ラテン方格配置における無作為化について

小川 潤次郎

(1962年3月1日受付)

On the Randomization in Latin-Square Design Under the Neyman Model

JUNJIRO OGAWA

The sampling distribution of the analysis of variance test statistic for a linear model is no longer the familiar central F-distribution even under the null-hypothesis, if the plot-effects are taken into account. The so-called randomization procedure has been recommended in order to get rid of the unknown plot-effects, i. e., it is to take a Latin-square of order k at random from the whole set of all possible Latin-squares of order k and apply the experimentation. This problem was treated by B. L. Welch under the Fisher model in 1937.

Since there are so many instances where the Neyman model is much more adequate than the Fisher model by the very nature of the problem under consideration, it is worth while to investigate the same problem under the Neyman model. This was done in this paper and the conclusion has turned out to be the same as Welch's. The author hopes that the calculation of variance of $\boldsymbol{\pi}'T\boldsymbol{\pi}$ due to randomization presented in Appendix is much easier to understand than that of Welch's.

Dept. of Math., Coll. of Sci. and Eng., Nihon Univ.

$k\times k$ の正方形に並べられた総数 k^2 個の実験区(プロット)に対して k 個の処理を割り当てるのに，各処理が各行各列にちょうど1回だけ現われるようにしたとき，これを **k 次のラテン方格配置**という．

全体で k^2 個ある実験区に適当に通し番号をつける．例えば i 行，j 列にある実験区に対して番号 $f=(i-1)k+j$ をつけるというやり方を後に用いる．

さて簡単のために処理効果とプロット効果の間には，交互作用はないものと仮定する．f 番目のプロットの効果(圃場試験の場合なら地力)を π_f^* とする．ここで

$$(1)\qquad \begin{cases} k^2\bar{\pi}^*\equiv\sum_{f=1}^{k^2}\pi_f^* \\ kr_i\equiv\sum_{f\in\text{第}i\text{行}}\pi_f^*-k\bar{\pi}^*, & i=1,2,\cdots,k \\ kc_j\equiv\sum_{f\in\text{第}j\text{列}}\pi_f^*-k\bar{\pi}^*, & j=1,2,\cdots,k \end{cases}$$

で $\bar{\pi}^*, r_i, c_j$ を定義してそれぞれ**一般平均**，**行効果**，**列効果**と呼ぶ．さてわれわれはここで，$f=(i-1)k+j$ のとき

$$(2)\qquad \pi_f\equiv\pi_f^*-\bar{\pi}^*-r_i-c_j$$

と改めて f 番目のプロットの**プロット効果**と呼ぶことにする．いわば，これは行効果と列効果の交互作用ともいうべきものである．この新たに定義されたプロット効果 π_f については

(3) $$\sum_{f\in 第i行}\pi_f=0, \qquad \sum_{f\in 第j列}\pi_f=0$$

であることは見易い.

f番目のプロットで観測された観測値を x_f とし, x_f を第f成分とするn次元ベクトル $\boldsymbol{x}$ を**観測値ベクトル**と呼ぶことにする.

ある一つの k 次ラテン方格配置が与えられたとき, われわれは次のような線型モデルを考察する.

(4) $$\boldsymbol{x}=g\mathbf{1}+\boldsymbol{\Phi t}+\boldsymbol{\Psi}_1\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\Psi}_2\boldsymbol{c}+\boldsymbol{\pi}+\boldsymbol{e},$$

但しここで g は (1) の地力の一般平均 $\bar{\pi}^*$ に処理の平均を繰り入れたものでやはり **"一般平均"** と呼ばれる. また

(5) $$\left\{\begin{array}{lll} \mathbf{1}'=(1,1,\cdots,1) & & \\ \boldsymbol{t}'=(t_1,t_2,\cdots,t_k), & \sum_{i=1}^k t_i=0, & \textbf{処理効果ベクトル} \\ \boldsymbol{r}'=(r_1,r_2,\cdots,r_k), & \sum_{i=1}^k r_i=0, & \textbf{行効果ベクトル} \\ \boldsymbol{c}'=(c_1,c_2,\cdots,c_k), & \sum_{j=1}^k c_j=0, & \textbf{列効果ベクトル} \\ \boldsymbol{\pi}'=(\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_{k^2}) & & \textbf{プロット効果ベクトル} \\ \boldsymbol{e}'=(e_1,e_2,\cdots,e_{k^2}) & & \textbf{誤差ベクトル} \end{array}\right.$$

誤差ベクトル $\boldsymbol{e}$ は確率変数であつて k^2 次元正規分布 $N(\boldsymbol{o},\sigma^2 I_{k^2})$ に従うものとする.

更に $\boldsymbol{\Phi}$ は処理のインシデンス行列である. 即ち

(6) $$\boldsymbol{\Phi}=||\boldsymbol{\zeta}_1\boldsymbol{\zeta}_2\cdots\boldsymbol{\zeta}_k||.$$

(7) $$\boldsymbol{\zeta}_\alpha=\begin{pmatrix}\zeta_{\alpha 1}\\ \zeta_{\alpha 2}\\ \vdots \\ \zeta_{\alpha k^2}\end{pmatrix}, \qquad \zeta_{\alpha f}=\begin{cases} f\text{番目のプロットが処理 }\alpha\text{ を受けたとき} & 1 \\ \text{然らざるとき} & 0, \end{cases}$$

$\boldsymbol{\Psi}_1$ 及び $\boldsymbol{\Psi}_2$ はそれぞれ行及び列のインシデンス行列であつて

(8) $$\boldsymbol{\Psi}_1=||\boldsymbol{\eta}_1{}^{(1)}\boldsymbol{\eta}_2{}^{(1)}\cdots\boldsymbol{\eta}_k{}^{(1)}||, \qquad \boldsymbol{\Psi}_2=||\boldsymbol{\eta}_1{}^{(2)}\boldsymbol{\eta}_2{}^{(2)}\cdots\boldsymbol{\eta}_k{}^{(2)}||$$

但しここで

(9) $$\boldsymbol{\eta}_i{}^{(1)}=\begin{pmatrix}\eta_{i1}{}^{(1)}\\ \eta_{i2}{}^{(1)}\\ \vdots \\ \eta_{ik^2}{}^{(1)}\end{pmatrix}, \qquad \eta_{if}{}^{(1)}=\begin{cases} f\text{番目のプロットが第 }i\text{ 行に属するとき} & 1 \\ \text{然らざるとき} & 0, \end{cases}$$

(10) $$\boldsymbol{\eta}_j{}^{(2)}=\begin{pmatrix}\eta_{j1}{}^{(2)}\\ \eta_{j2}{}^{(2)}\\ \vdots \\ \eta_{jk^2}{}^{(2)}\end{pmatrix}, \qquad \eta_{jf}{}^{(2)}=\begin{cases} f\text{番目のプロットが第 }j\text{ 列に属するとき} & 1 \\ \text{然らざるとき} & 0. \end{cases}$$

処理和を

(11) $$T_\alpha=\boldsymbol{\zeta}_\alpha{}'\boldsymbol{x}, \qquad \alpha=1,2,\cdots,k,$$

また**行和**, **列和**をそれぞれ

(12) $$R_i=\boldsymbol{\eta}_i{}^{(1)\prime}\boldsymbol{x}, \qquad C_j=\boldsymbol{\eta}_j{}^{(2)\prime}\boldsymbol{x}, \qquad i,j=1,2,\cdots,k,$$

とすれば, 良く知られたように**処理平方和** $s_t{}^2$ は

(13) $$s_t{}^2=\frac{1}{k}\sum_{\alpha=1}^k T_\alpha{}^2-k^2\cdot\bar{x}^2$$

であり, また**誤差平方和** $s_e{}^2$ は

$$(14)\qquad s_e^2=\sum_{f=1}^{k^2}x_f^2-k^2\bar{x}^2-\left(\frac{1}{k}\sum_{\alpha=1}^{k}T_\alpha^2-k^2\bar{x}^2\right)-\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}R_i^2-k^2\bar{x}^2\right)-\left(\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}C_j^2-k^2\bar{x}^2\right)$$

となる．

行と列の間に交互作用がない，即ちプロット効果 $\boldsymbol{\pi}=\mathbf{0}$ ならば，統計量

$$(15)\qquad F=\frac{k^2-3k+2}{k-1}\frac{s_t^2}{s_e^2}=(k-2)\frac{s_t^2}{s_e^2}$$

の標本分布は帰無仮説 $H_0:\boldsymbol{t}=\mathbf{0}$ の下では自由度 $(k-1, k^2-3k+2)$ なる F–分布に従うことは良く知られている．

圃場試験のような場合には，行・列間に交互作用が全くないというような場合は殆んどない．さて交互作用 $\boldsymbol{\pi}\neq\mathbf{0}$ の場合に，この未知であり且つ測定不可能なプロット効果 $\boldsymbol{\pi}$ に無関係な解析をするために所謂“無作為化”という手段が利用されるのである．つまり処理の割当を，その配置がラテン方格であるという性格を崩さない範囲で無作為化するのである．換言すれば，この人為的に導入される無作為化によつて配置全体はラテン方格であつても，処理のインシデンス行列 Φ が確率変数（離散的な）になる訳である．

