団体到着，団体 service の queuing system について

二　宮　理　憙

(1962 年 10 月 受 付)

Transient Behavior of the Queuing System with Bulk Input and Service

Satoki NINOMIJA

In this paper such a queuing system as we observe in the station is argued. In this system the customers or the goods are brought to and served (carried out) in groups by trains or cars. The queue-discipline is;

the size of arrival group is a random variable, the arrival distribution is of the Poisson type, there is one service mechanism, the service period commences only when the number of the waiting customers reaches l $(0\leq l\leq m)$ which wait in the line to be served, but the maximum size of the service group is $m(m\geq 1)$, the distribuetion of the service period is given in a general type.

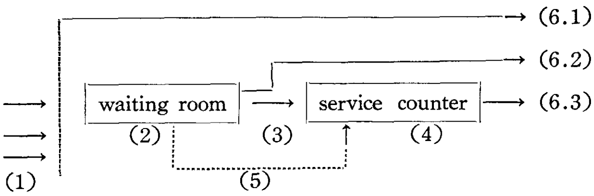
For this system the ergodic condition of the queue and its distribution are obtained and the busy period is discussed for the case of single input.

Institute of Statistcal Mathematics

§1. 序

Queuing の問題についてはいろいろな場合における問題が論ぜられているが，ここでは客の運送での乗換地点，或は貨物の運搬の積換地点で観察される queuing の問題について考えよう．その地点へは客，或は貨物は自動車，汽車等により団体で到着する．そうしてそれらはそれぞれ service を受ける，すなわち運送される．その際，運送すべきものがある一定量（これを l とする）未満の場合は service がおこなわれない．l 以上になるまでは待たされる．しかも一度の運送量は一定量（m とする）をこえない．m は乗車定員あるいは最大積載量である．

この問題を定式化するまえに，この問題が一般の queuing の問題でどのような位置にあるかを考えるために，まず一般の queuing system について考察してみよう．それは次の図で特徴づけられる．



ここで

(1) は input の状態を示す．例えば，その分布が Poisson とか Erlang と定められる．

(2) は waiting room の状態を示す．その大きさが有限であるとか，或はそのような制限がない

等と定められる.

(3) waiting room から service counter への状態，waiting room へ先に到着した客から service するとか，或はまたその反対に，後に到着した客からする．或は数人を一緒に service する，等.

(4) service の方法について定める．その分布が exponent, constant 等.

(5) waiting room の状態と service counter の関係，waiting room での待合せ中の客が多くなると，service の時間を短かくする等.

(6) out put の状態，waiting room が有限のときは，そこへ入らないですぐ出てしまう(6.1). 或は，そこで待っていても，ある一定時間以上待つと出てしまう (6.2) 等.

この論文では (1)～(6) を次のように定めたものについて論ずる.

(1) input

客は団体で到着する．k 番目に到着した団体の大きさを B_k で表わし,

$$P_r\{B_k=j\}=a_j \qquad j=0,1,\cdots,M, \quad k=1,2,\cdots$$

とする．団体は density λ の homogeneous Poisson process で入る．k 番目の団体の到着した時刻を τ_k とする．そうして

$$e_k=\tau_k-\tau_{k-1} \qquad (k=1,2,\cdots,\tau_0=0)$$

とする．e_k は確率変数であり，その分布は,

$$F(x)=P_r\{e_k\leq x\}=\begin{cases}1-e^{-\lambda x} & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

(2) waiting room での状態については，この論文では何らの制限をもつけない.

(3) waiting room から counter への状態については次のような型を導入する.

(a) l 型の service $(l=0,1,\cdots m)$

待っている客が l 人以上となると service を始める，l 人未満のときはそれを始めない．また1回に service する最大人数は m 人とする．$(m=1,2,\cdots)$

(b) Model I

service が始まってより後に到着した客はすべてそれより後の service group へ入れられる.

(c) Model II

service が始まってより後に到着した客でも，その service group が m 人になるまでは，またはその service が終るまでは，その service 中の group に加えられる.

