ローレンツ・カーブに基づくより有機的な理論の創造と実践のための準備

田　口　時　夫

(1962年6月受付)

Preparatories to Creation of Theories and Practices based on the Lorenz' Curve

TOKIO TAGUTI

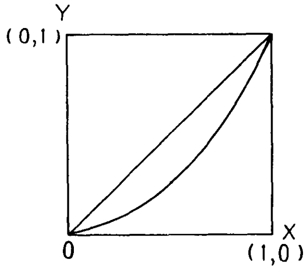
In this paper the author prepared to establish the more organic mathematical method of analysis of statistical data. Its primary attempt is the paper "A report on the various concentrated froms of capital in the economic situation of Japan and the mathematical method of measurement of them" Proc. Inst. Stat. Math., Vol. 8, No. 1 and this is a companion volume to the report "On the base, development and the applications of Lorenz' curve" printed independently 1962.

I hope that the reader compares with them.

Institute of Statistical Mathematics

目　次

緒　言



(i)　0または正領域に存在する連続な密度分布函数 $f(x)$ をもつ変量，あるいは階級評識 x は同時にまた

$$X=\int_0^x f(t)dt, \qquad Y=\frac{1}{\bar{x}}\int_0^x tf(t)dt \tag{1}$$

で変換されるローレンツ・カーブ

$$Y=\varphi(X)$$

をもつことになる*)．（ここに $\bar{x}$ は平均値を示すものである。）

*) この事実に基づく結果のいくつかは既に統計数理破究所彙報，第8巻，第1号（1960年）拙稿でも触れたことがある．又昨年度は更に科学破究費により「ローレンツ・カーブの基礎，発展及び国富調査結果へのその適用」と題して独立にやや立入って論じた．本稿はその前提となるものであるが同時にそこで除外されたいくつかの結果をまとめたものでもある．

(ii)　ところでこのカーブの実際の作製においては，経験的密度乃至度数分布の作製の場合のように密度を各分類区間のうちの何れの標識に対応させるべきか等の問題は存在せず，その意味で実態把握において正確で客観的なスタイルを示すともいえるであろう，

(iii)　再び (i) に立ち戻り，逆にこのカーブ $Y=\varphi(X)$ を基礎にしてみれば，累積分布函数 $F(x)$ は

$$\varphi'(X)=\frac{x}{\bar{x}}=\text{const.}\,F^{-1}(X) \tag{1$'$}$$

或は常数Kに対し，$K\varphi'(X)=\psi(X)$ とすれば，その逆函数が $F(x)$ となることが，(1) により容易に算出（前掲 1960 年度拙稿）されるが，この関係は，(1) そのものの示す両者の関係よりはるかに簡単である，

(iv)　このカーブを基礎に数学的性質を論ずることは一面では直接標識 x にかえて $x/\bar{x}$，つまり一種の修正数量を基礎に分析を試みるものともいえる（前掲拙稿中，本年度の小稿）が，これは実際面でいくつかの事例によって示される標識量 x のもつ相対的性格に則し，その絶対化を脱して直接分布間の比較を可能とするものではないだろうか．より実際的には，没階級的な一律の作用物価等？）つまり一般的作用の影響を除去して一挙に対象の本質に迫ることを可能にするのではないだろうか．

こうした諸観点が前記の国富実態統計調査結果の分析を一応整理する目的と相俟って，あえてこの小篇を起草する動機となったのである．特に起草に当って，科学研究費の助成並びに経済企画庁の職員各位，統計数理研究所の諸氏，に主として実際の資料と計算の面での助力に深謝する．

なお，標本並びにそれを基礎にする諸概念，方式については論旨の明晰と一貫性を図るためここでは一切顧慮しなことにした．

§1　ローレンツ・カーブの諸論（分布函数の諸性質との比較）

I.　一種類のローレンツ・カーブの諸性質

(i)　平均値（差当り相加平均）は (1) 式あるいは (1)$'$ 式のように形式上の修正係数として有用であるばかりでなく，ローレンツ・カーブの曲線上の性質においても重要な役割を演ずる．

(イ)　それは両階級の所有額を等しくする階級分点である．

(ロ)　それは，ローレンツ・カーブの局所的均等あるいは累積速度 $dY/dX=1$ の条件を与える（前掲 1960 年レポート）．

(ハ)　また平均は周知の微積分学的概念から $d(X-Y)/dX=0$，従って，階級格差 $X-Y$ の極値を与える条件である（前掲本年度別稿）．

(ii)　例をあげるまでもなく，平均値と並び具体的なローレンツ・カーブの分析に当っては集中比率 concentration ratio (C. R.) の算出が一つの重要な方法とされているが，これは理論的にローレンツ・カーブの数学的性質を分析する側からしても妥当な着目といえよう．

つまりこの巨視的な集団に属する格差，即階級区分xによって生ずる個別格差 $2(X-Y)$ の綜合あるいは平均値としてのそれは，前掲の小稿によって形式として

$$\text{C. R.}=1-2\int_0^1 Y\,dX \qquad \text{に一致する．}$$

(iii)　これが分散を一部代替する機能を果すことは名称に直接謳われている処であるが，分散0の状態は事実殆ど一点分布に近いから，まさに均等線 $Y=X$ に接近したカーブを画くことになる．反面分散 ∞ の状態は，このカーナの面では C. R.$=1$ の状態に相応する．つまり，そのような場合，正領域に存在する密度分布函数 $f(x)$ につき，如何程xを大に従って，累積 X を1に近くとっても，それからはみ出る部分の形成する $(x-\bar{x})^2f(x)$ の値が如何なる常数をも越す状態を示唆する

から，当然 $xf(x)$ についても同様であり，従ってそれは $xf(x)$ の全体即 $\bar{x}$ のうちに占める比重 Y が極めて1に近いことを示す．即ちこの時カーブはほとんど

$$Y=0 \qquad 0 \leqq X < 1$$
$$Y=1 \qquad X=1$$

となるからである．

この2例から類推するとこれらの中間状態間の或種の対応（事実 $\dfrac{\sigma^2}{\bar{x}^2}=\displaystyle\int_0^1(\varphi'(X)-1)^2dX$ である。）も予想されるところであるが，反面両者が完全な同義をもつに至らないことは，例えば拙稿前掲 1660 年の試算による，指数分布やある種の直線分布に例をとれば明らかとなる．その際分散はパラメータ λ 等の数値如何により多様に変化しうるにもかかわらず，C.R. は一定だからである．両者の指数としての性格の優劣をきめようとするならば一面，ローレンツ・カーブの変量が一般の場合測定単位に含まれる質的側面，いわば物理学におけるディメンジョンを捨象した純粋に抽象的な数として扱えるという点をも念頭におく必要があるであろう．