乱塊法 [1]，釣合型不完全ブロック配置 [2] の場合には，このような無作為化によつて，各々のブロック内のプロット効果の分散が一様ならば，処理平方和と誤差平方和の比に基づく統計量の帰無仮説 $H_0:\boldsymbol{t}=\mathbf{0}$ の下での分布は良い近似において F–分布になることが示された．

本論文の目的は同じ問題をラテン方格配置の場合に調べることにあるが，結論は前二者の場合ほどに明瞭ではない．ただ少し注目すべき点は，後出の $\theta=\boldsymbol{\pi}'T\boldsymbol{\pi}/(k\Delta)$ の無作為化にもとづく分散の計算が B. L. Welch [3] の方法より，少しく透明になることである（Appendix 参照）．

インシデンス行列の定義より

$$(16)\qquad \Phi'\Phi=kI_k,\qquad \Psi_1'\Psi_1=kI_k,\qquad \Psi_2'\Psi_2=kI_k,$$

又ラテン方格の性質よりして

$$(17)\qquad \Phi'\Psi_1=\Phi'\Psi_2=G_k,\qquad \Psi_1'\Psi_2=\Psi_2'\Psi_1=G_k,$$

但しここで G_k というのとは，その要素がすべて 1 である $k\times k$ 行列のことである．

さて

$$(18)\qquad T\equiv\Phi\Phi',\qquad R\equiv\Psi_1\Psi_1',\qquad C\equiv\Psi_2\Psi_2'$$

とおけば，これらは，$k^2\times k^2$ 行列であつて，(16) によつて

$$(19)\qquad T^2=kT,\qquad R^2=kR,\qquad C^2=kC.$$

更に (17) によつて

$$(20)\qquad TR=\Phi G_k\Psi_1'=G=RT,\qquad TC=CT=G,$$
$$RC=CR=G$$

但し G は k の要素がすべて 1 である $k^2\times k^2$ 行列である．

そして

$$(21)\qquad \begin{cases} s_t^2=\dfrac{1}{k}\displaystyle\sum_{\alpha=1}^{k}T_\alpha^2-k^2\bar{x}^2=\boldsymbol{x}'\left(\dfrac{1}{k}T-\dfrac{1}{k^2}G\right)\boldsymbol{x} \\ s_r^2=\dfrac{1}{k}\displaystyle\sum_{i=1}^{k}R_i^2-k^2\bar{x}^2=\boldsymbol{x}'\left(\dfrac{1}{k}R-\dfrac{1}{k^2}G\right)\boldsymbol{x} \\ s_c^2=\dfrac{1}{k}\displaystyle\sum_{j=1}^{k}C_j^2-k^2\bar{x}^2=\boldsymbol{x}'\left(\dfrac{1}{k}C-\dfrac{1}{k^2}G\right)\boldsymbol{x} \end{cases}$$

従つて誤差平方和については引算によつて

$$(22)\qquad s_e^2=\boldsymbol{x}'\left(I_{k^2}-\frac{1}{k}T-\frac{1}{k}R-\frac{1}{k}C+\frac{2}{k^2}G\right)\boldsymbol{x}$$

となる．(21)，(22) の平方和はすべて観測値ベクトルの二次形式統計量であつて，その係数行列

は皆冪等行列で，且つ互に直交していることは容易に確かめられよう．

もし帰無仮説 $H_0:\boldsymbol{t}=\boldsymbol{0}$ が正しいならば

$$s_t^2=\boldsymbol{e}'\left(\frac{1}{k}T-\frac{1}{k^2}G\right)\boldsymbol{e}+2\boldsymbol{e}'\left(\frac{1}{k}T-\frac{1}{k^2}G\right)\boldsymbol{\pi}+\boldsymbol{\pi}'\left(\frac{1}{k}T-\frac{1}{k^2}G\right)\boldsymbol{\pi} \tag{23}$$

であり又

$$\begin{aligned} s_e^2=&\boldsymbol{e}'\left(I_{k^2}-\frac{1}{k}T-\frac{1}{k}R-\frac{1}{k}C+\frac{2}{k^2}G\right)\boldsymbol{e} \\ &+2\boldsymbol{e}'\left(I_{k^2}-\frac{1}{k}T-\frac{1}{k}R-\frac{1}{k}C+\frac{2}{k^2}G\right)\boldsymbol{\pi}+\boldsymbol{\pi}'\left(I_{k^2}-\frac{1}{k}T-\frac{1}{k}R-\frac{1}{k}C+\frac{2}{k^2}G\right)\boldsymbol{\pi}\end{aligned} \tag{24}$$

となる．

無作為化を施こす前，即ちある特定の k 次のラテン方格配置に対しては，先ず s_t^2 と s_e^2 とは互に独立である [4]．更に

$$\chi_1^2=\frac{s_t^2}{\sigma^2} \tag{25}$$

は自由度 $k-1$，偏心率

$$\lambda_1=\frac{1}{2\sigma^2}\frac{1}{k}\boldsymbol{\pi}'T\boldsymbol{\pi}\equiv\frac{\varDelta}{2\sigma^2}\theta \tag{26}$$

なる非心 χ^2 分布に従い，その要素確率は

$$e^{-\lambda_1}\cdot\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{\lambda_1^{\mu}}{\mu!}\frac{\left(\frac{\chi_1^2}{2}\right)^{\frac{k-1}{2}+\mu-1}}{\Gamma\left(\frac{k-1}{2}+\mu\right)}e^{-\frac{\chi_1^2}{2}}d\left(\frac{\chi_1^2}{2}\right). \tag{27}$$

で与えられる．但し $\varDelta\equiv\boldsymbol{\pi}'\boldsymbol{\pi}$ である．また

$$\chi_2^2=\frac{s_e^2}{\sigma^2} \tag{28}$$

は自由度 k^2-3k+2，偏心率

$$\lambda^2=\frac{\varDelta}{2\sigma^2}(1-\theta) \tag{29}$$

なる非心 χ^2 分布に従い，その要素確率は

$$e^{-\lambda_2}\cdot\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\theta_2^{\nu}}{\nu!}\frac{\left(\frac{\chi_2^2}{2}\right)^{\frac{k^2-3k+2}{2}+\nu-1}}{\Gamma\left(\frac{k^2-3k+2}{2}+\nu\right)}e^{-\frac{\chi_2^2}{2}}d\left(\frac{\chi_2^2}{2}\right) \tag{30}$$

で与えられる．従つて帰無仮説 $H_0:\boldsymbol{t}=\boldsymbol{0}$ の下での統計量 F のある特定の k 次ラテン方格配置に対する分布は次のようになつて，これは所謂“非心 F 分布”である．

$$\begin{aligned}&\frac{\Gamma\left(\frac{k^2-2k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k^2-3k+2}{2}\right)}\left(\frac{F}{k-2}\right)^{\frac{k-1}{2}-1}\left(1+\frac{F}{k-2}\right)^{-\frac{k^2-2k+1}{2}}. \\ &\times d\left(\frac{F}{k-2}\right)e^{-\frac{\varDelta}{2\sigma^2}}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{\varDelta}{2\sigma^2}\right)^l}{l!}\left(1+\frac{F}{k-2}\right)^{-l}. \\ &\times\sum_{\mu+\nu=l}\frac{l!}{\mu!\ \nu!}\left(\frac{F}{k-2}\right)^{\mu}\theta^{\mu}(1-\theta)^{\nu}\frac{\Gamma\left(\frac{k^2-2k+1}{2}+l\right)\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k^2-3k+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-1}{2}+\mu\right)\Gamma\left(\frac{k^2-3k+2}{2}+\nu\right)\Gamma\left(\frac{k^2-2k+1}{2}\right)}.\end{aligned} \tag{31}$$

さてここで，われわれは無作為化の操作によつて Φ を，従つて $T=\Phi\Phi'$ を確率化する．勿論

(32)
$$\theta=\frac{1}{k\Delta}\pi' T\pi$$

は $0\leq\theta\leq1$ なる範囲での離散的な確率変数なのであるが，この θ の無作為化による順列分布が，次の如きベータ分布

(33)
$$\frac{\Gamma\left(\frac{k^2-2k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k^2-3k+2}{2}\right)}\theta^{\frac{k-1}{2}-1}(1-\theta)^{\frac{k^2-3k+2}{2}-1}d\theta$$

で近似出来るならば，(31) に (33) をかけて θ で積分することによつて，われわれは無作為化された F の分布として (31) の第1項

(34)
$$\frac{\Gamma\left(\frac{k^2-2k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k^2-3k+2}{2}\right)}\left(\frac{F}{k-2}\right)^{\frac{k-1}{2}-1}\left(1+\frac{F}{k-2}\right)^{-\frac{k^2-2k+1}{2}}d\left(\frac{F}{k-2}\right)$$