(4) service の状態

χ_k で k 番目の service 時間を示す．しかしここでの service 時間とは，k 番目の団体の運送が始まってから，次の ($k+1$ 番目の) 運送を始めることが可能となる時間の寸前までの時間とする．その分布は

$$P_r\{\chi_k\leq x\}=H(x)$$

とする．その平均時間は有限とする.

この定式化において,

a) $l=0$, $m\geqq 1$ とし，$\{\chi_k\}$ をその乗物の発車時間間隔とすると，これは普通の乗物での queuing system である.

b) $l=m\geq 1$ $\{\chi_k\}$ の分布を一般とすると，駅から競馬場，競輪場へ，自動車が満員になるまで客を待って運行するバスの system である.

§2. 補　題

次の記号を導入する.

$$\psi(s)=\int_0^\infty e^{-st}\,dH(t) \qquad R(s)\geq 0$$

$$a(z)=\sum_{j=0}^{m} a_j z^j \qquad |z|\leq 1$$

$$\bar{a} \quad = a'(1) \qquad (\text{到着集団の平均人数})$$

$$\alpha \quad = \int_0^{\infty} t\,dH(t) < \infty \qquad (\text{サービスの平均時間})$$

(4) で $H(x)$ を導入したが，それは上のような条件を満すものとする．

補題 1.

$$P_r\{\text{時間間隔}\ t\ \text{で}\ k\ \text{人の客が到着する}\}=\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}a_k{}^{n*}=q_k(t)$$

$a_k{}^{n*}$ は $\left(\sum_{j=0}^{M} a_j z^j\right)^n$ の z^k の係数とする．

証明．

$$\mathrm{I}_k=\sum_{i=1}^{j} e_i$$

は k 番目に到着した団体の到着時刻を示す．

次に固定した $t(0\leq t<\infty)$ に対して，

$$A(0,t)=\sum_{0<I_i<t} B_i$$

を考えれば，$A(0,t)$ は時間間隔 $(0,t)$ 内に到着した客の総人数である．

$$P_r\{A(0,t)=k\}=\sum_{n=0}^{\infty}\{(B_1+B_2+\cdots+B_n=k),\quad \tau_k\leq t<\tau_{k+1}\}=q_k(t)$$

補題 2.

$\lambda\bar{a}\alpha<m$ かつ

$\int_0^{\infty} e^{-\lambda s t}dH(t)$ が $R(s)>-\delta(\delta>0)$ で収束すれば，

$$z^m=\psi[\lambda(1-a(z))]$$

は $|z|\leq 1$ で m ケの根をもつ．

補題 3.

$R(s)\geq 0,\qquad |w|<1$ 　または

$R(s)>0,\qquad |w|\leq 1$ 　または

$R(s)\geq 0\qquad |w|\leq 1, \lambda\alpha>m$ 　のとき

$$z_m=w\psi[s+\lambda(1-z)]$$

は m ケの根 $z=\gamma_r(s,w)$ $(r=1,2,\cdots,m)$ を $|z|<1$ でもつ，この m ケは互いにことなる．それは

$$\gamma_r(s,w)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-\lambda)^{j-1}(\varepsilon_r w^{\frac{1}{m}})^j}{j!}\left[\frac{d^{j-1}[\psi(y)]^{\frac{j}{m}}}{dy^{j-1}}\right]_{y=\lambda+s}$$

$$\varepsilon_r \quad = e^{\frac{2\pi i r}{m}} \qquad (r=1,2,\cdots,m)$$

と表現できる．

補題 2，補題 3 ともに，Rouché の定理を用いて簡単に証明される．

次に Model II の性質について述べよう．

$_lT^*$; 始めて system が l 人以上となってから，次に始めてそれが l 人未満となるまでの時間間隔．

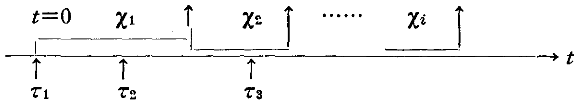
$N(t)$; $[0,t]$ 間で到着した集団のケ数，

$M(t)$; $[0,t]$ 間で service の終った回数

をそれぞれ示すものとする．$Z(t)$ を

$$Z(t)=\sum_{i=1}^{N(t)} B_i - M(t)\cdot m$$

と定義し，$t=0$ で l 人以上の団体が到着したとすれば，$t=0$ では，この第2項は0であり，$Z(t)$ は時刻 t での system 内の人数を表わすことになる．