厳密にいって分散として計算された数値そのものが独立して指数的意義をもたらす，集団間の比較可能性を保障するのは同一標識に関する異なる集団のとる数値としてであろうが，C.R. の際は，その変量のこうした無名数的性格により同一集団の異標識に関するものであってさしつかえないことになりそうである．

二つの曲線に代表される二つの状態の比較に当る従来の手法によれば

$$\sqrt{3\int_0^1(X-Y)^2dX}$$

の方が或は適切であるかも知れない．この場合分散 ∞ 及び0の状態は各 1，0 が対応し，C.R. と同じく集中指数としての適性を示すのである．

II.　同一集団に関する二種のローレンツ・カーブ間の関係

（i）　こうした見地において，相互間にある種の関係の成立が予想される二標識のもつローレンツ・カーブは相互に如何なる関係を保つか，あるいはその逆の立場を問うことができる．

このため今非常に一般的に，ローレンツの二曲線 $Y_1=\varphi_1(X)$，$Y_2=\varphi_2(X)$ を考察の対象とするならばその比較は最単純には

$$1-2\int_0^1\{(X-Y_2)-(X-Y_1)\}dX=1-2\int_0^1(Y_1-Y_2)dX=1-(\mathrm{C.R.}\,Y_2-\mathrm{C.R.}\,Y_1)$$

及び $\displaystyle\int_0^1\frac{X-Y_2}{X-Y_1}dX$．といった形式で行なうことが出来よう．これを試みに第一種及び第二種の比較係数 $R.R_{\mathrm{I}}$，及び $R.R_{\mathrm{II}}$ とでもしておこう．その場合もし，I，(iii) の終末における前者の場合，すなわち Y_1, Y_2 を同一統計集団の異なる標識に関するローレンツ・カーブとする場合，先こうした種類の係数が決して本質的ではないが行掛り上従来の相関関係あるいは相関係数と何等かの機能上の対応を示さないかということで問題を再提起しよう．事実相関係数1を保障する場合，各密度及びその累積分布函数 $f_1(x), f_2(x)$；$F_1(x), F_2(y)$ に対し，$q-\bar{y}=\lambda(x-\bar{x})$ のとき，$f_1(x)=f_2(y)$ となり，この結果上記の諸係数はかなりの対応数量を与える．

（ii）　即ち相関係数 1 をもつ二つの標識変量を x_1, x_2 とし，各分布函数を密度及びその累積につき，それぞれ $f_1(x_1), F_1(x_1)$；$f_2(x_2), F_2(x_2)$ とすれば，すべての x_1 に対し，

$$\lambda(x_1-\bar{x}_1)=x_2-\bar{x}_2=\xi \qquad \lambda>0,\ (\xi\ \text{は変数}) \tag{2}$$

を満足する x_2 が存在し

$$f_1(x_1)=\lambda f_2(x_2) \qquad F_1(x_1)=F_2(x_2) \tag{2$'$}$$

となる．

従って

$$f_1\left(\frac{\xi}{\lambda}+\bar{x}_1\right)=\lambda f_2(\xi+\bar{x}_2) \tag{2)''}$$

以下最初 $f_1(x_1), f_2(x_2)$ を連続とし，かつ，正領域に限って存在するものとしてみよう．

その場合

$$X=F_1(x_1)=F_2(x_2).$$

$$Y_1=\frac{1}{\bar{x}_1}\int_0^{x_1} tf_1(t)\,dt$$

ここで $t=\dfrac{t'}{\lambda}+\bar{x}_1$ とすれば，

$$Y_1=\frac{1}{\bar{x}_1}\int_{-\lambda\bar{x}_1}^{\lambda(x_1-\bar{x}_1)}\left(\frac{t'}{\lambda}+\bar{x}_1\right)f_1\left(\frac{t'}{\lambda}+\bar{x}_1\right)\frac{dt'}{\lambda}$$

(2) 及び (2)$''$ により

$$=\frac{1}{\bar{x}_1}\int_{-\lambda\bar{x}_1}^{\xi}\left(\frac{t'}{\lambda}+\bar{x}_1\right)f_2(t'+\bar{x}_1)\,dt'$$

今，更に $t'+\bar{x}_2=s$ と置けば

$$=\frac{1}{\bar{x}_1}\int_{\bar{x}_2-\lambda\bar{x}_1}^{\xi+\bar{x}_2}\left(\frac{s-\bar{x}_2}{\lambda}+\bar{x}_1\right)f_2(s)\,ds$$

$$=\frac{1}{\bar{x}_1}\int_{\bar{x}_2-\lambda\bar{x}_1}^{x_2}\left(\frac{s-\bar{x}_2}{\lambda}+\bar{x}_1\right)f_2(s)\,ds$$

今もし $\bar{x}_2-\lambda\bar{x}_1=0$ とすれば

$$=\frac{1}{\bar{x}_1}\left(\frac{\bar{x}_2}{\lambda}Y_2-\frac{\bar{x}_2}{\lambda}X\right)+X$$

従って

$$Y_1-X=\frac{\bar{x}_2}{\lambda\bar{x}_1}(Y_2-X)=Y_2-X \tag{3}$$

$$\int_0^1\frac{X-Y_2}{X-Y_1}dX=1 \tag{3)'}$$

即各点において定比率を保ち，いや一致し，従って $R.R_{\text{II}}=1$ となる．更に $R.R_{\text{I}}=1$ も成立する．

今もし $f_1(x_1)f_2(x_2)$ は x の全領域で存在するとした際は $m>0$ のとき $-1<Y_1, Y_2\leqq 1$ とすれば足りるが，(前掲レポート)，その際は定積分の下限は $-\infty$ となり最初の仮定なくして，(3) が成立する．

但し，一般には (3)$'$ の代りに $\displaystyle\int_0^1\frac{X-Y_2}{X-Y_1}=\frac{\lambda\bar{x}_1}{\bar{x}_2}$ となる．