を得るのである．

さて次に (33) の θ の分布が如何なる意味で θ の順列分布の近似となるかを調べるために，θ の順列分布のモーメントを計算しよう．

4次のラテン方格の一例として次の如きものをあげよう．

A	B	C	D
B	C	D	A
C	D	A	B
D	A	B	C

これは4つのラテン文字 A, B, C, D を 4×4 の正方形に並べて，各行各列に必ず一回だけ各文字が現われるようにしたもので，特にこの場合は A, B, C, D を循環的に1つづつづらして並べたものである．今一つの k 次のラテン方格が与えられるならば，その行の間に任意の順列を施こしてもラテン方格であり，その列の間に任意の順列を施こしてもやはりラテン方格である．更にまたその文字の間に任意の順列を施こしてもやはり k 次のラテン方格が得られる．従つて一つの k 次のラテン方格からは形式的には $(k!)^3$ 個の k 次のラテン方格が得られる訳であるが，それら全部が相異なるものになるとは限らない．このようにして1つのラテン方格から，行，列または文字の間の順列に依つて生ずるラテン方格の全体を**変換集合** (transformation set) というのである．一般に k 次のラテン方格の全体はいくつかの変換集合にわかれる．例えば $k=4$ または5のときはそれぞれ2つの変換集合がある．

今任意の k 次のラテン方格が与えられたなら，その列を並べかえて第一行が ABC…K の自然の順序になるようにし，次に第1行はそのままにして，第2行以下を並べかえて，第一列でも ABC…K の自然の順序にすることが出来る．このように直されたラテン方格を**規準方格** (reduced square) という．例えば上記の4次のラテン方格は規準方格の一つである．逆に考えれば一つの規準方格から $k!(k-1)!$ 個の相異る k 次ラテン方格が出来る訳であるから，一つ変換集合内に含まれる相異る k 次ラテン方格の数は，その変換集合内に含まれる相異なる規準方格の数の $k!(k-1)!$ 倍である．

さて話を元に戻して，θ の平均値を求めて見よう．f 番目のプロットが i 行，j 列に位するなら

$f=(i-1)k+j$ とする．更に

$$\pi_f=\pi_j^{(i)}$$

で表して，プロット効果ベクトル $\boldsymbol{\pi}$ を

$$(35)\qquad \boldsymbol{\pi}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\pi}^{(1)}\\ \boldsymbol{\pi}^{(2)}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\pi}^{(k)}\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{\pi}^{(i)}=\begin{pmatrix}\pi_1^{(i)}\\ \pi_2^{(i)}\\ \vdots\\ \pi_k^{(i)}\end{pmatrix}$$

とし，プロット効果の第 i 行内分散を

$$(36)\qquad \varDelta^{(i)}=\boldsymbol{\pi}^{(i)\prime}\boldsymbol{\pi}^{(i)},$$

また第 j 列のプロット効果ベクトル $\boldsymbol{\pi}_j$ を

$$(37)\qquad \boldsymbol{\pi}_j=\begin{pmatrix}\pi_j^{(1)}\\ \pi_j^{(2)}\\ \vdots\\ \pi_j^{(k)}\end{pmatrix}$$

で定義して，第 j 列内プロット効果の分散を

$$(38)\qquad \varDelta_j=\boldsymbol{\pi}_j'\boldsymbol{\pi}_j$$

とする．勿論プロット効果の全分散は

$$(39)\qquad \varDelta=\boldsymbol{\pi}'\boldsymbol{\pi}=\sum_{i=1}^{k}\varDelta^{(i)}=\sum_{j=1}^{k}\varDelta_j.$$

k 次の順列

$$(40)\qquad \boldsymbol{\sigma}=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots\cdots & k\\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots\cdots & \sigma(k)\end{pmatrix}$$

に対応する 0, 1 からなる $k\times k$ 行列を S_σ とする．即ち

$$(4^*)\qquad S_\sigma\cdot\begin{pmatrix}1\\ 2\\ \vdots\\ k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sigma(1)\\ \sigma(2)\\ \vdots\\ \sigma(k)\end{pmatrix},\qquad S_\sigma'\cdot\begin{pmatrix}\sigma(1)\\ \sigma(2)\\ \vdots\\ \sigma(k)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ \vdots\\ k\end{pmatrix}.$$

さて k 個の処理に順列を施すのは

$$\boldsymbol{t}^*=S_\sigma\cdot\boldsymbol{t}$$

なる変換をすることに相当するから，われわれのモデルでは

$$(41)\qquad \boldsymbol{x}=g\boldsymbol{1}+\varPhi S_\sigma'\cdot\boldsymbol{t}^*+\varPsi_1\boldsymbol{r}+\varPsi_2\boldsymbol{c}+\boldsymbol{\pi}+\boldsymbol{e}$$

となる．このとき $\boldsymbol{\pi}'T\boldsymbol{\pi}$ に相当するものは

$$\boldsymbol{\pi}'T^*\boldsymbol{\pi}=\boldsymbol{\pi}'\varPhi S_\sigma' S_\sigma\varPhi'\boldsymbol{\pi}=\boldsymbol{\pi}'T\boldsymbol{\pi}$$

であつて不変である．従つてある一つの変換集合の内で $\boldsymbol{\pi}'T\boldsymbol{\pi}$ の無作為化による平均をとるには，その変換集合に属する一つのラテン方格をとり，その k 個の列の間，k 個の行の間の順列によつて生ずるラテン方格について平均すればよい．

今 k 次のラテン方格の変換集合を $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \cdots, \mathfrak{T}_K$ として，それぞれの含む相異なる規準方格の数を $n_1, n_2, \cdots, n_K$，$(n=\sum n_\nu)$ とすれば

$$(42)\qquad \mathcal{E}(\boldsymbol{\pi}'T\boldsymbol{\pi})=\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{K}n_\nu\mathcal{E}_\nu(\boldsymbol{\pi}'T\boldsymbol{\pi}).$$

但しここで $\mathcal{E}_\nu$ は $\mathfrak{T}_\nu$ 内での平均を取る操作を表わすものとする．

$\mathfrak{T}_\nu$ 内の一つのラテン方格から出発する．

$$U_\sigma=\begin{Vmatrix} S_\sigma & & & 0 \\ & S_\sigma & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & S_\sigma \end{Vmatrix}=S_\sigma\times I_k,\qquad V_\tau=\begin{Vmatrix} s_{11}{}^\tau & & \cdots\cdots & & s_{1k}{}^\tau & \\ & s_{11}{}^\tau & & & & s_{1k}{}^\tau \\ \vdots & & & \vdots & & \\ s_{k1}{}^\tau & & \cdots\cdots & & s_{kk}{}^\tau & \\ & s_{k1}{}^\tau & & & & s_{kk}{}^\tau \end{Vmatrix}=I_k\times S_\tau$$

但しここで $\sigma(1)=1$ で，σ は $2\cdots k$ の順列全体の作る $k-1$ 次の対称群 $\mathfrak{S}_{k-1}$ を τ は $1,2,\cdots,k$ の順列全体の作る k 次の対称群 $\mathfrak{S}_k$ を動くものとする．

さて

$$T=\Phi\Phi'=\|t_{fg}\|$$

であつたが，

$$f=(i-1)k+p,\qquad g=(j-1)k+q$$

ならば

(43) $$t_{fg}=t_{pq}{}^{ij}$$

とかくことにする．

(44) $$\mathcal{E}_\nu(\boldsymbol{\pi}'T\boldsymbol{\pi})=\frac{1}{k!(k-1)!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{k-1}}\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_k}\boldsymbol{\pi}'U_\sigma V_\tau TU_\tau{}'U_\sigma{}'\boldsymbol{\pi}$$

であるが今，先ず $\tau\in\mathfrak{S}_k$ について平均をとる．

(45) $$\frac{1}{k!}\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_k}\boldsymbol{\pi}'V_\tau TV_\tau{}'\boldsymbol{\pi}=\frac{1}{k!}\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_k}\boldsymbol{\pi}'V_\tau{}'TV_\tau\boldsymbol{\pi}$$
$$=\frac{1}{k!}\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_k}(V_\tau\boldsymbol{\pi})'T(V_\tau\boldsymbol{\pi})$$
$$=\frac{1}{k!}\sum_{p,q=1}^{k}\sum_{i,j=1}^{k}t_{pq}{}^{ij}\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_k}\pi_p{}^{\tau(i)}\pi_q{}^{\tau(j)}$$

正確には $\pi_p{}^{(\tau(i))}$ とすべきであるが繁雑なので $\pi_p{}^{\tau(i)}$ とかくことにする．さて

(46) $$\frac{1}{k!}\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_k}\pi_p{}^{\tau(i)}\pi_q{}^{\tau(j)}=\begin{cases}\dfrac{1}{k}\displaystyle\sum_{l=1}^{k}\pi_p{}^{(l)}\pi_q{}^{(l)}, & i=j\\[2ex] \dfrac{1}{k(k-1)}\displaystyle\sum_{l\neq m}\pi_p{}^{(l)}\pi_q{}^{(m)}, & i\neq j\end{cases}$$

だから

(47) $$\frac{1}{k!}\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_k}(V_\tau\boldsymbol{\pi})'T(V_\tau\boldsymbol{\pi})=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\sum_{p,q=1}^{k}t_{pq}{}^{ii}\sum_{l=1}^{k}\pi_p{}^{(l)}\pi_q{}^{(l)}$$
$$+\frac{1}{k(k-1)}\sum_{i\neq j}\sum_{p,q=1}^{k}t_{pq}{}^{ij}\sum_{l\neq m}\pi_p{}^{(l)}\pi_q{}^{(m)}$$

ラテン方格の性質から

(48) $$t_{pq}{}^{ij}=\delta_{pq},\qquad \sum_{i\neq j}t_{pq}{}^{ij}=k(1-\delta_{pq}),$$

