法の適用分野は相当広いのであるが，計算の手間は Dunn のものと比較して，かなり厄介である．しかし Dunn の方法も，第1近似があらいため，Scheffé の区間より広い区間が生じる場

合が出てきてしまう重大欠点をもつ．われわれの $t_{\max}(\gamma)$ による方法は，この Dunn の方法のもつ欠点を救う意味をもっているのである．

§ 5. 特別の場合及び数値例

5.1 二元配置計画の時

比較すべき一次結合の個数 m が大きい時，ρ_{ij} の個数は $m(m-1)/2$ で，$\delta(\gamma, m)$ の計算に大変な労力が必要と思われるが，実際には，われわれの用意した数表を用いて，案外簡単に処理できる場合がある．例として二元配置実験計画の場合を考える．

$$y_{ij}=\mu+\alpha_i+\beta_j+e_{ij} \qquad i=1, \cdots, r;\ j=1, \cdots, s \tag{44}$$

がモデルで $\sum_i=\alpha_i=\sum_j\beta_j=0$, e_{ij} は $N(0, \sigma^2)$ に従う確率変数である．よく知られているように

$$\hat{\mu}=\bar{y}_{\cdot\cdot},\ \hat{\alpha}_i=\bar{y}_{i\cdot}-\bar{y}_{\cdot\cdot},\ \hat{\beta}_j=\bar{y}_{\cdot j}-\bar{y}_{\cdot\cdot}$$

がパラメータの推定値である．(‘.’は其処の添字についての平均であることを示す) σ^2 は $(r-1)$. $(s-1)$ の自由度で推定される．先ず

$$\left.\begin{aligned}
&E(\hat{\mu})=\mu, \qquad E(\hat{\alpha}_i)=\alpha_i, \qquad E(\hat{\beta}_j)=\beta_j \\
&\mathrm{Var}(\hat{\mu})=\frac{1}{rs}\sigma^2, \qquad \mathrm{Var}(\hat{\alpha}_i)=\frac{r-1}{sr}\sigma^2, \qquad \mathrm{Var}(\hat{\beta}_i)=\frac{s-1}{rs}\sigma^2 \\
&\mathrm{Cov}(\hat{\mu}, \hat{\alpha}_i)=0, \qquad \mathrm{Cov}(\hat{\mu}, \hat{\beta}_i)=0, \qquad \mathrm{Cov}(\hat{\alpha}_i, \hat{\beta}_j)=0 \\
&\mathrm{Cov}(\hat{\alpha}_i, \hat{\alpha}_{i'})=-\frac{1}{rs}\sigma^2, \qquad \mathrm{Cov}(\hat{\beta}_j,\hat{\beta}_{j'})=-\frac{1}{rs}\sigma^2 \qquad (i\neq i,'\ j\neq j') \\
&\mathrm{Var}(\hat{\alpha}_i-\hat{\alpha}_{i'})=\frac{2}{s}\sigma^2, \qquad \mathrm{Var}(\hat{\beta}_j-\hat{\beta}_{j'})=\frac{2}{r}\sigma^2 \qquad (i\neq i',\ j\neq j')
\end{aligned}\right\} \tag{45}$$

を注意しておく．同時信頼区間が要求されている μ, α_i, β_j の一次式群を

(1) μ
(2) α_i; $\quad i=1, 2, \cdots, r$
(3) $\alpha_i-\alpha_i'$; $\quad i<i'$; $i,i'=1, 2, \cdots, r$
(4) β_j; $\quad j=1, 2, \cdots, s$
(5) $\beta_j-\beta_{j'}$; $\quad j<j'$; $j, j'=1, 2, \cdots, s$

としよう．個数は

$$m=1+r+\frac{1}{2}r(r-1)+s+\frac{1}{2}s(s-1)=1+\frac{1}{2}r(r+1)+\frac{1}{2}s(s+1)$$

である．これらの不偏推定量は

(1)′ $\hat{\mu}=\bar{y}_{\cdot\cdot}$
(2)′ $\hat{\alpha}_i=\bar{y}_{i\cdot}-\bar{y}_{\cdot\cdot}$; $\quad i=1, 2, \cdots, r$
(3)′ $\hat{\alpha}_i-\hat{\alpha}_{i'}=y_{\cdot j}-y_{i'\cdot}$; $\quad i<i'$; $i, i'=1, 2, \cdots, r$
(4)′ $\hat{\beta}_j=y_{\cdot j}-y_{\cdot\cdot}$; $\quad j=1, 2, \cdots, s$
(5)′ $\hat{\beta}_j-\hat{\beta}_{j'}=y_{\cdot j}-y_{\cdot j'}$; $\quad j<j'$; $j, j'=1, 2, \cdots, s$

となる．従って $\delta(\gamma, m)$ を評価するときに問題となる，上の統計量間の相関係数は，次のようにグループに分けて考えればよい．

(I) $\rho=0$ であるもの：$(\hat{\mu}, \hat{\alpha}_i)$, $(\hat{\mu}, \hat{\alpha}_i-\hat{\alpha}_{i'})$, $(\hat{\mu}, \beta_j)$, $(\hat{\mu}, \beta_j-\beta_{j'})$, $(\hat{\alpha}_i, \hat{\beta}_j)$, $(\hat{\alpha}_i, \hat{\beta}_j-\hat{\beta}_{j'})$, $(\hat{\alpha}_i-\hat{\alpha}_{j'}, \beta_j)$, $(\hat{\alpha}_i, \hat{\alpha}_{i'}-\hat{\alpha}_{i''})$, $(\hat{\alpha}_i-\hat{\alpha}_{i'}, \hat{\alpha}_{i''}-\hat{\alpha}_{i'''})$, $(\hat{\beta}_j, \hat{\beta}_{j'}-\hat{\beta}_{j''})$, $(\hat{\beta}_j-\hat{\beta}_{j'}, \hat{\beta}_{j''}-\hat{\beta}_{j'''})$ $(\hat{\alpha}_i-\hat{\alpha}_{i'}, \hat{\beta}_j-\hat{\beta}_{j'})$ に対する相関係数．個数は