(iii) 逆に相関係数が -1 の場合，(ii) (2) において $\lambda<0$ とすれば足りるが，その結果 (2)$'$ は

$$X_1=F_1(x_1)=1-F_2(x_2)=1-X_2,\ f_1(x_1)=-\lambda f_2(x_2)$$

となる．従って (ii) の運びにより

$$Y_1=-\frac{1}{\bar{x}_1}\int_{\bar{x}_2-\lambda\bar{x}_1}^{x_2}\left(\frac{s-\bar{x}_2}{\lambda}+\bar{x}_1\right)f_2(s)ds$$

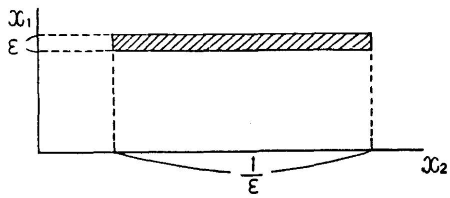
ここで $\bar{x}_2-\lambda\bar{x}_1=0$ とすれば

$$Y_1=-(Y_2-X_2)-X_2 \quad 或は \quad (X_1-Y_1)+(X_2-Y_2)=1$$

今 $f_1(x_1), f_2(x_2)$ の存在を拡張した場合は，(ii) の t' 及び s に関する定積分の下限は $+\infty$ となるから上式の代りに

$Y_1 = -\{1-Y_2-(1-X_2)\}-(1-X_2)$ 故に $Y_1+X_1=Y_2-X_2$ が成立し，一般的にみて係数判定が難しい．

(iv) 相関0の一例として極端には下図の領域で一様に分布する場合を考察すれば $\varepsilon\to 0$ のとき容易に $R.R_1$ もまた0に近づく事が (1) により帰結されよう． だが反面 x_1, x_2 につき一様性が同一性質のものであれば $R.R_1$ は1にもなるのである．



(v) しかし単にこうした極端な数例のみを基礎にするときは上記の J 及び $R.R.$ 等によらずに，他により相関的機能をもつ指標があるかもしれない．事実有望な係数として

$$1-\left|\frac{\int_0^1\{(X-Y_2)-(X-Y_1)\}dX}{\int_1^0(X-Y_1)dX+\int_0^1(X-Y_2)dX}\right|,\qquad \frac{\int_0^1(X-Y_1)(X_2-Y_2)dX}{\int_0^1(X-Y_1)dX\cdot\int_0^1(X-Y_2)dX},$$

更に以上の $X-Y$ の代りに Y と置いたもの等枚挙に暇がない．筆者は

$$J=\frac{\int_0^1(X-Y_1)(X-Y_2)dX}{\sqrt{\int_0^1(X-Y_1)^2dX\cdot\int_0^1(X-Y_2)^2dX}}$$

を次の III において利用するが，実は以上の曲線関係はかかる指標を必要とせず，端的に Y_1, Y_2 の函数関係を把握すべきことを示すものかもしれない．

一般的に相関係数とは同一集団の異標識に関する分布間の関係を指示するものであるが，ここで構成されたローレンツ・カーブを基礎とした指数は同一標識に関する異集団間の分布の関係指標をも示唆するものである．

(vi) 以上の二曲線が実質と名目といった数量的資料に基づくとき，諸係数は一の遊離性係数となるであろう．例えば実質資本と名目資本との関係等，また，所得と資産についての吟味係数として算定してみることも数学的には可能である．

(vii) 時間的に今集団内の一分子が $x=\varphi(t), y=\lambda\varphi(t)+\mu$ なる運動を $F_1(x)=F_2(y)$ という条件下で展開すれば，それは上記の関係をみたすカーブ上で行なわれる．

III. 異なる集団に関する同一標識に基づく多種のローレンツ・カーブ間の関係

II の結論に直結する立場は例えば，同一標識 x の対象を異にする集団に関する分布 $f_1(x)$, $F_1(x)$; $f_2(x), F_2(x)$ につき，

(i) $F_2(x)=F_1(x+\kappa)$ あるいは $f_2(x)=f_1(x+k)$

のような関係の認められる際の各々のローレンツ・カーブ Y_1, Y_2 間の関係を論ずることを認めるであろう．ローレンツ・カーブの本来的仮説に従えば，この仮設の成立するためには $f_1(x)$ は $x\leqq k$ で存在することになる．

今 $X=\int_k^x f_1(t)dt$ とし， $t=t'+k$ とおけば

$$X=\int_0^{x-k}f_1(t'+k)dt'=\int_0^{x-k}f_2(t')dt'$$

この結果式の上では $Y_1(x)$ と $Y_2(x-k)$ を比較することになる．

$$Y_1=\frac{1}{m_{f_1}(x)}\int_k^x tf_1(t)dt=\frac{1}{m_{f_1}(x)}\int_0^{x-k}(t'+k)f_1(t'+k)dt'$$

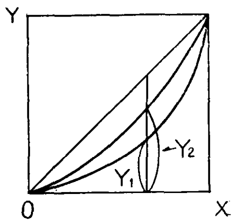
$$=\frac{1}{m_{f_1}(x)}\left[\int_0^{x-k}t'f_2(t')dt+k\int_0^{x-k}f_2(t')dt'\right]$$

$$=\frac{1}{m_{f_1}(x)}\{m_{f_2}(x)\cdot Y_2+kX\}$$

(以上及び以下において $m(X)$ は $\bar{x}$ 等と同じく平均を示す記号として用いた).

仮説に従うと $m_{f_2}(x)=m_{f_1}(x)-k$ を得るのは容易である．従って

$$X-Y_1=\frac{m_{f_2}(x)}{m_{f_1}(x)}(X-Y_2) \qquad (4)$$



つまりグラフ上の曲線の点から均等線に至る距離の比は一定であり，従って II によると $J=1$ なのである．

次で他の線型性

(ii) $F_2(x)=F_1(\lambda x)$ 又は $f_2(x)=\lambda f_1(\lambda x)$

を仮定してみる．

$$X=\int_0^x f_1(t)dt$$

$t=\lambda t'$ により

$$=\int_0^{\frac{x}{\lambda}}\lambda f_1(\lambda t')dt'=\int_0^{\frac{x}{\lambda}}f_2(t')dt'$$

従ってこの際には $Y_1(x)$ と $Y_2\left(\frac{x}{\lambda}\right)$ の比較が妥当形式となる．

$$Y_1=\frac{1}{m_{f_1}(x)}\int_0^x tf_1(t)dt$$

$$=\frac{1}{m_{f_1}(x)}\int_0^{\frac{x}{\lambda}}\lambda^2 t'f^2(\lambda t')dt'=\frac{\lambda}{m_{f_1}(x)}\int_0^{\frac{x}{\lambda}}t'f_2(t')dt'=\frac{m_{f_2}(x)}{m_{f_1}(x)}\lambda\cdot Y_2$$

しかしこの仮定では $m_{f_2}(x)=\frac{m_{f_1}(x)}{\lambda}$ も成立する．従って

$$Y_1=Y_2 \qquad (5)$$

すなわちカーブは合致なる事になる．従って $J=1$.