$Z(t)<l$ となる最初の時刻 t が始めに定義した ${}_lT^*$ である．$t>{}_lT^*$ なる t に対しては，

$Z(t)\leq$時刻 t での system 中の人数

なる関係が成立っている．

補題 4.

Model II について $(l\geq 1)$

$\lambda\bar{a}\alpha>m$ ならば $P_r\{{}_lT^*=\infty\}>0$

$\lambda\bar{a}\alpha<m$ ならば $P_r\{{}_lT^*<\infty\}=1.$

証明

$\lambda\bar{a}\alpha<m$ の場合，明らかに

$${}_mT^*\leq{}_{m-1}T^*\leq\cdots\leq{}_1T^*$$

が成立つ．この ${}_1T^*$ については，Miller が

$$P_r\{{}_1T^*<\infty\}=1.$$

を [4°] で証明した．

$\lambda\bar{a}\alpha>m$ の場合

$$\frac{Z(t)-(l-1)}{t}=\frac{N(t)}{t}\cdot\frac{\sum_{i=1}^{N(t)} Bi}{N(t)}-\frac{M(t)}{t}m-\frac{l-1}{t}$$

ここで $t\to\infty$ とすれば，Doob[7°] の定理より

$N(t)/t\to 1/E\{e_i\}=\lambda$; prob. 1.

$M(t)/t\to 1/E\{\chi_i\}=1/\alpha$; prob. 1.

$\sum_{i=1}^{N(t)} B_i/N(t)\to E\{B_i\}=\bar{a}$

従って

$$P_r\left\{\frac{Z(t)-(l-1)}{t}\longrightarrow\frac{E\{B_i\}}{E\{e_i\}}-\frac{m}{E\{\chi_i\}}<0\right\}=1 \qquad (t\to\infty)$$

すなわち

$$P_r\{Z(t)>l-1\}=1$$

上で述べた model II の性質を用いて，model I について解析しよう．

$M'(t)$ を $[0,t]$ 間の service の終った回数 $+1$ とし $Z'(t)$ を

$$Z'(t)=\sum_{i=1}^{N(t)} B_i-M'(t)\cdot m$$

ここでも，$t=0$ で l 人以上の客が到着するとする．そうして，$0\leq u\leq t$ なる t に対しては常に $Z'(u)>0$ が満されているとすれば，$Z'(t)$ は時刻 t で待っている客の人数を表す．$Z(t)\leq 0$ なる最初の時点が ${}_lT^*$ である．この場合 ${}_lT^*$ は

A) すべての客が service 中（その service 中の客は l 人以上 m 人以下である）

B) $l-1$ 以下の客が待っている．

の2つの場合に分けられる．この A）の場合に，その service 中に客が1人も到着しないとき，および B）の場合の待っている客がいないとき，queue は empty となる．

補題 5.

model I について $(l \geq 1)$

$$\lambda \bar{a} d > m \quad \text{ならば} \quad P_r\{{}_lT^* = \infty\} > 0$$

$$\lambda \bar{a} d < m \quad \text{ならば} \quad P_r\{{}_lT^* < \infty\} = 1, \quad E({}_lT^*) < \infty.$$

証明

明らかに， model II での ${}_lT^* \leq$ model I での ${}_lT^*$ である．従って，$\lambda \bar{a} \alpha > m$ の場合は補題 4 より証明される．次に $\lambda \bar{a} \alpha < m$ のとき，

$$Z(t)/t \to c < 0, \qquad (t \to \infty);\ \text{prob. } 1$$

従って事象 A）と B）は確率1で無限回起る．先づ事象 A）の方へ注目する．${}_l\delta$ を

$${}_l\delta = \int_0^\infty q_0(t) dH(t)$$

と定義すれば，これは仮定により正となる．それゆえ

$$(1 - {}_l\delta)^n \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

となる．また事象 B）が起れば，もちろん l 人未満となっている．従って ${}_lT^* < \infty$ は確率1で成立する．model I についても model II と同様に ${}_1T^* \geq {}_2T^* \geq \cdots \geq {}_mT^*$ は明らかである．$E({}_1T^*) < \infty$ は Miller[4°] により示された．