$$m_1=r+\frac{1}{2}r(r-1)+s+\frac{1}{2}s(s-1)+rs+\frac{1}{2}rs(s-1)+\frac{1}{2}rs(r-1)$$
$$+\frac{1}{2}r(r-1)(r-2)+\frac{1}{8}r(r-1)(r-2)(r-3)+\frac{1}{2}s(s-1)(s-2)$$
$$+\frac{1}{8}s(s-1)(s-2)(s-3)+\frac{1}{4}rs(r-1)(s-1)$$
$$=\frac{1}{2}r(r+1)+\frac{1}{2}s(s+1)+\frac{1}{4}rs(r+1)(s+1)+\frac{1}{8}r(r^2-1)(r-2)$$
$$+\frac{1}{8}s(s^2-1)(s-2)$$

(Ⅱ) $\rho=-1/r-1$ であるもの; $(\hat{\alpha}_i,\ \hat{\alpha}_{i'})$ に対する相関係数で，その個数は

$$m_2=\frac{1}{2}r(r-1)$$

(Ⅲ) $\rho=-1/s-1$ であるもの; $(\hat{\beta}_j,\ \hat{\beta}_{j'})$ に対する相関係数で，その個数は

$$m_3=\frac{1}{2}s(s-1)$$

(Ⅳ) $\rho=1/2$ であるもの; $(\hat{\alpha}_i-\hat{\alpha}_{i'},\ \alpha_i-\hat{\alpha}_{i''})$, $(\hat{\beta}_j-\hat{\beta}_{j'},\ \hat{\beta}_j-\hat{\beta}_{j''})$ に対する相関係数で， その個数は

$$m_4=\frac{1}{2}r(r-1)(r-2)+\frac{1}{2}s(s-1)(s-2)$$

(Ⅴ) $\rho=\sqrt{\frac{r}{2(r-1)}}$ or $-\sqrt{\frac{r}{2(r-1)}}$ であるもの; $(\hat{\alpha}_i,\ \hat{\alpha}_i-\hat{\alpha}_{i'})$ あるいは $(\hat{\alpha}_i,\hat{\alpha}_{i'}-\hat{\alpha}_i)$ に対する相関係数で，その個数は

$$m_5=r(r-1)$$

(Ⅵ) $\rho=\sqrt{\frac{s}{2(s-1)}}$ or $-\sqrt{\frac{s}{2(s-1)}}$ であるもの; $(\hat{\beta}_j,\ \hat{\beta}_j-\hat{\beta}_{j'})$ あるいは $(\hat{\beta}_j,\ \hat{\beta}_{j'}-\hat{\beta}_j)$ に対する相関係数で，その個数は

$$m_6=s(s-1)$$

以上の如く，$\delta(\gamma,\ m)$ の中に含まれる $1/2\,m(m-1)$ 個の項は，6部分に分れ，各グループ内では $|\rho|$ が一定となっている．従って $P(c,\ n,\ \rho)=P_r\{t_1^2>c^2,\ t_2^2>c^2\}$ は6個だけ求めればよく，用意した数表から簡単に評価される．

5.2 二つの回帰式の比較

$y^{(i)}$, $i=1,2$, がそれぞれ

$$E(y^{(i)})=a_1^{(i)}z_1^{(i)}+a_2^{(i)}z_2^{(i)}+\cdots+a_k^{(i)}z_k^{(i)} \tag{46}$$
$$\mathrm{Var}(y^{(i)})=\sigma^2 \tag{47}$$

をもつ正規分布に従う時， $b_j=a_j^{(1)}-a_j^{(2)}$, $i=1,\cdots,k$, に対する同時信頼区間も，今迄と同様の形で作ることができる．すなわち

$$\hat{\underline{a}}^{(i)}=(Z^{(i)}Z^{(i)\prime})^{-1}Z^{(i)}\underline{y}^{(i)},\qquad i=1,2 \tag{48}$$

は，平均 $\underline{a}^{(i)}$，分散共分散行列 $\sigma^2(Z^{(i)}Z^{(i)\prime})^{-1}$ をもつ k 変数正規分布に従うから $\hat{\underline{b}}=\hat{\underline{a}}^{(1)}-\hat{\underline{a}}^{(2)}$ の分布が

$$E(\hat{\underline{b}})=\underline{b},\ E[\hat{\underline{b}}-\underline{b})(\hat{\underline{b}}-\underline{b})']=\sigma^2[(Z^{(1)}Z^{(1)\prime})^{-1}+(Z^{(2)}Z^{(2)\prime})^{-1}]$$

をもつ，やはり，k 変数正規分布である．これを出発点とすれば，あとは今迄と同じである．かくして

$$\hat{a}_j^{(1)}-\hat{a}_j^{(2)}-s\cdot t_{\max}(\gamma;\ n,\ k)\sqrt{c^{(1)jj}+c^{(2)jj}}$$
$$\leqq a_j^{(1)}-a_j^{(2)}\leqq\hat{a}_j^{(1)}-\hat{a}_j^{(2)}+s\cdot t_{\max}(\gamma;n,k)\sqrt{c^{(1)jj}+c^{(2)jj}} \tag{49}$$