(iii) 一般に

$$f_2(x)=f_1(\lambda x+k) \qquad x>0$$

といった関係は (i) の結果と相等しいことが以上の結果から明らかとなる． 従って Gauß 分布の正平均の二形式は拡張された， 即ち $x<0$ を 認めた ローレンツ・カーブでこの関係を充すのである．指数分布にしても同様である．

以上を具体的には評価法を同じくする産業別資産額階級別分布間の関係に関する最単純な聯関モデルとし，あるいは同一産業について異なる時点における分布間の関係を

$$F_1(h(t_1)x+k(t_1))=F_2(h(t_2)x+k(t_2))$$

とした場合の判別方法となる．

(IV) 方式の発展

(i) しかしこのように変換形式を一次に留めずに考察を進めようとする際には，例えば

$$f_2(x)=f_1(\sum_{n=0}^{k} a_n x^n)$$

とした結果は復雑である．このことからすでに前掲稿本年度レポートで述べたローレンツ・カーブの拡張の問題が生ずる．すなわち 1st moment-distribution function (c.f. The Lognormal Distribution, J.A.C. Brown) ともいわれる (1) 式を発展させ，

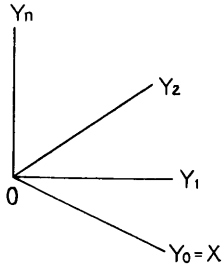
$$Y_n=\frac{1}{m(x^n)}\int_0^x x^n f(x)dx \qquad n=0,1,2,\cdots, Y_0=X$$

とし，Y_n を軸にもつ多次元空間の曲面として考察すれば有効である．x の存在領域が負にふたる時は同様に単に各 n につき $-1<Y_n\leqq 1$ を認める．前記レポート第 I 部 2 及び第 II 部の理論の筋を一部補正しつつこれを追うと，この曲面において $\dfrac{\partial Y_n}{\partial X}=\dfrac{\partial Y_n}{\partial Y_0}=1$ を与えるパラメータ x が n 次の原点の周りのモーメントであることを知れば，かかる条件を充たす点の近傍はかなり重要な性質をもつと予想されるであろう．

この場合再び II の問題に立ち帰り，もし同一標識 x に関する二つの集団の累積分布函数 $F(x_1)$, $F(x_2)$ の間に

$$F_2(x)=F_1(\varphi(x)$$

の関係の存在を想定すれば



$$X=F_2(x)=F_1(\varphi(x))$$

$$Y_{2,P}=\frac{1}{m_2(x^p)}\int_0^x t^p dF_2(t)=\frac{1}{m_2(x^p)}\int_0^x t^p dF_1(\varphi(t))$$

$m_1(x^q)=m_{1,q}, m_2(x^p)=m_{2,p}$ で記し $s=\varphi(t)$ と置くと

$$=\frac{1}{m_{2,p}}\int_0^{\varphi(x)}\{\varphi^{-1}(s)\}^p dF_1(s)$$

*ここで $\varphi^{-1}(x)$ が各階の微分可能でその値で有限ならば $\varphi^{-1}(x)=\sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r$ とおくことが出来，

両者のローレンツ曲面 $\mathfrak{Y}_1=\begin{pmatrix} X \\ Y_{1,1} \\ \vdots \\ Y_{1,p} \\ \vdots \end{pmatrix}$, $\mathfrak{Y}_2=\begin{pmatrix} X \\ Y_{2,1} \\ \vdots \\ Y_{2,p} \\ \vdots \end{pmatrix}$

がマトリックス A を介して

$$\mathfrak{Y}_2=A\mathfrak{Y}_1$$

であるとすれば

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0\cdots\cdots & 0\cdots\cdots & \\ \frac{1}{m_{2,1}}\kappa_{1,0}(a_0 a_1\cdots) & \frac{m_{1,1}}{m_{2,1}}\kappa_{1,1}(a_0, a_1, \cdots)\cdots & \frac{m_{1,q2}}{m_{2,1}}\kappa_{1,q}(a_0,a_1,\cdots) & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \\ \frac{1}{m_{2,p}}\kappa_{1,0}(a_0 a_1\cdots) & \frac{m_{1,1}}{m_{2,p}}\kappa_{p1}(a_0, a_1, \cdots)\cdots & \frac{m_{1,q}}{m_{2,p}}\kappa_{p,q}(a_0,a_1,\cdots) & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \end{pmatrix} \qquad (6)$$

(但し $\kappa(a_0 a_1\cdots)$ は係数 a_i の整式で表わされる)．

となる．モメントの分布に対する重要性は，この A の式によっても伺い知ることが出来る．

多種分布 $f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)$ に亘る連関についても本質的には変らない．

(ii) 今もし

---

*) 脚注前掲の報告ではこの部分の条件が聊か曖昧であったので一先づ充分条件の形で再び掲載した．

$$F_2(x)=F_1(\log x) \qquad x\geqq 1 \tag{7}$$

を分布相互間に認めると

$$f_2(x)=\frac{1}{x}f_1(\log x)$$

$$X \quad =F_2(\xi)=F_1(\log \xi)$$

$$Y_{2,n}=\frac{1}{m_2(x^n)}\int_1^{\xi} t^n f_2(t)dt$$

$$=\frac{1}{m_2(x^n)}\int_1^{\xi} t^n f_1(\log t)\frac{dt}{t} \qquad n\text{ は正整数},$$