従つて

(49) $$\frac{1}{k!}\sum_{\tau\in\mathfrak{S}}(V_\tau\boldsymbol{\pi})'T(V_\tau\boldsymbol{\pi})=\sum_{l,p=1}^{k}\pi_p{}^{(l)2}+\frac{1}{k-1}\sum_{l\neq m}\sum_{p\neq q}\pi_p{}^{(l)}\pi_q{}^{(m)}$$
$$=\frac{k}{k-1}\Delta$$

よつて

(50) $$\mathcal{E}_\nu(\boldsymbol{\pi}'T\boldsymbol{\pi})=\frac{k}{k-1}\Delta$$

従つて

(51) $$\mathcal{E}_\nu(\theta)=\frac{1}{k-1}$$

最後に (42) によつて

(52) $$\mathcal{E}(\theta)=\frac{1}{k-1}$$

となつて，これは (33) の θ の分布の一次積率である．つまり (33) はその平均値が一致する程度の近似なのである．

θ の分散の計算は大変に面倒であり，かつ，その結果は各変換集合に関係しており，それの統計的意味づけもまた困難である． 従つてラテン方格の場合には (4) のようなモデルでの無作為化は，他の乱塊法などの場合のようにはうまく行かないという結論になる．

Appendix

無作為化にもとづく順列分布における $\pi' T\pi$ の分散の計算

小 川 潤 次 郎
池 田 貞 雄

$\boldsymbol{\pi}' T\boldsymbol{\pi}$ の平方の平均を取るには

$$\frac{1}{k!(k-1)!}\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_k}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{k-1}}(\boldsymbol{\pi}' U_\sigma V_\tau TV_\tau' U_\sigma'\boldsymbol{\pi})^2$$

を計算すべきである．ここに τ は $1,2,\cdots,k$ の順列全体の作る k 次対称群 $\mathfrak{S}_k$ にわたつて動き，σ は $2,\cdots,k$ の順列全体の作る $(k-1)$ 次対称群 $\mathfrak{S}_{k-1}$ にわたつて動くものとする．もし σ を $\mathfrak{S}_k$ 全体を動かすと，同一ラテン方格が k 個づつ重複して表われるだけであるから平均操作としては

$$\frac{1}{(k!)^2}\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_k}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k}(\boldsymbol{\pi}' U_\sigma V_\tau TV_\tau' U_\sigma'\boldsymbol{\pi})^2$$

を計算しても同じである．更にまた有限群についての平均であるから

(1) $$\mathcal{E}_\nu(\boldsymbol{\pi}' T\boldsymbol{\pi})^2=\frac{1}{(k!)^2}\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_k}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k}(\boldsymbol{\pi}' U_\sigma' V_\tau' TV_\tau U_\sigma\boldsymbol{\pi})^2$$

を計算すれば良いことが判る．さて

(2) $$\begin{aligned}(V_\tau U_\sigma\boldsymbol{\pi})' T(V_\tau U_\sigma\boldsymbol{\pi})&=\sum_{p,q}\sum_{i,j}t_{pq}{}^{ij}\pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i)}\pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(j)}\\&=\sum_p\Big(\sum_i t_{pq}{}^{ii}\pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i)2}+\sum_{i\neq j}t_{pp}{}^{ij}\pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i)}\pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(j)}\Big)\\&\quad+\sum_{p\neq q}\Big(\sum_i t_{pq}{}^{ii}\pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(i)}+\sum_{i\neq j}t_{pq}{}^{ij}\pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i)}\pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(j)}\Big)\\&=\sum_p\sum_i\pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i)2}+\sum_{p\neq q}\sum_{i\neq j}t_{pq}{}^{ij}\pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i)}\pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(j)}\end{aligned}$$

であるから，

(3) $$\begin{aligned}&[(V_\tau U_\sigma\boldsymbol{\pi})' T(V_\tau U_\sigma\boldsymbol{\pi})]^2\\&=\Big(\sum_p\sum_i\pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i)2}\Big)^2+2\Big(\sum_p\sum_i\pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i)2}\Big)\Big(\sum_{p\neq q}\sum_{i\neq j}t_{pq}{}^{ij}\pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i)}\pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(j)}\Big)\\&\quad+\Big(\sum_{p\neq q}\sum_{i\neq j}t_{pq}{}^{ij}\pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i)}\pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(j)}\Big)^2\end{aligned}$$

I. $\mathcal{E}_\nu\Big(\sum_p\sum_i\pi_{\tau(p)}{}^{\tau(i)2}\Big)^2$ の計算

$$\begin{aligned}\Big(\sum_p\sum_i\pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i)2}\Big)^2&=\sum_{p,q}\sum_{i,j}\pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i)2}\pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(j)2}\\&=\sum_p\Big(\sum_i\pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i)4}+\sum_{i\neq j}\pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i)2}\pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(j)2}\Big)\end{aligned}$$

$$+\sum_{p\neq q}(\sum_i \pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i)2}\pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(i)2}+\sum_{i\neq j}\pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i)2}\pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(j)2})$$

で，B. L. Welch にならつて，次の記号を用いることにする.

$$(4)\quad \begin{cases} D\equiv\sum_p\sum_i \pi_p{}^{(i)4}, \quad F\equiv\Delta^2=(\sum_p\sum_i \pi_p{}^{(i)2})^2 \\ G\equiv\sum_i(\sum_p \pi_p{}^{(i)2})^2+\sum_p(\sum_i \pi_p{}^{(i)2})^2=\sum_i \Delta^{(i)2}+\sum_p \Delta_p{}^2 \\ H\equiv\sum_{i,j}(\sum_p \pi_p{}^{(i)}\pi_p{}^{(j)})^2=\sum_{i\neq j}(\sum_p \pi_p{}^{(i)}\pi_p{}^{(j)})^2+\sum_i \Delta^{(i)2}. \end{cases}$$

$$(5)\quad \begin{cases} \mathcal{E}_\nu(\pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i)4}) = \frac{1}{k^2}\sum_p\sum_i \pi_p{}^{(i)4} = \frac{1}{k^2}D, \\ \mathcal{E}_\nu(\pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i)2}\pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(j)2}) = \frac{1}{k^2(k-1)}\sum_p\sum_{i\neq j}\pi_p{}^{(i)2}\pi_p{}^{(j)2} = \frac{1}{k^2(k-1)}(\sum_p \Delta_p{}^2-D), \\ \mathcal{E}_\nu(\pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i)2}\pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(i)2}) = \frac{1}{k^2(k-1)}\sum_{p\neq q}\sum_i \pi_p{}^{(i)2}\pi_q{}^{(i)2} = \frac{1}{k^2(k-1)}(\sum_i \Delta^{(i)2}-D), \\ \mathcal{E}_\nu(\pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i)2}\pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(j)2}) = \frac{1}{k^2(k-1)^2}\sum_{p\neq q}\sum_{i\neq j}\pi_p{}^{(i)2}\pi_q{}^{(j)2} = \frac{1}{k^2(k-1)^2}(F-G+D). \end{cases}$$

よつて，各タイプの項の数をかけて加えて

$$(6)\quad \mathcal{E}_\nu(\sum_p\sum_i \pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i)2})^2=\Delta^2=F.$$

II. $\mathcal{E}_\nu(\sum_p\sum_i \pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i)2})(\sum_{p\neq q}\sum_{i\neq j}t_{pq}{}^{ij}\pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i)}\pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(j)})$ の計算

まず $p\neq q$ なら $\sum_{i\neq j}t_{pq}{}^{ij}=k$ であつたから

$$(7)\quad \sum_{p\neq q}\sum_{i\neq j}t_{pq}{}^{ij}=k^2(k-1).$$

さてこの場合に出て来る一般項は

$$\pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i)}\pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(j)}\pi_{\sigma(r)}{}^{\tau(l)2}$$

であるが，次の9つのタイプがある.