なる結果を得る．但し，N_1，N_2 をそれぞれの観測数，s_1^2，s_2^2 をそれぞれの残差分散として，

$$n=N_1+N_2-2k$$

$$s^2=[(N_1-k)s_1^2+(N_2-k)s_2^2]/(N_1+N_2-2k) \tag{50}$$

である．$t^2_{\max}(\gamma;n,k)$ を評価する時に必要な ρ_{ij} は

$$\rho_{ij}=\frac{c^{(1)ij}+c^{(2)ij}}{\sqrt{(c^{(1)jj}+c^{(2)jj})(c^{(1)ii}+c^{(2)ii})}} \tag{51}$$

である．

5.3 数 値 例

（A） 綿からつむいで作られる糸の強さを，繊維の有効長さ，標準繊維重量との関係で示している例をとりあげてみる．これは Tippett の本 [10] の 10.1 節にあるものである．回帰式は

$$Y-47.08=-0.331507(x_1-47.54)+0.501491(x_2-7.58)$$

書き直して

$$Y=59.04-0.331507\,x_1+0.501491\,x_2$$

となっている．これに基いて，モデル

$$E(y)=\mu+a_1x_1+a_2x_2$$

の，μ，a_1，a_2 に対する 95% 同時信頼区間を求めてみよう．

$$\theta_1\equiv\hat{\mu}=59.04,\ \theta_2\equiv\hat{a}_1=-0.331507,\ \theta_3\equiv\hat{a}_2=0.501491$$

故に $m=3$．σ^2 の不偏推定値は

$$s^2=52.18 \quad (s=7.224)$$

で，その自由度 n は 47 となっている．

$t^2_{\max}$ (0.05; 47, 3) の第1近似 $c_1^2(0.05)$ は

$$\int_{c_1(0.05)}^{\infty} S_{47}(t)dt=\frac{0.05}{2\times 3}=0.008333$$

を充す $c_1(0.05)$ の自乗で

$$c_1^2(0.05)=6.160 \qquad c_1(0.05)=2.482$$

さて

$$C=\begin{pmatrix} 50 & 2377 & 379 \\ 2377 & 140213 & 15749 \\ 379 & 15749 & 3207 \end{pmatrix},\qquad C^{-1}=\begin{pmatrix} 1.0218 & -0.0083832 & -0.079593 \\ -0.0083832 & 0.000084680 & 0.00057485 \\ -0.079593 & 0.00057485 & 0.0068949 \end{pmatrix}$$

であるから，

$$\rho_{\hat{\mu}\hat{a}_1}=c^{12}/\sqrt{c^{11}c^{12}}=-0.9012, \qquad \rho_{\hat{\mu}\hat{a}_2}=c^{13}/\sqrt{c^{11}c^{33}}=-0.9483$$

$$\rho_{\hat{a}_1\hat{a}_2}=c^{23}/\sqrt{c^{22}c^{33}}=0.7523$$

これらの ρ の値に対する $P(c_1(0.05),n,\rho)=P(2.482,47,\rho)$ を求めるには，終りの数表より $c=2.0$，2.5，3.0，3.5 に対して，$n=46,47;\rho=0.6$，0.7，0.8，0.9，1.0 のグラフをかき，これより $P(c,47,-0.9012)$，$P(c,47,-0.9483)$，$P(c,47,0.7523)$ の値をきめて，次の第3図のようなグラフによるとよい．

かくして

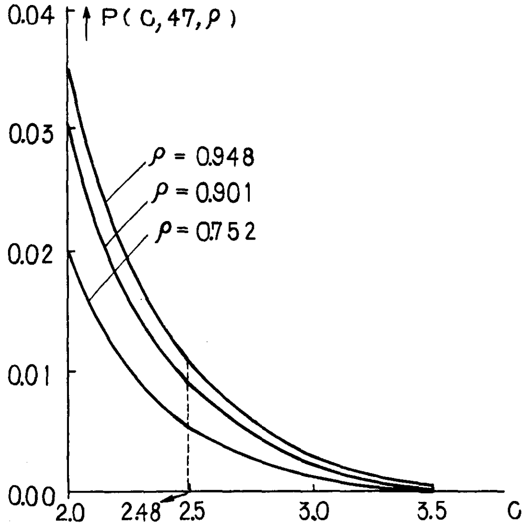
$$P(2.482,47,-0.948)=0.0111, \qquad P(2.482,47,-0.901)=0.0093$$

$$P(2.482,47,0.752)=0.0053$$

従って

$$\delta(0.05,3)=0.0257$$

と求められる．故に $t_{\max}(0.05)$ の近似 $c_2^*(0.05)$ は



第 3 図

$$\int_{c_2^*(0.05)}^{\infty} S_{47}(t)dt=\frac{1}{2\times 3}(0.05+0.0257)$$
$$=0.0126$$

より $c_2^*(0.05)=2.008$ を得る．この数値を用いて $\theta_1=\mu$, $\theta_2=a_1$, $\theta_3=a_2$ の 95% 同時信頼区間

$$\hat{\theta}_i-\sqrt{c^{ii}}\,s\cdot c_2^*(0.05) \leqq \theta_i \leqq \hat{\theta}_i+\sqrt{c^{ii}}\,s\cdot c_2^*(0.05) \quad (25)$$