$\log t=s$ とすれば

$$\frac{dt}{t}=ds.$$

また $m_2(x_n)=m_{2,n}$ とおけば

$$Y_{2,n}=\frac{1}{m_{2,n}}\int_0^{\log\xi} e^{ns}f_1(s)ds$$

$$=\frac{1}{m_{2,n}}\left\{\int_0^{\log\xi} f_1(s)ds+n\int_0^{\log\xi} sf_1(s)ds+\cdots+\frac{n^r}{r!}\int_0^{\log\xi} s^r f_1(s)ds+\cdots\right\}$$

$$=\frac{1}{m_{2,n}}\left\{X+nm_{1,1}Y_{11}+\frac{n^2}{2!}m_{1,2}Y_{1,2}+\cdots+\frac{n^r}{r!}m_{1,r}Y_{1,r}+\cdots\right\}$$

従って (6) の A は

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots\cdots 0 \cdots\cdots \\ \frac{1}{m_{2,1}} & \frac{m_{1,1}}{m_{2,1}} & \frac{1}{2!}\frac{m_{1,2}}{m_{2,1}}\cdots\cdots & \frac{1}{q!}\frac{m_{1,q}}{m_{2,1}}\cdots\cdots \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ \frac{1}{m_{2,p}} & p\frac{m_{1,1}}{m_{2,p}} & \frac{p^2}{2!}\frac{m_{1,2}}{m_{2,p}}\cdots\cdots & \frac{p^q}{q!}\frac{m_{1,q}}{m_{2,p}}\cdots\cdots \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & \end{pmatrix} \tag{8}$$

である．

或種の Gauß 分布と Gibrat 分布間には，こうした対応が与えられるものがあることが判る．

指数 l についても同様な拡張は極めて容易であろう．

§2 実態統計調査資料への適用

以上の立論をもとに，昭和 30 年度国富調査結果への適用を試みた（昭和 30 年国富調査，法人企業資産調査報告，昭和 33 年3月，経済企画庁）．それには先種々の見解を生んでいる資産の分布を実態資料により確認する目的と共に産業間の連関を，分布の形態に通しても認められるのではないかとの予想に基づくものである．

勿論単にこうした見地からのみ直ちに数学的方法を適用するのはかなりの冒険を含むものであるが，それらの詳細な検討は他日に譲ることにする．

I. 統計分布の図表による各種の検討

まず差し当って，資産の評価額階級別分布を諸方式に従って描写する．それらの方式は何れも一見かなりの近似性を与えるために，I の理論に基づく II 以下の細部に亘る検討を必要とする実際的根拠ともなるからである．