(i) $r=p,\ l=i,$ (ii) $r=p,\ l=j,$ (iii) $r=p,\ l\neq i\neq j,$
(iv) $r=q,\ l=i,$ (v) $r=q,\ l=j,$ (vi) $r=q,\ l\neq i\neq j,$
(vii) $r\neq p\neq q,\ l=i,$ (viii) $r\neq p\neq q,\ l\neq j,$ (ix) $r\neq p\neq q,\ l\neq i\neq j.$

この9つのタイプについてそれぞれ平均を取ると

$$\text{(i)}\quad \mathcal{E}_\nu(\pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i)3}\pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(j)}) = \frac{1}{k^2(k-1)^2}\sum_{p\neq q}\sum_{i\neq j}\pi_p{}^{(i)3}\pi_q{}^{(j)} = \frac{1}{k^2(k-1)^2}\sum_p\sum_i \pi_p{}^{(i)4}=\frac{1}{k^2(k-1)^2}D,$$

$$\text{(ii)}\quad \mathcal{E}_\nu(\pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i)}\pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(j)2}\pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(j)}) = \frac{1}{k^2(k-1)^2}\sum_{p\neq q}\sum_{i\neq j}\pi_p{}^{(i)}\pi_p{}^{(j)2}\pi_q{}^{(j)} = \frac{1}{k^2(k-1)^2}\sum_p\sum_i \pi_p{}^{(i)4}=\frac{1}{k^2(k-1)^2}D,$$

$$\text{(iii)}\quad \mathcal{E}_\nu(\pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i)}\pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(j)}\pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(l)2}) = \frac{1}{k^2(k-1)^2(k-2)}\sum_{p\neq q}\sum_{i\neq j\neq l}\pi_p{}^{(i)}\pi_q{}^{(j)}\pi_p{}^{(l)2} = \frac{1}{k^2(k-1)^2(k-2)}(\sum \Delta_p{}^2-2D),$$

$$\text{(iv)}\quad \mathcal{E}_\nu(\pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i)}\pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(j)}\pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(i)2}) = \frac{1}{k^2(k-1)^2}\sum_{p\neq q}\sum_{i\neq j}\pi_p{}^{(i)}\pi_q{}^{(j)}\pi_q{}^{(i)2}=\frac{1}{k^2(k-1)^2}D,$$

$$\text{(v)}\quad \mathcal{E}_\nu(\pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i)}\pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(j)3}) = \frac{1}{k^2(k-1)^2}\sum_{p\neq q}\sum_{i\neq j}\pi_p{}^{(i)}\pi_q{}^{(j)3}=\frac{1}{k^2(k-1)^2}D,$$

(vi) $$\mathcal{E}_\nu(\pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i)}\pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(j)}\pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(l)2})=\frac{1}{k^2(k-1)^2(k-2)}\sum_{p\neq q}\sum_{i\neq j\neq l}\pi_p{}^{(i)}\pi_q{}^{(j)}\pi_q{}^{(l)2}$$
$$=\frac{1}{k^2(k-1)^2(k-2)}(\sum_p\Delta_p{}^2-2D),$$

(vii) $$\mathcal{E}_\nu(\pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i)}\pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(j)}\pi_{\sigma(r)}{}^{\tau(i)2})=\frac{1}{k^2(k-1)^2(k-2)}\sum_{p\neq q\neq r}\sum_{i\neq j}\pi_p{}^{(i)}\pi_q{}^{(j)}\pi_r{}^{(i)2}$$
$$=\frac{1}{k^2(k-1)^2(k-2)}(\sum_i\Delta^{(i)2}-2D),$$

(viii) $$\mathcal{E}_\nu(\pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i)}\pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(j)}\pi_{\sigma(r)}{}^{\tau(j)2})=\frac{1}{k^2(k-1)^2(k-2)}\sum_{p\neq q\neq r}\sum_{i\neq j}\pi_p{}^{(i)}\pi_q{}^{(j)}\pi_r{}^{(i)2}$$
$$=\frac{1}{k^2(k-1)^2(k-2)}(\sum_i\Delta^{(i)2}-2D),$$

(ix) $$\mathcal{E}_\nu(\pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i)}\pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(j)}\pi_{\sigma(r)}{}^{\tau(l)2})=\frac{1}{k^2(k-1)^2(k-2)^2}\sum_{p\neq q\neq r}\sum_{i\neq j\neq l}\pi_p{}^{(i)}\pi_q{}^{(j)}\pi_r{}^{(l)2}$$
$$=\frac{1}{k^2(k-1)^2(k-2)^2}(F-2G+4D).$$

それぞれのタイプの項にかかる乗数を考慮して加えると

(8) $$\mathcal{E}_\nu(\sum_p\sum_i\pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i)2})(\sum_{p\neq q}\sum_{i\neq j}t_{pq}{}^{ij}\pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i)}\pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(j)})=\frac{1}{k-1}F.$$

III. $$\mathcal{E}_\nu(\sum_{p\neq q}\sum_{i\neq j}t_{pq}{}^{ij}\boldsymbol{\pi}_{\sigma(p)}{}^{\tau(i)}\boldsymbol{\pi}_{\sigma(q)}{}^{\tau(j)})^2$$
$$=\mathcal{E}_\nu(\sum_{p\neq q}\sum_{p'\neq q'}\sum_{i\neq j}\sum_{i'\neq j'}t_{pq}{}^{ij}t_{p'q'}{}^{i'j'}\boldsymbol{\pi}_{\sigma(p)}{}^{\tau(i)}\boldsymbol{\pi}_{\sigma(q)}{}^{\tau(j)}\boldsymbol{\pi}_{\sigma(p')}{}^{\tau(i')}\boldsymbol{\pi}_{\sigma(q')}{}^{\tau(j')})$$ **の計算**

この部分の計算は出て来る項のタイプが色々あるので一寸面倒であるが，先ず (p,q), (p',q') の組合わせによつて7つのタイプに分ち，そのそれぞれを (i,j), (i',j') の組合わせによつて 7 つのタイプに分つ．

先ず

(9) $$(\sum_{p\neq q}\sum_{i\neq j}t_{pq}{}^{ij}\pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i)}\pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(j)})(\sum_{p'\neq q'}\sum_{i'\neq j'}t_{p'q'}{}^{i'j'}\pi_{\sigma(p')}{}^{\tau(i')}\pi_{\sigma(q')}{}^{\tau(j')})$$
$$=\sum_{p\neq q}(\sum_{i\neq j}t_{pq}{}^{ij}\pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i)}\pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(j)})(\sum_{i'\neq j'}t_{pq}{}^{i'j'}\pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i')}\pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(j')}) \qquad (P)$$
$$+\sum_{p\neq q}(\sum_{i\neq j}t_{pq}{}^{ij}\pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i)}\pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(j)})(\sum_{i'\neq j'}t_{qp}{}^{i'j'}\pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(i')}\pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(j')}) \qquad (Q)$$
$$+\sum_{p\neq q\neq p'}(\sum_{i\neq j}t_{pq}{}^{ij}\pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i)}\pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(j)})(\sum_{i'\neq j'}t_{p'q}{}^{i'j'}\pi_{\sigma(p')}{}^{\tau(i')}\pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(j')}) \qquad (R)$$
$$+\sum_{p\neq q\neq p'}(\sum_{i\neq j}t_{pq}{}^{ij}\pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i)}\pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(j)})(\sum_{i'\neq j'}t_{p'p}{}^{i'j'}\pi_{\sigma(p')}{}^{\tau(i')}\pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(j')}) \qquad (S)$$
$$+\sum_{p\neq q\neq q'}(\sum_{i\neq j}t_{pq}{}^{ij}\pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i)}\pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(j)})(\sum_{i'\neq j'}t_{pq'}{}^{(i'j')}\pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i')}\pi_{\sigma(q')}{}^{\tau(j')}) \qquad (T)$$
$$+\sum_{p\neq q\neq q'}(\sum_{i\neq j}t_{pq}{}^{ij}\pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i)}\pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(j)})(\sum_{i'\neq j'}t_{qq'}{}^{i'j'}\pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(i')}\pi_{\sigma(q')}{}^{\tau(j')}) \qquad (U)$$
$$+\sum_{p\neq q\neq p'\neq q'}(\sum_{i\neq j}t_{pq}{}^{ij}\pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i)}\pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(j)})(\sum_{i'\neq j'}t_{p'q'}{}^{i'j'}\pi_{\sigma(p')}{}^{\tau(i')}\pi_{\sigma(q')}{}^{\tau(j')}) \qquad (V)$$

さて次には，$(P), (Q), \cdots, (V)$ のそれぞれを (i,j), (i',j') の組合わせによつて 7つのタイプに分割する．

(10) $$P=\sum_{p\neq q}\sum_{i\neq j}t_{pq}{}^{ij2}\pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i)2}\pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(j)2} \qquad (P_1)$$
$$+\sum_{p\neq q}\sum_{i\neq j}t_{pq}{}^{ij}t_{pq}{}^{ji}\pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i)}\pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(j)}\pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(i)}\pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(j)} \qquad (P_2)$$
$$+\sum_{p\neq q}\sum_{i\neq j\neq i'}t_{pq}{}^{ij}t_{pq}{}^{i'j}\pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i)}\pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(j)}\pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i')}\pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(j)} \qquad (P_3)$$

$$+\sum_{p\neq q}\sum_{i\neq j\neq i'} t_{pq}{}^{ij} t_{pq}{}^{i'i} \pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i)} \pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(j)} \pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i')} \pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(i)} \qquad (P_4)$$

$$+\sum_{p\neq q}\sum_{i\neq j\neq j'} t_{pq}{}^{ij} t_{pq}{}^{ij'} \pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i)} \pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(j)} \pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i)} \pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(j')} \qquad (P_5)$$

$$+\sum_{p\neq q}\sum_{i\neq j\neq j'} t_{pq}{}^{ij} t_{pq}{}^{jj'} \pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i)} \pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(j)} \pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(j)} \pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(j')} \qquad (P_6)$$

$$+\sum_{p\neq q}\sum_{i\neq j\neq i'\neq j'} t_{pq}{}^{ij} t_{pq}{}^{i'j'} \pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i)} \pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(j)} \pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i')} \pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(j')} \qquad (P_7)$$

$t_{pq}{}^{ij}=0$ または1であつたのだから，$t_{pq}{}^{ij2}=t_{pq}{}^{ij}$.

$$\sum_{p\neq q}\sum_{i\neq j} t_{pq}{}^{ij2}=\sum_{p\neq q}\sum_{i\neq j} t_{pq}{}^{ij}=k^2(k-1).$$