は次のようになる．

$$44.38\leqq\mu\leqq 73.70$$
$$-0.4650\leqq a_1\leqq -0.1980$$
$$-0.7030\leqq a_2\leqq 1.706$$

a_2 の有意性は，統計的には保証されないことが認められる．

Dunn 及び Scheffé の方法による同時信頼区間と，われわれの方法によるものとの，区間巾の比較を示せば，それぞれ

$$c_2^*(0.05)/c_1(0.05)=2.008/2.482=0.809$$
$$c_2^*(0.05)/\sqrt{3F_{3,47}(0.05)}=2.008/\sqrt{3\times 2.806}=0.717$$

となっている．

（B） 筆者等は，昭和 36 年度において，文部省科学研究費による“統計的模型解析に関する綜合的研究”（代表者．林知巳夫・理博）に参加し，「味覚に関する数量的研究」にたずさわった．[9]．この際行なった種々の回帰分析に対して，回帰係数に関する同時信頼区間を作るため，本研究がなされたのである．その中から，簡単な例を1つとりあげてみよう．

Uを，唎酒により与えられた，清酒の綜合的良さを表わす得点，

V_1, V_2, V_3 をそれぞれ香り，味，色沢の良さを示す得点とする．判定人は，サンプルの清酒を唎いて，香り，味，色沢をしらべ，清酒としての綜合的な評価を行なう．これをみるため，U の V_1, V_2, V_3 えの線型回帰が考えられたのである．モデルは

$$E(U)=\mu+a_1V_1+a_2V_2+a_3V_3$$
$$\mathrm{Var}(U)=\sigma^2$$

である．清酒の銘柄数，即ち，標本の大きさは，$N=30$ で，各銘柄には，5人の判点人の平均得点が対応させられている．得点の基礎分布として正規分布を仮定するのに助けとなっているのである．データから求められた回帰式は

$$U^*-0.228=0.3631(V_1-0.070)+0.5724(V_2-0.263)+0.2588(V_3-0.240)$$

これをもとに

$$\theta_1=a_1,\ \theta_2=a_2,\ \theta_3=a_3,\ \theta_4=a_1-a_2,\ \theta_5=a_1-a_3,\ \theta_6=a_2-a_3$$

に対する 95% 同時信頼区間を作ってみよう．

この時必要な σ^2 の不偏推定値は，自由度 $n=30-4=26$ をもつ $s^2=0.0205$ で，したがって $s=0.143$ である．また，C^{-1} は，μ を消去して考えて

$$C^{-1}=\left\|\sum_{\alpha=1}^{30}(V_{i\alpha}-\bar{V}_i)(V_{j\alpha}-\bar{V}_j)\right\|^{-1}=\begin{pmatrix} 0.2747 & -0.1325 & -0.0552 \\ -0.1325 & 0.3703 & -0.1067 \\ -0.0552 & -0.1067 & 0.2122 \end{pmatrix}$$

である．$m=6$ であるから，$t_{\max}(0.05)$ の第1近似は

$$2\cdot\int_{c_1(0.05)}^{\infty}S_{26}(t)dt=0.05/6=0.008333$$

を充たす $c_1(0.05)$ である．即ち

$$c_1(0.05)=2.861$$

第2近似をもとめるため必要な $m(m-1)/2=15$ 個の ρ の値を示す．$\rho_{\hat{\theta}_i\hat{\theta}_j}\equiv\rho_{ij}$ と書く．

$$\rho_{12}=c^{12}/\sqrt{c^{11}c^{22}}=-0.415,\qquad \rho_{13}=c^{13}/\sqrt{c^{11}c^{33}}=-0.229$$

$$\rho_{23}=c^{23}/\sqrt{c^{22}c^{33}}=-0.381,$$

$$\rho_{14}=(c^{11}-c^{12})/\sqrt{c^{11}(c^{11}-2c^{12}+c^{22})}=0.814,\qquad \rho_{15}=0.814,\ \rho_{16}=-0.165$$

$$\rho_{24}=(c^{12}-c^{22})/\sqrt{c^{22}(c^{11}-2c^{12}+c^{22})}=-0.866,\qquad \rho_{25}=-0.055,\ \rho_{26}=0.879$$

$$\rho_{34}=(c^{13}-c^{23})/\sqrt{c^{33}(c^{11}-2c^{12}+c^{22})}=0.117,\qquad \rho_{35}=-0.751,\ \rho_{36}=-0.776$$

$$\rho_{45}=(c^{11}-c^{12}-c^{13}+c^{23})/\sqrt{(c^{11}-2c^{12}+c^{22})(c^{11}-2c^{13}+c^{33})}=0.482$$

$$\rho_{46}=(c^{12}-c^{13}-c^{22}+c^{23})/\sqrt{(c^{11}-2c^{12}+c^{22})(c^{22}-2c^{23}+c^{33})}=-0.651$$

$$\rho_{56}=(c^{12}-c^{13}-c^{23}+c^{33})/\sqrt{(c^{11}-2c^{13}+c^{33})(c^{22}-2c^{23}+c^{33})}=0.350$$

これらの値に対する $P(2.861,\ 26,\ \rho)$ を，終りの数表を利用して求めると，下のようになる．

$\rho_{i,j}$ の $i,\ j$	1, 2	1, 3	1, 4	1, 5	1, 6	2, 3	2, 4	2.5
$P(2.861, 26, \rho)$	0.00078	0.00040	0.00310	0.00310	0.00032	0.00069	0.00382	0.00022

2, 6	3, 4	3, 5	3, 6	4, 5	4, 6	5, 6	$\delta(0.05, 15)$
0.00410	0.00028	0.00250	0.00275	0.00101	0.00185	0.00061	0.02553