(i) Fig. I (i) 1~2 の図法はもし資料がジブラ型分布法則に従う種類のものであれば理論上は線形の形状を示すべき性質のものである．

3, 4 は 1, 2 と直接比較が許されるものではないが同じ経済統計において関連性のある分野所得

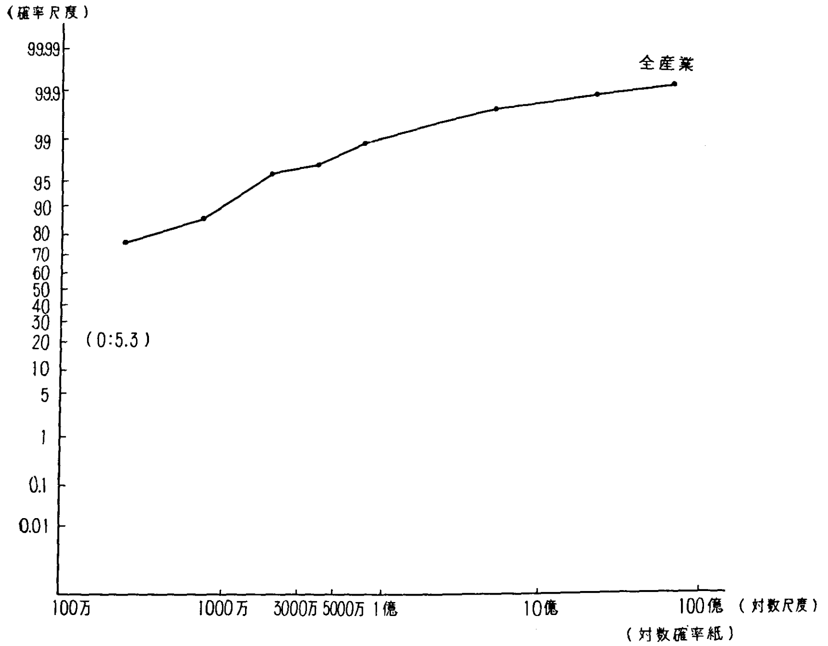


Fig. I (i) 1　法人企業資産額階級別構成
昭和 30 年 12 月 31 日

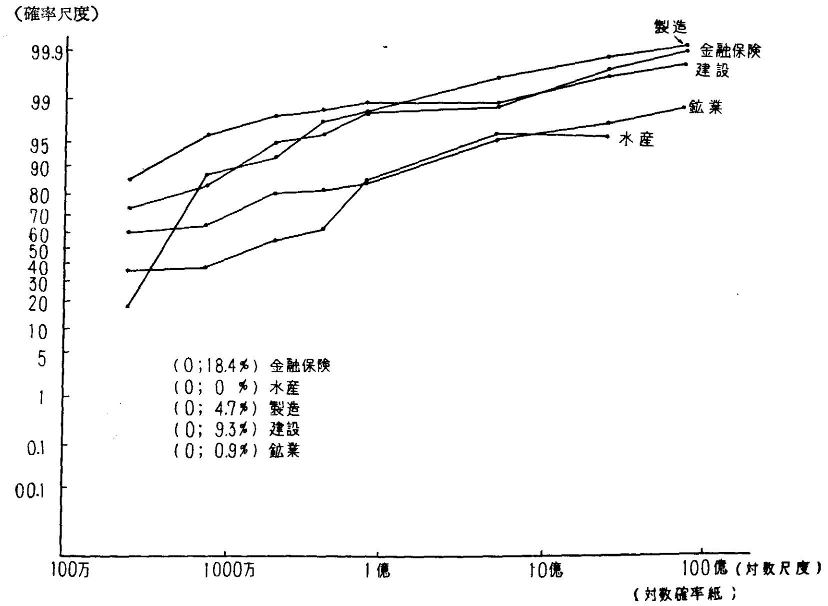


Fig. I (i) 2　法人企業産業別資産額階級別構成（製造等5種）
昭和 30 年 12 月 31 日 現 在

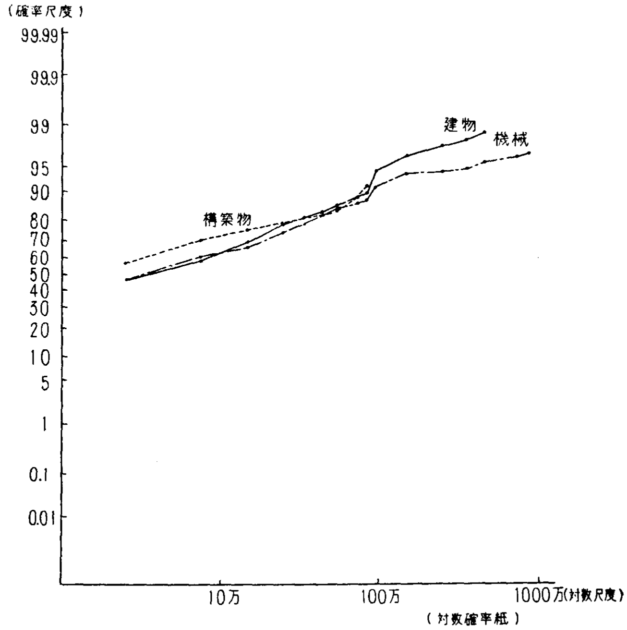


Fig. I (i) 3 資産種類別法人企業資産の評価額階級別構成
製 造 N 社

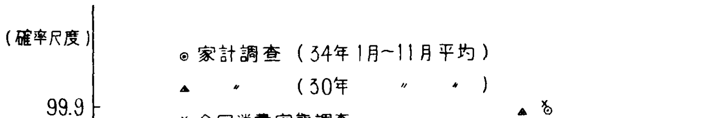


Fig. I (i) 4 所 得 分 布
(所得の理論的研究 統計研究会所収のもの)

について適用例として掲載を試みた自己及び他人資料である.

(ii) ジブラ分布と並びよく経済面で仮定される分布は Pareto 分布であろう. これは理論的には両対数グラフによって直線型の分布形態を示すはずである. Fig. I (ii) 1 をその代表的グラフとして掲載することにする.

(iii) 以上の予備知識のもとにそれらのローレンツ・カーツを Fig. I (iii) 1 として示すことにする.

II. 統計分布の計数を用いる検討例

I (i) におけるジブラ型分布の確認は決定的な方式とまでは至らないが計数的結果によって一つの判定基準を与えることができる. それは前掲書 Lagnormal Distribution 中の結果によっても容易に導くことができるが,

$$f(x;\theta,\lambda)=\frac{1}{x\lambda\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log x-\theta}{\lambda}\right)^2}$$

を密度とするジブラ分布は平均 α, 分散 β につき, (9), (10) において λ 及び C.R. はデータから直接算出できるから, それらを用い, かつ均等線との面積を A として

$$\Phi\left(\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right)-A,\quad \left(A=\frac{1}{2}\mathrm{C.R.}\right)$$

を構成すればこの数量は全くジブラ型であれば 0.5 の数値を示すはずである.

Table II は I の場合とデータは別種であるが, 個別企業別大項目的資産評価額分布につき実際に計算した結果を示す. 理論的にいうと

$$\text{mean }\alpha=e^{\theta+\frac{1}{2}\lambda^2}$$

また分散 β_2 は

$$\begin{aligned}\text{var }\beta_2&=e^{2\theta+\lambda^2}(e^{\lambda^2}-1)\\&=\alpha_2(e^{\lambda^2}-1)\end{aligned}$$

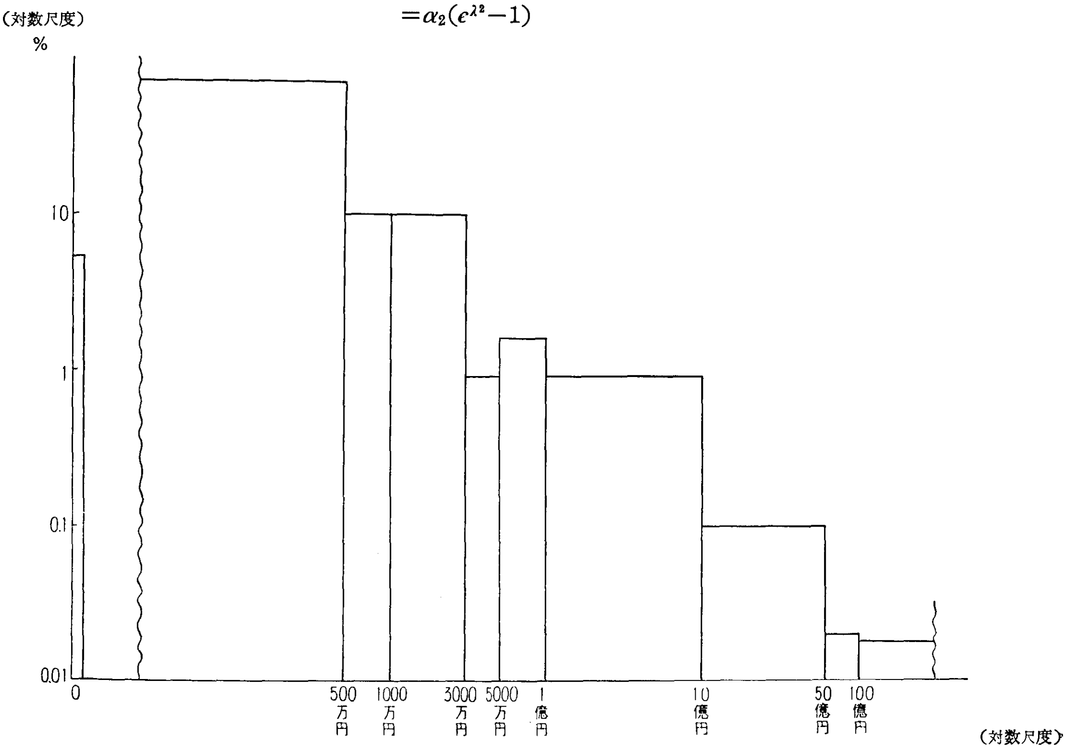


Fig. I (ii) 1 法人企業資産の資産額階級別構成 (全産業) (両面対数紙)