(11)
$$\mathcal{E}_\nu(P_1)=\sum_{p\neq q}\sum_{i\neq j} t_{pq}{}^{ij2}\cdot\mathcal{E}(\pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i)2}\pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(j)2})=\frac{1}{k-1}\sum_{p\neq q}\sum_{i\neq j}\pi_p{}^{(i)2}\pi_q{}^{(j)2}$$
$$=\frac{1}{k-1}\sum_{p\neq q}\sum_{i}\pi_p{}^{(i)2}(\Delta_q-\pi_q{}^{(i)2})$$
$$=\frac{1}{k-1}(\sum_{p\neq q}\Delta_p\Delta_q-\sum_{p\neq q}\sum_{i}\pi_p{}^{(i)2}\pi_q{}^{(i)2})$$
$$=\frac{1}{k-1}\{\sum_{p}\Delta_p(\Delta-\Delta_p)-\sum_{p}\sum_{i}\pi_p{}^{(i)2}(\Delta^{(i)}-\pi_p{}^{(i)2})\}$$
$$=\frac{1}{k-1}(\Delta^2-\sum_{q}\Delta_p{}^2-\sum_{i}\Delta^{(i)2}+\sum_{p}\sum_{i}\pi_p{}^{(i)4})$$
$$=\frac{1}{k-1}[F-G+D].$$

次に $p\neq q$ に対して和 $\sum_{i\neq j} t_{pq}{}^{ij}t_{pq}{}^{ji}$ において1となる項は同時に

$$t_{pq}{}^{ij}=t_{pq}{}^{ji}=1$$

のときだけである．つまり i 行 p 列と j 行 q 列に同一処理が割当てられ，また j 行 p 列と i 行 q 列に他の同一処理が割当られているときに限る．今このような性質をもつ二つの処理は p 列，q 列に関して**相互性**をもつということにすれば，$\sum_{i\neq j} t_{pq}{}^{ij}t_{pq}{}^{ji}$ は p 列，q 列に関して相互性をもつ処理の総数であり，更に

(12)
$$\rho_\nu=\sum_{p\neq q}\sum_{i\neq j} t_{pq}{}^{ij}t_{pq}{}^{ji}$$

はある二つの列について相互性をもつ処理対の総数であつて B. L. Welch が $\sum_{k\neq k'} n_{kk'}$ とかいたものと一致する．ρ_ν は ν 番目の変換集合に属するラテン方格については一定である．

(13)
$$\mathcal{E}_\nu(P_2)=\sum_{p\neq q}\sum_{i\neq j} t_{pq}{}^{ij}t_{pq}{}^{ji}\mathcal{E}_\nu(\pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i)}\pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(j)}\pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(j)}\pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(i)})$$
$$=\frac{\rho_\nu}{k^2(k-1)^2}\sum_{p\neq q}\sum_{i\neq j}\pi_p{}^{(i)}\pi_p{}^{(j)}\pi_q{}^{(i)}\pi_q{}^{(j)}$$
$$=\frac{\rho_\nu}{k^2(k-1)^2}[H-G+D].$$

$$\sum_{i\neq j\neq i'} t_{pq}{}^{ij}t_{pq}{}^{i'j}=\sum_{i\neq j} t_{pq}{}^{ij}(1-t_{pq}{}^{ij}-t_{pq}{}^{jj})=\sum_{i\neq j}(t_{pq}{}^{ij}-t_{pq}{}^{ij2})=0$$

であるから

(14)
$$\mathcal{E}_\nu(P_3)=\sum_{p\neq q}\sum_{i\neq j\neq i} t_{pq}{}^{ij}t_{pq}{}^{i'j}\mathcal{E}_\nu(\pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i)}\pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(j)}\pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i')}\pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(j)})=0$$

同様に

$$\sum_{i\neq j\neq j'} t_{pq}{}^{ij}t_{pq}{}^{ij'}=\sum_{i\neq j} t_{pq}{}^{ij}(1-t_{pq}{}^{ii}-t_{pq}{}^{ij})=0$$

だから

(15) $$\mathcal{E}_\nu(P_5)=\sum_{p\neq q}\sum_{i\neq j\neq j'}t_{pq}{}^{ij}t_{pq}{}^{ij'}\mathcal{E}(\pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i)}\pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(j)}\pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i)}\pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(j')})=0$$

次に

(16) $$\sum_{p\neq q}\sum_{i\neq j\neq i'}t_{pq}{}^{ij}t_{pq}{}^{i'i}=\sum_{p\neq q}\sum_{i\neq j}t_{pq}{}^{ij}(1-t_{pq}{}^{ii}-t_{pq}{}^{ji})=k^2(k-1)-\rho_\nu.$$

(17) $$\sum_{p\neq q}\sum_{i\neq j\neq j'}t_{pq}{}^{ij}t_{pq}{}^{jj'}=\sum_{p\neq q}\sum_{i\neq j}t_{pq}{}^{ij}(1-t_{pq}{}^{ji}-t_{pq}{}^{jj})=k^2(k-1)-\rho_\nu$$

であるから

(18) $$\begin{aligned}\mathcal{E}_\nu(P_4)&=\frac{k^2(k-1)-\rho_\nu}{k^2(k-1)^2(k-2)}\sum_{p\neq q}\sum_{i\neq j\neq j'}\pi_p{}^{(i)}\pi_q{}^{(j)}\pi_p{}^{(i')}\pi_q{}^{(i)}\\&=\frac{k^2(k-1)-\rho_\nu}{k^2(k-1)^2(k-2)}\sum_{p\neq q}\{-\sum_{i\neq j}\pi_p{}^{(i)2}\pi_q{}^{(i)}\pi_q{}^{(j)}-\sum_{i\neq j}\pi_p{}^{(i)}\pi_p{}^{(j)}\pi_q{}^{(i)}\pi_q{}^{(j)}\}\\&=\frac{k^2(k-1)-\rho_\nu}{k^2(k-1)^2(k-2)}\sum_{p\neq q}\{\sum_i\pi_p{}^{(i)2}\pi_q{}^{(i)2}-\sum_{i\neq j}\pi_p{}^{(i)}\pi_p{}^{(i)}\pi_q{}^{(i)}\pi_q{}^{(j)}\}\\&=\frac{k^2(k-1)-\rho_\nu}{k^2(k-1)^2(k-2)}[\sum_i\Delta^{(i)2}-H+G-2D].\end{aligned}$$

同様にして

(19) $$\begin{aligned}\mathcal{E}_\nu(P_6)&=\frac{k^2(k-1)-\rho_\nu}{k^2(k-1)^2(k-2)}\sum_{p\neq q}\sum_{i\neq j\neq j'}\pi_p{}^{(i)}\pi_q{}^{(j)}\pi_p{}^{(j)}\pi_q{}^{(j')}\\&=\frac{k^2(k-1)-\rho_\nu}{k^2(k-1)^2(k-2)}[\sum_i\Delta^{(i)2}-H+G-2D].\end{aligned}$$

最後に P_7 については，まず

(20) $$\begin{aligned}\sum_{p\neq q}\sum_{i\neq j\neq i'\neq j'}t_{pq}{}^{ij}t_{pq}{}^{i'j'}&=\sum_{p\neq q}\sum_{i\neq j\neq i'}t_{pq}{}^{ij}(1-t_{pq}{}^{i'i}-t_{pq}{}^{i'j}-t_{pq}{}^{i'i'})\\&=\sum_{p\neq q}\sum_{i\neq j}t_{pq}{}^{ij}\{k-2-(1-t_{pq}{}^{ii}-t_{pq}{}^{ji})-(1-t_{pq}{}^{ij}-t_{pq}{}^{jj})\}\\&=k^2(k-1)(k-3)+\rho_\nu\end{aligned}$$

(21) $$\begin{aligned}\mathcal{E}_\nu(P_7)&=\frac{k^2(k-1)(k-3)+\rho_\nu}{k^2(T-1)^2(k-2)^2(k-3)}\sum_{p\neq q}\sum_{i\neq j\neq i'\neq j'}\pi_p{}^{(i)}\pi_q{}^{(j)}\pi_p{}^{(i')}\pi_q{}^{(j')}\\&=\frac{k^2(k-1)(k-3)+\rho_\nu}{k^2(k-1)^2(k-2)^2(k-3)}\sum_{p\neq q}\{2\sum_{i\neq j}\pi_p{}^{(i)}\pi_p{}^{(j)}\pi_q{}^{(i)}\pi_q{}^{(j)}\\&\quad+\sum_{i\neq j}\pi_p{}^{(i)2}\pi_q{}^{(j)2}-3\sum_i\pi_p{}^{(i)2}\pi_q{}^{(j)2}\}\\&=\frac{k^2(k-1)(k-3)+\rho_\nu}{k^2(k-1)^2(k-2)^2(k-3)}[6D+F-3G+2H-3\sum_i\Delta^{(i)2}]\end{aligned}$$