かくして，第2近似 $c_2^*(0.05)$ は，t-分布より

$$\int_{c^*_2(0.05)}^{\infty}S_{26}(t)dt=(0.05+0.02553)/(2\times6)=0.006294$$

を充すものとして得られる．

$$c_2^*(0.05)=2.682$$

この $c_2^*(0.05)$ の値を用いて，信頼区間

$$\hat{a}_i-c_2^*(0.05)s\sqrt{c^{ii}}\leqq a_i\leqq\hat{a}_i+c_2^*(0.05)s\sqrt{c^{ii}},\quad (i=1,2,3) \tag{53}$$

$$\hat{a}_i-\hat{a}_j-c_2^*(0.05)s\sqrt{c^{ii}-2c^{ij}+c^{jj}}\leqq a_i-a_j\leqq\hat{a}_i-\hat{a}_j+c_2^*(0.05)s\sqrt{c^{ii}-2c^{ij}+c^{jj}} \tag{54}$$

$$i\neq j\ ;\ i<j\ ;\ i,\ j=1,2,3$$

を計算すると

$$0.162\leqq a_1\leqq0.564$$
$$0.339\leqq a_2\leqq0.806$$
$$0.082\leqq a_3\leqq0.436$$
$$-0.575\leqq a_1-a_2\leqq0.156$$
$$-0.192\leqq a_1-a_3\leqq0.401$$
$$-0.028\leqq a_2-a_3\leqq0.656$$

となるのである．これより，a_1, a_2, a_3 は 0 でないと判断される．更に a_2 は a_1, a_2 に比べて大きいように思われるが，上の区間はこれを示していない．($a_i-a_j=0$ が区間に含まれているから.)

Dunn 及び Scheffé の方法によるものとの比較は，それぞれ

$$\frac{c_2^*(0.05)}{c_1(0.05)}=\frac{2.682}{2.861}=0.937$$

$$\frac{C_2^*(0.05)}{\sqrt{3\cdot F_{3,26}(0.05)}}=\frac{2.682}{\sqrt{3\times2.98}}=\frac{2.682}{2.990}=0.897$$

ある．

$P(c, n, \rho)=P_r\{t_1^2>c^2, t_2^2>c^2\}$ の表

（i） $c=2.0$

n \ $\|\rho\|$	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95
10	0.00985	0.01023	0.01157	0.01328	0.01604	0.01957	0.02408	0.02980	0.03716	0.04735	0.05483
12	818	0.00853	0.00973	1143	1405	1741	2169	2708	3406	4375	5089
14	706	740	851	1017	1273	1588	2002	2519	3188	4122	4811
16	627	660	765	0.00928	1198	1481	1879	2379	3028	3933	4604
18	569	601	701	861	1093	1398	1788	2272	2904	3788	4444
20	0.00525	0.00556	0.00653	0.00809	0.01037	0.01332	0.01710	0.02187	0.02805	0.03673	0.04317
22	489	520	614	768	0.00991	1280	1650	2119	2726	3579	4213
24	461	491	583	735	954	1238	1601	2062	2660	3501	4127
26	437	467	558	707	923	1203	1560	2015	2604	3436	4054
28	418	447	537	684	896	1173	1525	1974	2557	3380	3993
30	0.00402	0.00410	0.00518	0.00664	0.00874	0.01147	0.01495	0.01939	0.02516	0.03331	0.03939
32	387	416	503	647	854	1124	1469	1909	2481	3289	3892
34	375	403	489	632	837	1105	1446	1882	2449	3252	3851
36	364	393	477	619	822	1087	1426	1859	2422	3219	3814
38	355	383	467	608	809	1072	1408	1838	2397	3190	3782
40	0.00346	0.00374	0.00458	0.00597	0.00797	0.01058	0.01392	0.01819	0.02375	0.03163	0.03752
42	339	366	449	588	786	1046	1378	1802	2355	3139	3726
44	332	360	442	580	776	1035	1365	1787	2337	3118	3702
46	326	353	435	572	767	1023	1353	1772	2330	3098	3680
48	320	348	429	565	759	1016	1342	1759	2305	3080	3660
50	0.00315	0.00343	0.00423	0.00559	0.00752	0.01007	0.01332	0.01747	0.02291	0.03064	0.03641
55	305	331	411	545	736	0.00989	1310	1722	2261	3027	3601
60	296	322	401	535	723	973	1292	1701	2236	2997	3568
65	288	314	393	524	712	961	1277	1683	2215	2972	3540
70	282	308	386	517	703	948	1264	1667	2196	2950	3516
75	0.00277	0.00302	0.00380	0.00510	0.00694	0.00940	0.01253	0.01654	0.02181	0.02932	0.03495
80	272	297	375	504	687	932	1243	1643	2167	2915	3476
85	268	293	370	499	681	925	1235	1632	2155	2901	3460
90	264	289	366	494	676	918	1227	1623	2144	2888	3446
100	258	283	359	486	667	907	1214	1608	2126	2866	3422
120	0.00249	0.00274	0.00349	0.00474	0.00653	0.00891	0.01195	0.01585	0.02099	0.02834	0.03385
150	240	265	339	463	640	875	1176	1562	2072	2801	3349
200	232	256	329	452	626	858	1156	1540	2045	2769	3313
∞	207	230	301	419	586	811	1100	1472	1965	2672	3205