次に，この model I について，service の終った時点で j 人の客が待っている事象を E_j^* とすると，

補題 6.

$$\lambda \bar{a} \alpha > m \quad \text{ならば} \quad E_j^*(j < l) \quad \text{は transient}$$

$$\lambda \bar{a} \alpha < m \quad \text{ならば} \quad E_j^*(j < l) \quad \text{は persistent}$$

かつその平均再帰時間は有限である．

§3. Queue の長さの分布について

記号

${}_lT_n'$ ： n 番目に service された団体の去った時刻

${}_l\xi(t)$： 時刻 t での queue の長さ

${}_l\xi_n = {}_l\xi({}_lT_n' + 0)$　すなわち n 番目の service の終った直後の queue の長さ

を導入する．${}_e\xi_n (n = 1, 2, \cdots)$ は homogeneous Markov chain をなしている．その transition probabilities

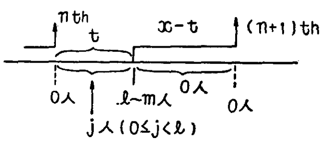
$$(3.1) \qquad {}_lq_{ij} = P_r\{{}_l\xi_{n+1} = j \mid {}_l\xi_n = i\}$$

を計算する．先づ

$$(3.2) \quad {}_lq_{00} = \int_{x=0}^\infty \int_{t=0}^x \sum_{j=0}^{l-1} q_j(t) \sum_{i=l-j}^{m-j} a_i \lambda dt\, q_0(x-t) dH(x-t)$$

$$= q_0 \sum_{j=0}^{l-1} \sum_{i=l-j}^{m-j} \alpha_j a_i$$

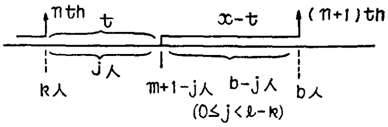
ここで



$$(3.3) \quad \alpha_j = \int_0^\infty \lambda q_j(t) dt = \sum_{n=0}^\infty a_j^{n*}$$

$$(3.4) \quad q_j = \int_0^\infty q_j(t) dH(t)$$

一般に $0 \leq k < l$ に対しては



(3.5)
$$
\begin{aligned}
{}_lq_{kb}=&\int_0^\infty\int_0^x \sum_{j=0}^{l-1-k} q_j(t)\sum_{j=l-j}^{m-j} a_{i-k}\lambda dt\, q_b(x-t)dH_x(x-t)\\
&+\int_0^\infty\int_0^x \sum_{j=0}^{l-1-k} q_j(t)a_{m+1-j}\lambda dt\, q_{b-1}(x-t)dH_x(x-t)\\
&+\cdots\cdots+\\
&+\int_0^\infty\int_0^x \sum_{j=0}^{l-1-k} q_j(t)a_{m+b-j}\lambda dt\, q_0(x-t)dH_x(x-t)\\
&=q_b\sum_{j=0}^{l-1-k}\sum_{i=l-j}^{m-j}\alpha_j a_{i-k}+q_{b-1}\sum_{k=0}^{l-1-k}\alpha_j a_{m+1-j}+\cdots+q_0\sum_{j=0}^{l-1-k}\alpha_j a_{m+b-j}
\end{aligned}
$$

(3.6)
$$
=\sum_{j=0}^{l=1-k}\alpha_j\left\{q_b\sum_{j=l-1}^{m-j}\alpha_{i-k}+q_{b-1}a_{m+1-j}+\cdots+q_0a_{m+b-j}\right\}
$$