(22) $$\begin{aligned}Q=&\sum_{p\neq q}\sum_{i\neq j}t_{pq}{}^{ij}t_{qp}{}^{ij}\pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i)}\pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(j)}\pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(i)}\pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(j)} &(Q_1)\\&+\sum_{p\neq q}\sum_{i\neq j}t_{pq}{}^{ij}t_{qp}{}^{ji}\pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i)}\pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(j)}\pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(j)}\pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i)} &(Q_2)\\&+\sum_{p\neq q}\sum_{i\neq j\neq i'}t_{pq}{}^{ij}t_{qp}{}^{i'j}\pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i)}\pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(j)}\pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(i')}\pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(j)} &(Q_3)\\&+\sum_{p\neq q}\sum_{i\neq j\neq i'}t_{pq}{}^{ij}t_{qp}{}^{i'i}\pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i)}\pi_{q(q)}{}^{\tau(j)}\pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(i')}\pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i)} &(Q_4)\\&+\sum_{p\neq q}\sum_{i\neq j\neq j'}t_{pq}{}^{ij}t_{qp}{}^{ij'}\pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i)}\pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(j)}\pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(i)}\pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(j')} &(Q_5)\\&+\sum_{p\neq q}\sum_{i\neq j\neq j'}t_{pq}{}^{ij}t_{qp}{}^{jj'}\pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i)}\pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(j)}\pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(j)}\pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(j')} &(Q_6)\\&+\sum_{p\neq q}\sum_{i\neq j\neq i'\neq j'}t_{pq}{}^{ij}t_{qp}{}^{i'j'}\pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i)}\pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(j)}\pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(i')}\pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(j')} &(Q_7)\end{aligned}$$

(23) $$\mathcal{E}_\nu(Q_1)=\frac{\rho_\nu}{k^2(k-1)^2}[D-G+H]$$

(24) $$\mathcal{E}_\nu(Q_2)=\frac{1}{k-1}[D-G+H]$$

(25) $$\mathcal{E}_\nu(Q_3)=\frac{k^2(k-1)-\rho_\nu}{k^2(k-1)^2(k-2)}[-2D+G-H+\sum_i \Delta^{(i)2}]$$

(26) $$\mathcal{E}_\nu(Q_4)=\mathcal{E}_\nu(Q_6)=0$$

(27) $$\mathcal{E}_\nu(Q_5)=\frac{k^2(k-1)-\rho_\nu}{k^2(k-1)^2(k-2)}[-2D+G-H+\sum_i \Delta^{(i)2}]$$

(28) $$\mathcal{E}_\nu(Q_7)=\frac{k^2(k-1)(k-3)+\rho_\nu}{k^2(k-1)^2(k-2)(k-3)}[6D+F-3G+2H-3\sum_i \Delta^{(i)2}].$$

(29)
$$
\begin{aligned}
R= &\sum_{p\neq q\neq p'}\sum_{i\neq j} t_{pq}{}^{ij}\, t_{p'q}{}^{ij}\, \pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i)}\, \pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(j)}\, \pi_{\sigma(p')}{}^{\tau(i)}\, \pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(j)} && (R_1)\\
&+\sum_{p\neq q\neq p'}\sum_{i\neq j} t_{pq}{}^{ij}\, t_{p'q}{}^{ji}\, \pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i)}\, \pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(j)}\, \pi_{\sigma(p')}{}^{\tau(j)}\, \pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(i)} && (R_2)\\
&+\sum_{p\neq q\neq p'}\sum_{i\neq j\neq i'} t_{pq}{}^{ij}\, t_{p'q}{}^{i'j}\, \pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i)}\, \pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(j)}\, \pi_{\sigma(p')}{}^{\tau(i')}\, \pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(j)} && (R_3)\\
&+\sum_{p\neq q\neq p'}\sum_{i\neq j\neq i'} t_{pq}{}^{ij}\, t_{p'q}{}^{i'i}\, \pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i)}\, \pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(j)}\, \pi_{\sigma(p')}{}^{\tau(i')}\, \pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(i)} && (R_4)\\
&+\sum_{p\neq p\neq p'}\sum_{i\neq i\neq j'} t_{pq}{}^{ij}\, t_{p'q}{}^{ij'}\, \pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i)}\, \pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(j)}\, \pi_{\sigma(p')}{}^{\tau(i)}\, \pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(j')} && (R_5)\\
&+\sum_{p\neq q\neq p'}\sum_{i\neq j\neq j'} t_{pq}{}^{ij}\, t_{p'q}{}^{jj'}\, \pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i)}\, \pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(j)}\, \pi_{\sigma(p')}{}^{\tau(j)}\, \pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(j')} && (R_6)\\
&+\sum_{p\neq q\neq p'}\sum_{i\neq j\neq i'\neq j'} t_{pq}{}^{ij}\, t_{p'q}{}^{i'j'}\, \pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i)}\, \pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(j)}\, \pi_{\sigma(p')}{}^{\tau(i')}\, \pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(j')} && (R_7)
\end{aligned}
$$

(30) $$\mathcal{E}_\nu(R_1)=0$$

(31) $$\mathcal{E}_\nu(R_2)=\frac{k^2(k-1)-\rho_\nu}{k^2(k-1)^2(k-2)}[-2D+G-H+\sum_p \Delta_p{}^2]$$

(32) $$\mathcal{E}_\nu(R_3)=\frac{1}{(k-1)(k-2)}[4D+F-2G]$$

(33) $$\mathcal{E}_\nu(R_4)=\frac{k^2(k-1)(k-3)+\rho_\nu}{k^2(k-1)^2(k-2)^2}[4D-2G+H]$$

(34) $$\mathcal{E}_\nu(R_5)=\frac{1}{(k-1)(k-2)}[4D-2G+H]$$

(35) $$\mathcal{E}_\nu(R_6)=\frac{k^2(k-1)(k-3)+\rho_\nu}{k^2(k-1)^2(k-2)^2}[4D-2G+H]$$

(36) $$\mathcal{E}_\nu(R_7)=\frac{k^2(k-1)(k-3)^2-\rho_\nu}{k^2(k-1)^2(k-2)^2(k-3)}[-12D-F+6G-2H].$$

(37)
$$
\begin{aligned}
S= &\sum_{p\neq q\neq p'}\sum_{i\neq j} t_{pq}{}^{ij}\, t_{p'p}{}^{ji}\, \pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i)}\, \pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(j)}\, \pi_{\sigma(p')}{}^{\tau(i)}\, \pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(j)} && (S_1)\\
&+\sum_{p\neq q\neq p'}\sum_{i\neq j} t_{pq}{}^{ij}\, t_{p'p}{}^{ji}\, \pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i)}\, \pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(j)}\, \pi_{\sigma(p')}{}^{\tau(j)}\, \pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i)} && (S_2)\\
&+\sum_{p\neq q\neq p'}\sum_{i\neq j\neq i'} t_{pq}{}^{ij}\, t_{p'p}{}^{i'j}\, \pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i)}\, \pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(j)}\, \pi_{\sigma(p')}{}^{\tau(i')}\, \pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(j)} && (S_3)\\
&+\sum_{p\neq q\neq p'}\sum_{i\neq j\neq i'} t_{pq}{}^{ij}\, t_{p'p}{}^{i'i}\, \pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i)}\, \pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(j)}\, \pi_{\sigma(p')}{}^{\tau(i')}\, \pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i)} && (S_4)\\
&+\sum_{p\neq q\neq p'}\sum_{i\neq j\neq j'} t_{pq}{}^{ij}\, t_{p'p}{}^{ij'}\, \pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i)}\, \pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(j)}\, \pi_{\sigma(p')}{}^{\tau(i)}\, \pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(j')} && (S_5)\\
&+\sum_{p\neq q\neq p'}\sum_{i\neq j\neq j'} t_{pq}{}^{ij}\, t_{p'p}{}^{jj'}\, \pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i)}\, \pi_{\sigma(q)}{}^{(j)}\, \pi_{\sigma(p')}{}^{\tau(j)}\, \pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(j')} && (S_6)\\
&+\sum_{p\neq q\neq p'}\sum_{i\neq j\neq i'\neq j'} t_{pq}{}^{ij}\, t_{p'p}{}^{i'j'}\, \pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i)}\, \pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(j)}\, \pi_{\sigma(p')}{}^{\tau(i')}\, \pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(j')} && (S_7)
\end{aligned}
$$

(38) $$\mathcal{E}_\nu(S_1)=\frac{k^2(k-1)-\rho_\nu}{k^2(k-1)^2(k-2)}[-2D+G-H+\sum_p \Delta_p{}^2]$$

(39) $$\mathcal{E}_\nu(S_2)=0$$

(40)　$$\mathcal{E}_\nu(S_3)=\frac{k^2(k-1)(k-3)+\rho_\nu}{k^2(k-1)^2(k-2)^2}[4D-2G+H]$$

(41)　$$\mathcal{E}_\nu(S_4)=\frac{1}{(k-1)(k-2)}[4D+F-2G]$$

(42)　$$\mathcal{E}_\nu(S_5)=\frac{k^2(k-1)(k-3)+\rho_\nu}{k^2(k-1)^2(k-2)^2}[4D-2G+H]$$

(43)　$$\mathcal{E}_\nu(S_6)=\frac{1}{(k-1)(k-2)}[4D+F-2G]$$

(44)　$$\mathcal{E}_\nu(S_7)=\frac{k^2(k-1)(k-3)^2-\rho_\nu}{k^2(k-1)^2(k-2)^2(k-3)}[-12D-F+6G-2H].$$