$P(c, n, \rho)=P_r\{t_1^2>c^2,\ t_2^2>c^2\}$ の表

(ii) $c=2.5$

n \ $\lvert\rho\rvert$	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95
10	0.00285	0.00280	0.00346	0.00423	0.00532	0.00678	0.00872	0.01121	0.01449	0.01916	0.02263
12	208	222	262	330	428	559	731	0.00954	1249	1670	1987
14	162	174	211	272	361	481	637	840	1111	1501	1796
16	132	143	177	233	314	425	570	759	1012	1379	1658
18	111	121	152	205	281	385	520	698	0.00938	1287	1553
20	0.000962	0.00106	0.00135	0.00184	0.00255	0.00353	0.00482	0.00651	0.00880	0.01214	0.01470
22	848	0.000938	121	168	236	329	451	613	833	1156	1404
24	760	846	111	155	220	309	427	583	796	1109	1350
26	692	772	102	145	207	293	406	558	764	1070	1304
28	635	712	0.000952	136	196	279	389	537	738	1036	1266
30	0.000589	0.000664	0.000896	0.00129	0.00187	0.00267	0.00375	0.00519	0.00715	0.01008	0.01233
32	550	623	846	123	180	258	362	503	696	0.00983	1204
34	518	587	806	118	173	249	352	489	679	961	1179
36	490	558	770	113	167	242	342	478	664	942	1157
38	465	532	738	110	162	235	334	467	651	925	1138
40	0.000444	0.000509	0.000711	0.00106	0.00158	0.00229	0.00326	0.00458	0.00639	0.00910	0.01120
42	425	490	688	103	154	224	320	449	628	897	1105
44	409	473	666	100	150	219	314	442	619	884	1090
46	394	456	648	0.000978	147	215	308	435	610	873	1078
48	381	442	630	956	144	211	304	429	602	863	1066
50	0.000368	0.000429	0.000614	0.000934	0.00141	0.00208	0.00299	0.00423	0.00595	0.00854	0.01055
55	344	402	582	890	135	200	289	410	579	834	1032
60	324	380	555	856	131	194	281	400	566	817	1012
65	308	364	532	826	127	189	275	392	556	803	0.00996
70	291	348	514	804	124	185	269	385	546	791	982
75	0.000281	0.000337	0.000500	0.000784	0.00121	0.00181	0.00264	0.00379	0.00539	0.00781	0.00970
80	271	326	486	764	118	178	260	373	532	772	960
85	264	316	474	750	116	175	257	368	526	764	951
90	256	308	464	736	114	173	253	364	520	757	943
100	245	294	448	714	111	169	248	357	511	745	939
120	0.000228	0.000276	0.000422	0.000680	0.00107	0.00163	0.00240	0.00347	0.00498	0.00728	0.00908
150	212	257	398	648	102	157	232	337	485	711	888
200	196	239	376	614	0.000880	151	224	326	472	694	868
∞	154	192	313	528	858	134	202	297	434	644	809

$P(c,\ n,\ \rho)=P_r\{t_1^2>c^2,\ t_2^2>c^2\}$ の表

(iii) $c=3.0$

n \ $\|\rho\|$	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95
10	0.000994	0.001040	0.001183	0.001448	0.001866	0.002411	0.003228	0.004247	0.005635	0.007672	0.009231
12	607	0.000648	0.000775	1003	1350	1804	2476	3331	4502	6238	7576
14	409	444	554	0749	1041	1430	2002	2739	3760	5287	6470
16	294	326	421	590	0.000842	1181	1681	2334	3245	4619	5690
18	224	252	335	483	705	1008	1453	2042	2870	4128	5114
20	0.000177	0.000202	0.000275	0.000408	0.000607	0.000881	0.001284	0.001823	0.002588	0.003755	0.004674
22	145	167	233	353	534	785	1154	1654	2367	3463	4329
24	121	141	201	311	477	709	1053	1520	2192	3228	4050
26	104	122	177	279	432	649	0.000971	1412	2049	3037	3822
28	0.000090	107	158	252	396	600	904	1323	1931	2877	3632
30	0.000080	0.000095	0.000142	0.000231	0.000366	0.000560	0.000848	0.001249	0.001832	0.002743	0.003471
32	71	85	130	214	341	526	801	1188	1747	2627	3333
34	64	78	120	199	321	498	760	1131	1674	2529	3214
36	58	71	111	187	303	472	726	1084	1611	2442	3110
38	54	66	104	176	287	451	696	1043	1556	2366	3018
40	0.000050	0.000061	0.000097	0.000166	0.000274	0.000432	0.000669	0.001007	0.001507	0.002299	0.002937
42	46	58	92	158	262	415	645	0.000975	1463	2238	2865
44	42	54	87	151	252	401	625	947	1424	2185	2799
46	40	51	83	144	243	387	606	921	1389	2136	2741
48	38	48	76	139	234	376	589	898	1358	2092	2688
50	0.000036	0.000046	0.000076	0.000134	0.000227	0.000365	0.000574	0.000877	0.001329	0.002052	0.002639
55	32	41	69	123	211	344	542	832	1268	1966	2535
60	28	37	63	115	199	324	516	796	1218	1897	2450
65	26	34	59	108	188	309	494	766	1176	1838	2379
70	24	32	56	103	180	297	476	741	1141	1789	2319
75	0.000022	0.000030	0.000053	0.000099	0.000173	0.000287	0.000461	0.000720	0.001112	0.001747	0.002268
80	21	28	50	94	167	277	448	701	1086	1712	2224
85	20	27	48	91	162	270	437	686	1064	1680	2186
90	19	26	46	88	157	263	427	671	1044	1652	2151
100	18	24	43	83	149	252	410	648	1012	1606	2094
120	0.000016	0.000022	0.000039	0.000076	0.000138	0.000235	0.000386	0.000614	0.000964	0.001537	0.002010
150	13	19	35	70	128	220	363	581	917	1470	1908
200	12	17	31	64	118	205	341	549	872	1406	1848
∞	07	10	22	48	092	164	280	460	744	1220	1618