$l\leq k<m$ に対しては

(3.7) $\qquad {}_lq_{kb}=q_b$

$m\leq k$ に対しては

(4.8)
$$
{}_lq_{kb}=\begin{cases} q_{b+m-k}\ ; & b+m-k\geq 0\\ 0\ ; & b+m-k<0\end{cases}
$$

このtransition probability の matrix は

(3.9)

	0	1	2	……	b	……
0	${}_lq_{00}$	${}_lq_{01}$	${}_lq_{02}$	……	${}_lq_{0b}$	……
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	
$l-1$	${}_lq_{l-1,0}$	${}_lq_{l-1,1}$	${}_lq_{l-1,2}$	……	${}_lq_{l-1,b}$	……
l	q_0	q_1	q_2	………	q_b	……
$l+1$	q_0	q_1	b_2	…… …	q_b	……
⋮	⋮	⋮			⋮	
$m-1$	q_0	q_1	q_2	………	q_b	……
m	q_0	q_1	q_2	………	q_b	……
$m+1$	0	q_0	q_1	………	q_{b-1}	……
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	

さて §2 の補題により，$\lambda\bar{a}\alpha<m$ のとき，state $E_j(j<l)$ は ergodic となる．$\{B_k\}$ が常には m の倍数でないとき，この chain は irreducible でかつ aperiodic である．従ってすべての state が ergodic であり，stationary な分布が存在する．ところで queue が十分に長い状態では $l=0$，と $l\geq 1$ は同じ service 状態となる．したがって $l\geq 1$ で stationary な分布が存在すれば，$l=0$ でも存在する．その分布について論じる．

(3.10) $\qquad {}_l\pi_j=\lim_{n\to\infty}{}_lq_{ij}{}^{(n)} \qquad (j=0,1,2,\cdots)$

とすれば，${}_l\pi_j$ の generating function は

$$
{}_l\pi(z)=\sum_{j=0}^{\infty}{}_l\pi_j z^j
$$

(3.11)
$$
=\frac{\psi[\lambda(1-a(z))]}{z^m-\psi[\lambda(1-a(z))]}\left\{\sum_{k=0}^{l}{}_l\pi_k({}_lD_k(z)z^m-z^k)+\sum_{k=0}^{m-1}{}_l\pi_k(z^m-z^k)\right\}
$$

ここで

$$
{}_lD_k(z)=\sum_{j=0}^{l-1-k}\alpha_j\left\{\sum_{i=l-j}^{m-j}a_i+a_{m+1-k-j}z+a_{m+2-k-j}z^2+\cdots+a_Mz^{M-m-k-j}\right\}
$$

(3.11) の分子は $_l\pi_j(j=0,\cdots,m-1)$ なる m ケの未知数を含んでいる．これらの未知数は (3.11) の分母が $|z|\leq 1$ 内で m ケの根をもつという §2の補題2により定めることができる．しかしそれらの根が重根の場合には計算が複雑となる．

例．$a_1=1,\ a_j=0(j\neq 1)$ と限定した場合

$$_lD_k(z)=1 \qquad (k=0,1,\cdots,m-1)$$

$$_l\Pi(z)=\frac{\psi[\lambda(1-z)]}{z^m-\psi[\lambda(-z)]}\sum_{k=0}^{m-1}{}_l\Pi_k(z^m-z^k)$$

$$=\frac{\psi[\lambda(1-z)]}{z^m-\psi[\lambda(1-z)]}\prod_{r=0}^{m-1}\left[\frac{z-w_r}{1-w_r}\right](z-1)(m-\lambda\alpha)$$

ここで $w_r(r=1,2,\cdots,m-1)$ は $z^m=\psi[\lambda(1-z)]$ の単位円内，$|z|<1$ の z に関する $m-1$ ケの根である．