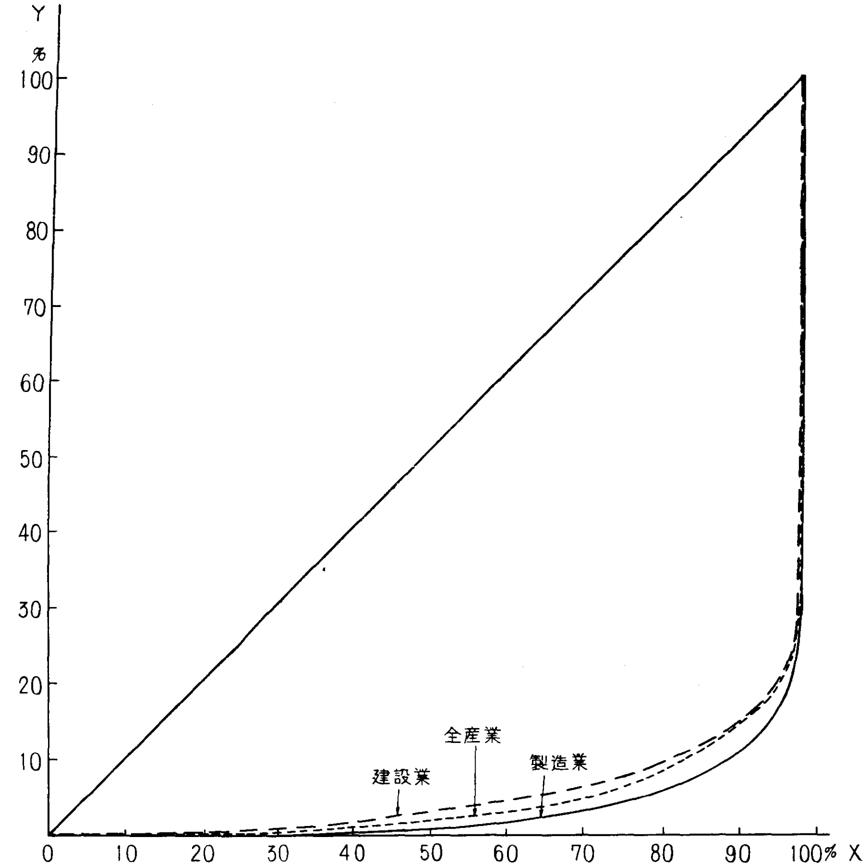


Fig. I (iii) 1 法人企業資算額階級別構成を示す代表的ローレンツ・カーブ

従って

$$\lambda=\sqrt{\log\frac{\beta_2}{\alpha_2}+1} \tag{9}$$

他方例えば Iyengar (Sankyā, 1960) によれば，$\Phi(x)$ をガウス型の標準型式の累積分布函数とすれば，§1. の C.R. $\left(1-2\int_0^1 Y\,dX\right)$ につき，

$$\mathrm{C.R.}=1-2\Phi\left(-\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right)=2\Phi\left(\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right)-1 \tag{10}$$

従って (9) (10) により実態数値によって分布の性格を一部確認出来るのである.

Table II

産業種別	企業	資産種別	$\Phi\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)-A$	A
建設業	F 社	機械	0.518	0.289
建設業	F 社	建物	0.529	0.248
製造業	N 社	機械	0.574	0.333
製造業	A 社	機械	0.683	0.181
製造業	A 社	建物	0.527	0.352
製造業	D 社	機械	0.494	0.330

Table III 産業別法人階級の資産額による格差とその順位（法人資産調査報告第3篇第3表による計算）

産業	$\frac{1}{2}$C. R.（格差）	順位 大小 +−
全産業	0.2095	
鉱業	0.2811	
石炭鉱業	0.2145	
その他鉱業	0.2376	
建設	0.1640	−9
製造	0.2167	
繊維	0.2142	
紙	0.1076	−3
化学	0.2461	9
ガラス，土石	0.1556	−8
第一金	0.2892	5
機械	0.1975	
農林業	0.2193	
水産	0.2518	8
食料品	0.1700	−10
木材，木製品	0.1409	−7
金属製品	0.1779	
その他製造	0.0175	−1
卸小売	0.1683	
卸	0.2405	
小売	0.2074	

産業	$\frac{1}{2}$C. R.（格差）	順位 高低 +−
百貨底	0.3201	2
その他小売	0.0636	−2
金融，保険	0.2270	
銀行，信託	0.2218	
保険	0.2440	10
その他金融，保険	0.1828	
不動産	0.1150	−4
公益	0.3101	4
運輸	0.2909	
地方鉄道軌道	0.1265	−5
道路運送	0.2121	
水運	0.2870	6
倉庫	0.1785	
その他運輸	0.1343	−6
通信	0.3132	3
動力供給	0.4095	
電気	0.2744	7
ガス	0.3760	1
営利，サービス	0.1719	

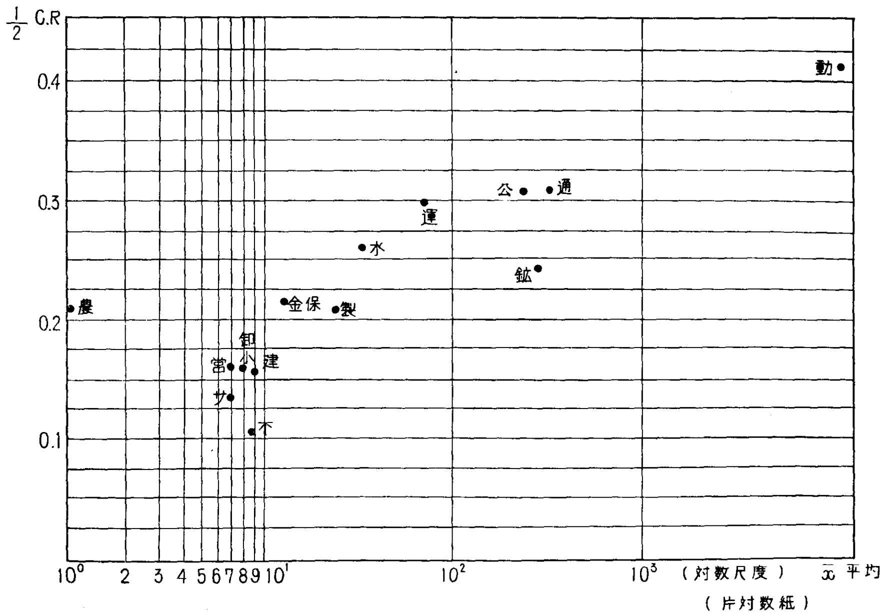


Fig. III (i) 企業資産に関する平均格差又は集中比率と平均との関係

III. 産業間あるいは企業資産種別間の各種の検討

（i） §1, I により最初に産業別企業資産額階級別構成に見られる法人集団に属ずる資産額格差，各所有資産評価額階級の綜合的あるいは平均的格差（前掲本年度別稿）を産業間の順位と共に算出する (Table III).