$P(c, n, \rho)=P_r\{t_1^2>c^2,\ t_2^2>c^2\}$ の表

(iV) $c=3.5$

n \ $\|\rho\|$	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95
10	0.000292	0.000324	0.000416	0.000564	0.000766	0.001020	0.001347	0.001770	0.002347	0.003210	0.003880
12	158	178	236	337	477	0.000659	0.000905	1232	1687	2387	2923
14	0.000095	109	151	223	320	466	659	0.000921	1294	1869	2324
16	62	0.000072	104	158	239	350	508	725	1040	1531	1923
18	43	51	076	119	184	275	408	592	0.000865	1295	1639
20	0.000032	0.000038	0.000057	0.000093	0.000147	0.000224	0.000339	0.000500	0.000740	0.001123	0.001432
22	24	29	46	75	121	188	288	432	646	0.000993	1273
24	19	23	37	63	102	160	251	380	574	892	1150
26	15	19	31	53	0.000088	140	221	339	518	811	1051
28	12	16	27	46	77	124	199	306	472	746	0.000971
30	0.000010	0.000013	0.000023	0.000040	0.000069	0.000111	0.000180	0.000280	0.000435	0.000692	0.000904
32	0.0000084	10	20	36	62	101	165	258	404	647	849
34	72	0.000009	18	32	56	0.000092	152	240	378	609	801
36	63	8	16	29	51	85	141	224	355	577	760
38	56	7	15	27	47	79	132	211	336	548	725
40	0.0000050	0.000006	0.000013	0.000025	0.000044	0.000073	0.000124	0.000200	0.000319	0.000524	0.000694
42	46	6	12	23	41	69	118	190	305	502	667
44	43	5	11	21	39	65	112	181	292	483	642
46	40	5	11	20	37	62	106	173	280	465	621
48	37	4	10	19	35	59	102	166	270	450	601
50	0.0000034	0.000004	0.000009	0.000018	0.000033	0.000056	0.000098	0.000160	0.000261	0.000436	0.000584
55	30	4	8	16	30	50	89	147	242	407	547
60	26	3	7	14	27	46	82	137	226	384	517
65	23	3	7	13	25	42	77	128	214	364	493
70	20	3	6	12	23	40	72	121	204	349	472
75	0.0000018	0.000002	0.000006	0.000011	0.000022	0.000037	0.000069	0.000116	0.000195	0.000336	0.000455
80	16	2	5	11	20	35	65	111	187	324	441
85	15	2	5	10	19	34	63	107	181	314	428
00	13	2	5	10	18	32	61	103	176	305	417
100	11	2	4	09	17	30	57	0.000097	166	291	398
120	0.0000009	0.000002	0.000004	0.000008	0.000015	0.000027	0.000052	0.000089	0.000153	0.000270	0.000372
150	7	1	3	7	13	24	46	81	141	251	346
200	6	1	3	6	12	20	42	73	129	232	322
∞	4	1	2	4	08	14	30	54	098	182	256

$P(c, n, \rho)=P_r\{t_1^2>c^2, t_2^2>c^2\}$ の表

（v） $c=4.0$

n \ $\|\rho\|$	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95
10	0.0000473	0.0000632	0.0001102	0.0001869	0.0002932	0.0004308	0.000604	0.000824	0.001116	0.001535	0.001853
12	240	325	0.0000579	1004	1616	2438	352	496	0.000695	0.000994	1226
14	137	187	340	0.0000602	0.0000992	1534	228	330	476	702	0.000880
16	0.0000085	117	217	392	656	1042	159	235	348	527	670
18	56	0.0000078	147	271	462	0.0000752	117	177	268	414	533
20	0.0000038	0.0000055	0.0000105	0.0000197	0.0000342	0.0000566	0.000090	0.000139	0.000214	0.000338	0.000438
22	28	40	0.0000078	148	262	442	72	112	176	278	370
24	20	30	59	115	208	358	59	0.000093	149	239	319
26	16	23	47	0.0000092	166	294	49	79	128	209	280
28	13	18	38	75	138	246	44	68	112	185	249
30	0.0000010	0.0000015	0.0000031	0.0000062	0.0000118	0.0000214	0.000036	0.000060	0.000099	0.000166	0.000224
32	0.0000008	12	26	53	0.0000098	182	32	53	89	151	204
34	7	10	22	45	86	162	28	47	81	139	187
36	6	0.0000009	19	39	74	142	26	43	74	128	173
38	5	7	16	34	66	128	23	39	68	119	162
40	0.0000004	0.0000006	0.0000014	0.0000030	0.0000060	0.0000114	0.000021	0.000036	0.000062	0.000111	0.000151
42	4	6	12	26	54	106	19	33	59	104	143
44	3	5	11	24	48	0.0000096	18	31	55	0.000098	135
46	3	4	10	22	44	90	17	29	52	93	128
48	2	4	0.0000009	20	40	84	16	27	49	89	122
50	0.0000002	0.0000003	0.0000008	0.0000018	0.0000036	0.0000078	0.000014	0.000026	0.000047	0.000084	0.000117
55	2	3	7	15	30	66	13	22	41	76	106
60	2	2	5	12	26	58	11	20	38	70	0.000097
65	1	2	4	10	22	50	10	18	34	64	90
70	1	2	4	0.0000009	20	44	09	16	32	60	85
75	0.0000001	0.0000001	0.0000003	0.0000008	0.0000017	0.0000041	0.000008	0.000015	0.000030	0.000057	0.000080
80	1	1	3	7	14	38	8	14	28	54	76
85	* *	1	3	6	12	36	7	13	27	52	72
90	* *	1	2	6	12	33	7	13	25	49	69
100	* *	1	2	5	11	28	6	12	23	46	65
120	* *	* *	0.0000001	0.0000004	0.0000007	0.0000022	0.000005	0.000010	0.000020	0.000041	0.000058
150	* *	* *	1	3	6	20	4	09	18	36	52
200	* *	* *	1	2	5	16	4	7	16	32	46
∞	* *	* *	* *	0.0000001	4	08	2	4	10	22	32