§4. Busy period について

ここでは $l=1,2,\cdots,m,\ a_1=1,a_j=0(j\neq 1)$ の場合について論ずる．それらの分布を

(4.1)　$_lP(x)=P_r\{\text{busy period}\leq x\}$

(4.2)　$_lP_n(x)=P_r\{$busy period$\leq x$, その間に少なくとも n 回の service がおこなわれる$\}$

とし，その分布の Laplace-Stieltjes 変換をそれぞれ，

$$(4.3)\qquad _lp(s)=\int_0^\infty e^{-st}d_lP(x) \qquad R(s)\geq 0$$

$$(4.4)\qquad _lp_n(s)=\int_0^\infty e^{-st}d_lP_n(x) \qquad R(s)\geq 0$$

とする．

[定理 4.1]　$R(s)\geq 0,\ |w|\leq 1$ に対して

$$(4.5)\qquad \sum_{n=1}^\infty {}_lp_n(s)w^n=1-\frac{\prod_{r=1}^m[1-\gamma_r(s,w)]}{1+{}_lC(s,w)}$$

ここで，

$$(4.6)\qquad _lC(s,w)=-\sum_{r=1}^m\gamma_r(s,w)+\sum_{r,t=1}^m\gamma_r(s,w)\gamma_t(s,w)-\cdots$$

$$\cdots+(-1)^{m-l}\sum_{r,\cdots,t=1}^m\gamma_r(s,w)\cdots\gamma_t(s,w)$$

ここで$\gamma_r(s,w)(r=1,2,\cdots,m)$ は $z^m=w\psi[s+\lambda(1-z)]$ の z に関しての単位円 $|z|\leq 1$ 内の m ケの根である．

$R(s)\leq 0$ に対して

$$(4.7)\qquad _lp(s)=1-\frac{\prod_{r=1}^m[1-\gamma_r(s,1)]}{1+{}_lC(s,1)}$$

となる．

[証明]

(4.8)　$_lP_{k,n}(x)=P_r\{$busy period の長さ $\leq x$, その間に少なくとも n 回の service がおこなわれる．その n 回の終りで k 人が待っている$\}$

と定義すると，明らかに

$$(4.9)\qquad _lP_n(x)=\sum_{j=0}^{l-1}{}_lP_{j,n}(x)$$

(4.8) の Laplace-Stieltjes 変換を

(4.10) $$_lp_{k,n}(s)=\int_0^\infty e^{-sx}d\,_lP_{k,n}(x)$$

とおけば，(4.9) より

(4.11) $$_lp_n(s)=\sum_{j=0}^{l-1}{}_lp_{j,n}(s)$$

となる．一方全確率の公式より，

(4.12) $$_lP_{k,1}(x)=\int_0^x P_r\{k\text{ 人の客が最初の service 時間中に到着する}\,|\,\text{最初の service の長さは }\tau\}dH(\tau)$$

$n\geq 1$

(4.13) $$\begin{aligned}_lP_{k,n}(x)=&\int_0^x\sum_{j=l}^{m-1}P_r\{\text{少なくとも }(n-1)\text{ 回の service からなる busy period の長さ}\leq x-\tau,(n-1)\text{ 回目の service の終りで }j\text{ 人の客が待っている．そうして }n\text{ 回目の service の間に }k\text{ 人の客が到着する}\,|\,\text{その service の長さは }\tau\}dH(\tau)\\&+\int_0^x\sum_{j=m}^{m+k}P_r\{\text{少なくとも }(n-1)\text{ 回の service からなる busy period の長さ}\leq x-\tau,\ (n-1)\text{ 回目の service の終りで }j\text{ 人の客が待っている．そうして }n\text{ 回目の service の間に }k-(j-m)\text{ 人の客が到着する}\,|\,\text{その service の長さ }\tau\}dH(\tau)\\=&\int_0^x\sum_{j=l}^{m-1}{}_lP_{j,n-1}(x-\tau)q_k(\tau)dH(\tau)+\int_0^x\sum_{j=m}^{m+k}{}_lP_{j,n-1}(x-\tau)q_{k-j+m}(\tau)dH(\tau)\end{aligned}$$