もし表の結果を更に産業別蓄積水準（平均）との比較において捉えるならば Fig. III, (i) を得るのである.

(ii) §1. III 以下の立場は（i）の立場から進んで一つの聯関モデルを設定することであるが，その最も単純な線型的関連が相互の分布間に見られるとすれば，X に対し $\log(X-Y)$，あるいは，$\log\dfrac{X-Y}{X}$ を図示する時，平行する曲線群となるであろう．Fig. III, (ii) である．勿論こうした単

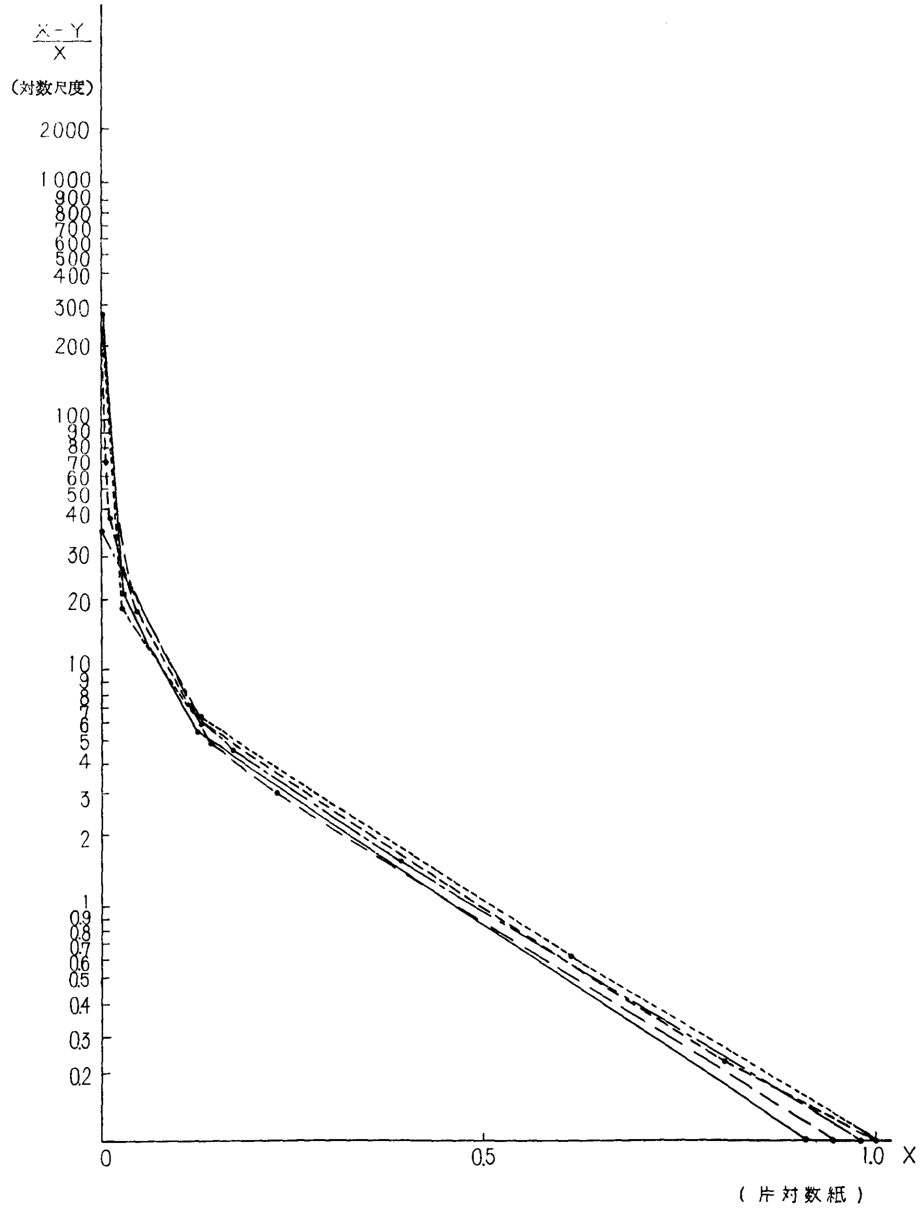


Fig. III (ii) 産業別法人階級資産評価額にみられる個別格差の変化

純な仮設が実存する筈がないが，かかる形式のグラフ的的意義は別に前掲本年度拙稿で解説を試みたところである.

なお，その他§1の C.R. を法律的，名目的資本と現実的，実質的資本，あるいは株式，債券等の所有と家計実物資産の所有等に適用する等のことが考えられるが，今後の検討課題に残す.

む す び

(i) 伝統的方式に対する偶像化を排し，客観的に評価し，その実質的部分のみを捉えて発展させることは，より高次の科学的段階に至る必要過程であろうが，そうした飛躍に至るには，ただ局部的成果に留まらず，一般的なものとせねばならないであろう．このことは直接隣接する調査部門は勿論．他の諸分野との一層広汎で自主的，合理的にして強力な協力体制を斉えることを要望させることにもなるのであろうか．すくなくとも従来の社会，経済的諸部門に適用された数理統計学的諸方法，諸概念はその仮説の余りの複雑さ或は単純さの故に，あえて極論すれば現象に対し無力であったり，或は第一近似程度に留ると思われる点を多々有するといえるのではあるまいか.

(ii) 問題はただにこうしたごく一般的な寧ろ政治的要望につながる結論にとどまるものではない．例えば以上の各章各節で屢々取上げた格差 $C.R.$ またその発展としての加重格差， $C.R_1, C.R_2 \cdots C.R_n$, ……あるいは式によると， $\int_0^1 Y dX, \int_0^1 Y^2 dX, \cdots \int_0^1 Y^n dX \cdots\cdots$ 等を与えることによって $\varphi(x)$ に対しどの程度決定的性格を与えるかに一つの疑問を抱かせる.

(iii) また更に遡ってこうした格差を齎す原因に差当っては，時間的推移を通して，いかなる作用を認めることが出来るかに長期的課題を持つのである.

本篇に含まれる幾つかの結果が新たな意義を齎し，新たな方向と出発点を見出すことを祈願してやまない.

統計数理研究所