$P(c, n, \rho)=P_r\{t_1^2>c^2, t_2^2<c^2\}$ の表

(vi) $c=4.5$

n \ $\|\rho\|$	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95
10	0.0000038	0.0000069	0.0000176	0.0000392	0.0000764	0.0001340	0.0002177	0.0003346	0.0004974	0.0007384	0.000924
12	19	34	0.0000089	200	395	0.0000704	1162	1820	2765	4210	536
14	11	19	50	115	229	413	0.0000693	1105	1713	2668	344
16	0.0000006	12	31	0.0000071	144	263	448	0.0000727	1147	1823	239
18	4	0.0000008	20	47	0.0000096	178	302	508	0.0000815	1319	175
20	0.0000003	0.0000005	0.0000014	0.0000033	0.0000068	0.0000127	0.0000223	0.0000372	0.0000606	0.0000997	0.000134
22	2	4	10	24	49	0.0000094	167	283	467	781	106
24	1	3	07	18	37	72	129	222	371	628	0.000086
26	1	2	6	14	29	56	103	178	302	518	72
28	1	2	4	11	23	45	0.0000083	146	251	435	61
30	0.0000001	0.0000001	0.0000003	0.0000009	0.0000019	0.0000037	0.0000069	0.0000122	0.0000214	0.0000371	0.000053
32	1	1	3	7	15	31	58	104	181	321	46
34	* *	1	2	6	13	26	49	0.0000089	158	281	41
36	* *	1	2	5	11	22	43	78	138	249	36
38	* *	1	2	4	0.0000009	19	37	69	123	222	33
40	* *	* *	0.0000001	0.0000004	0.0000008	0.0000017	0.0000033	0.0000061	0.0000110	0.0000200	0.000030
42	* *	* *	1	3	7	15	29	54	0.0000099	181	27
44	* *	* *	1	3	6	13	26	49	90	165	25
46	* *	* *	1	2	6	12	24	45	82	151	23
48	* *	* *	1	2	5	11	21	41	75	139	21
50	* *	* *	0.0000001	0.0000002	0.0000005	0.0000010	0.0000019	0.0000037	0.0000069	0.0000129	0.000020
55	* *	* *	1	1	3	0.0000008	16	31	57	108	17
60	* *	* *	* *	1	3	6	13	26	49	0.0000093	15
65	* *	* *	* *	1	2	5	11	22	42	81	14
70	* *	* *	* *	1	2	4	10	19	37	71	12
75	* *	* *	* *	0.0000001	0.0000002	0.0000004	0.0000008	0.0000017	0.0000033	0.0000064	0.000011
80	* *	* *	* *	1	1	3	7	15	29	57	10
85	* *	* *	* *	1	1	3	6	14	26	52	09
90	* *	* *	* *	* *	1	3	6	12	24	48	9
100	* *	* *	* *	* *	1	2	5	10	20	41	8
120	* *	* *	* *	* *	0.0000001	0.0000002	0.0000004	0.0000008	0.0000015	0.0000031	0.000007
150	* *	* *	* *	* *	* *	1	3	6	11	23	6
200	* *	* *	* *	* *	* *	1	2	4	0.0000008	16	4
∞	* *	* *	* *	* *	* *	* *	* *	* *	* *	* *	2

参 考 文 献

[1] DUNN, O.J. (1958). Estimation of the means of dependent variables. *Ann. Math. Statist.* **29**, 1095-1111.

[2] DUNN, O.J. (1961). Multiple comparisons among means. *Jour. Amer. Statist. Assn.* **56**, 52-64.

[3] DUNNETT, C.W. and SOBEL, M. (1954). A bivariate generalization of Student's t-distribution, with tables for certain special cases. *Biometrika*, **41**, 153-169.

[4] HARTLEY, H.O. (1950). The use of range in analysis ofvariance. *Biometrika*, **37**, 271-280.

[5] LEHMANN, E. L. (1959). *Testing Statistical Hypotheses*. John Wiley and Sons, New York.

[6] PLACKETT, R. L. (1960). *Principles of Regression Analysis*. Oxford University Press, London.

[7] ROY, S. N. and BOSE, R. C. (1953). Simultaneous confidence interval estimation. *Ann. Math. Statist.* **24**, 513-536.

[8] SCHEEFÉ, (1953). A method for judging all contrasts in the analysis of variance. *Biometrika*, **40**, 87-104.

[9] 塩谷, 吉田, 川上, 野白, 川島, 佐藤. 味覚判断に関する統計的研究. (未発表)

[10] TIPPETT, L. H. C. (1952). *The Methods of Statistics*, (4 th ed.). Williams and Norgate Ltd, London.

[11] TUKEY, J. W. (1952). 未発表論文. [7] に紹介.

[12] WILKS, S.S. (1943). *Mathematical Statistics*. Princeton University Press, Princeton.

統計数理研究所