(45)
$$\begin{aligned}
T=&\sum_{p\neq q\neq q'}\sum_{i\neq j}t_{pq}{}^{ij}t_{pq'}{}^{ij}\pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i)}\pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(j)}\pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i)}\pi_{\sigma(q')}{}^{\tau(j)} && (T_1)\\
&+\sum_{p\neq q\neq q'}\sum_{i\neq j}t_{pq}{}^{ij}t_{pq'}{}^{ji}\pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i)}\pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(j)}\pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(j)}\pi_{\sigma(q')}{}^{\tau(i)} && (T_2)\\
&+\sum_{p\neq q\neq q'}\sum_{i\neq j\neq i'}t_{pq}{}^{ij}t_{pq'}{}^{i'j}\pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i)}\pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(j)}\pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i')}\pi_{\sigma(q')}{}^{\tau(j)} && (T_3)\\
&+\sum_{p\neq q\neq q'}\sum_{i\neq j\neq i'}t_{pq}{}^{ij}t_{pq'}{}^{i'i}\pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i)}\pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(j)}\pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i')}\pi_{\sigma(q')}{}^{\tau(i)} && (T_4)\\
&+\sum_{p\neq q\neq q'}\sum_{i\neq j\neq j'}t_{pq}{}^{ij}t_{pq'}{}^{ij'}\pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i)}\pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(j)}\pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i)}\pi_{\sigma(q')}{}^{\tau(j')} && (T_5)\\
&+\sum_{p\neq q\neq q'}\sum_{i\neq j\neq j'}t_{pq}{}^{ij}t_{pq'}{}^{jj'}\pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i)}\pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(j)}\pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(j)}\pi_{\sigma(q')}{}^{\tau(j')} && (T_6)\\
&+\sum_{p\neq q\neq q'}\sum_{i\neq j\neq i'\neq j'}t_{pq}{}^{ij}t_{pq'}{}^{i'j'}\pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i)}\pi_{\sigma(q)}{}^{\tau(j)}\pi_{\sigma(p)}{}^{\tau(i')}\pi_{\sigma(q')}{}^{\tau(j')} && (T_7)
\end{aligned}$$

(46)　$$\mathcal{E}_\nu(T_1)=0$$

(47)　$$\mathcal{E}_\nu(T_2)=\frac{k^2(k-1)-\rho_\nu}{k^2(k-1)^2(k-2)}[-2D+G-H+\sum_p\Delta_p{}^2]$$

(48)　$$\mathcal{E}_\nu(T_3)=\frac{k^2(k-1)(k-3)+\rho_\nu}{k^2(k-1)^2(k-2)^2}[4D-2G+H]$$

(49)　$$\mathcal{E}_\nu(T_4)=\frac{1}{(k-1)(k-2)}[4D+F-2G]$$

(50)　$$\mathcal{E}_\nu(T_5)=\frac{k^2(k-1)(k-3)+\rho_\nu}{k^2(k-1)^2(k-2)^2}[4D-2G+H]$$

(51)　$$\mathcal{E}_\nu(T_6)=\frac{1}{(k-1)(k-2)}[4D+F-2G]$$

(52)　$$\mathcal{E}_\nu(T_7)=\frac{k^2(k-1)(k-3)^2+\rho_\nu}{k^2(k-1)^2(k-2)^2(k-3)}[-12D-F+6G-2H].$$

同様にして

(53)　$$U=U_1+U_2+U_3+U_4+U_5+U_6+U_7$$

で

(54)　$$\mathcal{E}_\nu(U_1)=\frac{k^2(k-1)-\rho_\nu}{k^2(k-1)^2(k-2)}[-2D+G-H+\sum_q\Delta_p{}^2]$$

(55)　$$\mathcal{E}_\nu(U_2)=0$$

(56)　$$\mathcal{E}_\nu(U_3)=\frac{k^2(k-1)(k-3)+\rho_\nu}{k^2(k-1)^2(k-2)^2}[4D-2G+H]$$

(57)　$$\mathcal{E}_\nu(U_4)=\frac{1}{(k-1)(k-2)}[4D-2G+F]$$

(58)　$$\mathcal{E}_\nu(U_5)=\frac{k^2(k-1)(k-3)+\rho_\nu}{k^2(k-1)^2(k-2)^2}[4D-2G+H].$$

(59) $$\mathcal{E}_\nu(U_6)=\frac{1}{(k-1)(k-2)}[4D-2G+F]$$

(60) $$\mathcal{E}_\nu(U_7)=\frac{k^2(k-1)(k-3)^2-\rho_\nu}{k^2(k-1)^2(k-2)^2(k-3)}[-12D-F+6G-2H]$$

(61) $$V=V_1+V_2+V_3+V_4+V_5+V_6+V_7$$

(62) $$\mathcal{E}_\nu(V_1)=\frac{k^2(k-1)(k-3)+\rho_\nu}{k^2(k-1)^2(k-2)(k-3)}[6D+F-6G+2H-3\sum_p \Delta_p{}^2]$$

(63) $$\mathcal{E}_\nu(V_2)=\frac{k^2(k-1)(k-3)+\rho_\nu}{k^2(k-1)^2(k-2)(k-3)}[6D+F-6G+2H-3\sum_p \Delta_p{}^2]$$

(64) $$\mathcal{E}_\nu(V_3)=\frac{k^2(k-1)(k-3)^2-\rho_\nu}{k^2(k-1)^2(k-2)^2(k-3)}[-12D-F+6G-2H]$$

(65) $$\mathcal{E}_\nu(V_4)=\frac{k^2(k-1)(k-3)^2-\rho_\nu}{k^2(2-1)^2(k-2)^2(k-3)}[-12D-F+6G-2H]$$

(66) $$\mathcal{E}_\nu(V_5)=\frac{k^2(k-1)(k-3)^2-\rho_\nu}{k^2(k-1)^2(k-2)^2(k-3)}[-12D-F+6G-2H]$$

(67) $$\mathcal{E}_\nu(V_6)=\frac{k^2(k-1)(k-3)^2-\rho_\nu}{k^2(k-1)^2(k-2)^2(k-3)}[-12D-F+6G-2H]$$

(68) $$\mathcal{E}_\nu(V_7)=\frac{k^2(k-1)(k-3)(k^2-6k+10)+2\rho_\nu}{k^2(k-1)^2(k-2)^2(k-3)^2}[36D+3F-18G+6H]$$

これらの値を用いて

(69) $$\begin{aligned}\mathcal{E}_\nu(\boldsymbol{\pi}'T\boldsymbol{\pi})^2 &=\frac{1}{(k-1)(k-2)^2(k-3)}[2k^2(k-1)D+(k^4-4k^3+2k^2+6k-6)F \\ &\qquad -2k(k^2-3k+3)G-2(k^2-6k+6)H] \\ &\quad +\frac{\rho_\nu}{k^2(k-1)^2(k-2)^2(k-3)^2}[2k^2(k-1)^2D+2(2k^2-6k+3)F \\ &\qquad -2k(k-1)(k^2-3k+3)G+2(k^4-6k^3+13k^2-12k+6)H]\end{aligned}$$

を得る，従つて

(70) $$\bar{\rho}\equiv\frac{1}{n}\sum_\nu n_\nu\rho_\nu$$

とし

(71) $$\begin{aligned}\mathcal{E}(\boldsymbol{\pi}'T\boldsymbol{\pi})^2 &=\frac{1}{(k-1)(k-2)^2(k-3)}[2k^2(k-1)D+(k^4-4k^3+2k^2+6k-6)F \\ &\qquad -2k(k^2-3k+3)G-2(k^2-6k+6)H] \\ &\quad +\frac{\bar{\rho}}{k^2(k-1)^2(k-2)^2(k-3)^2}[2k^2(k-1)^2D+2(2k^2-6k+3)F \\ &\qquad -2k(k-1)(k^2-3k+3)G+2(k^4-6k^3+13k^2-12k+6)H]\end{aligned}$$

更に

$$\begin{aligned}&\mathrm{Var}(\theta) \\ &=\frac{1}{k^2(k-1)(k-2)^2(k-3)}\Big[2k^2(k-1)\frac{D}{F}+(k^4-4k^3+2k^2+6k-6) \\ &\quad -2k(k^2-3k+3)\frac{G}{F}-2(k^2-6k+6)\frac{H}{F}\Big] \\ &\quad +\frac{\bar{\rho}}{k^4(k-1)^2(k-2)^2(k-3)^2}\Big[2k^2(k-1)^2\frac{D}{F}+2(2k^2-6k+3)\end{aligned}$$

$$-2k(k-1)(k^2-3k+3)\frac{G}{F}+2(k^4-6k^3+13k^2-12k+6)\frac{H}{F}\Big]-\frac{1}{(k-1)^2}$$

となる．

日本大学理工学部数学教室

References

［1］ Ogawa, Junjiro, "The effect of the rondomization in the analysis of randomized block design". Ann. Inst. Stat, Math. Vol. 13, No. 2 (1961).

［2］ Ogawa, Junjiro, "On the null-distribution of F-statistics in randomized balanced incomplete block design under the Neyman model". Ann. Math. Stat. に投稿.

［3］ Welch, B. L., "On the z-test in randomized blocks and latin squares". Biometrika. Vol. 29 (1937)

(Nov. 10, 1961)