(4.12)，(4.13) の Laplace-Stieltjes 変換はそれぞれ，

(4.14) $$_lp_{k,1}(s)=\int_0^\infty e^{-sx}q_k(x)dH(x)$$

$n\geq 1$

(4.15) $$_lp_{k,n}(s)=\sum_{j=l}^{m-1}{}_lp_{j,n-1}(s)\int_0^\infty e^{-sx}q_k(x)dH(x)+\sum_{j=m}^{m+k}{}_lp_{j,n-1}(s)\int_0^\infty e^{-sn}q_{+m-j}(x)dH(x)$$

となる．generating function

$$_lp_{*,n}(s,z)=\sum_{k=0}^\infty{}_lp_{k,n}(s)z^k$$

を導入する．(4.14) より

(4.16) $$_lp_{*,1}(s,z)=\sum_{k=0}^\infty{}_lp_{k,1}(s)z^k=\sum_{k=0}^\infty\int_0^\infty e^{-sx}q_k(x)dH(x)z^k=\psi[s+\lambda(1-z)]$$

(4,15) より

(4.17) $$\begin{aligned}_lp_{*,n}(s,z)=&\sum_{k=0}^\infty\sum_{j=l}^{m-1}{}_lp_{j,n-1}(s)\int_0^\infty e^{-sx}q_k(x)z^k dH(x)\\&+\sum_{k=0}^\infty\sum_{j=m}^{m+k}{}_lp_{j,n-1}(s)\int_0^\infty e^{-sx}q_{k+m-j}(x)z^k dH(x)\\=&z^{-m}\psi[s+\lambda(1-z)]\left\{{}_lp_{*,n-1}(s)-\sum_{j=0}^{m-1}{}_lp_{j,n-1}(s)z^j+\sum_{j=l}^{m-1}{}_lp_{j,n-1}(s)\right\}\end{aligned}$$

さらに generating function

$$_lp_{*,*}(s,z,w)=\sum_{n=1}^\infty{}_lp_{*,n}(s,z)w^n$$

を導入する．

(4.16) と (4.17) より

$$(4.18)\qquad {}_l p_{*,*}(s,z,w)=w\psi[s+\lambda(1-z)]\frac{z^m-\sum_{j=0}^{m-1}{}_l p_{j,*}(s,w)z^j+\sum_{j=l}^{m-1}{}_l p_{j,*}(s,x)z^m}{z^m-w\psi[s+\lambda(1-z)]}$$

ここで

$${}_l p_{j,*}(s,w)=\sum_{n=1}^{\infty}{}_l p_{j,n}(s)w^n$$

$|z|\leq 1, R(s)\geq 0, |w|<1$ のとき (4.18) の左辺は z についての正則函数である．この範囲では，補題3により，右辺の分母は m ヶの根，$z=\gamma_r(s,w)(r=1,2,\cdots,m)$ をもつ，それらの根は分子の根でもなければならない．また右辺の分子は z についての m 次の多項式であるから，それは，

$$(4.19)\qquad {}_l k\prod_{r=1}^{m}[z-\gamma_r(s,w)]=z^m-\sum_{j=0}^{m-1}{}_l p_{j,*}(s,w)z^j+\sum_{j=l}^{m-1}{}_l p_{j,*}(s,w)z^m$$

と書ける．(4.19) $z=1$ を代入すれば，

$$(4.20)\qquad \sum_{j=0}^{l-1}{}_l p_{j,*}(s,w)=1-{}_l k\prod_{r=1}^{m}[1-\gamma_r(s,w)]$$

左辺は求める (4.5) である．そこで ${}_l k$ を定めよう．(4.19) での両辺の z^j の係数を比較して，

$$(4.21)\qquad z^m \quad \text{の係数}\quad 1+\sum_{j=l}^{m-1}{}_l p_{j,*}(s,w) \qquad k_l$$

$$(4.22)\qquad \begin{cases} z^{m-1} & 〃 & -{}_l p_{m-1,*}(s,w) & {}_l k\sum_{r=1}^{m}(-\gamma_r(s,w) \\ z^{m-2} & 〃 & -{}_l p_{m-2,*}(s,w) & {}_l k\sum_{r,t=1}^{m}\gamma_r(s,w)\gamma_t(s,w) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ z^l & 〃 & -{}_l p_{l,*}(s,x) & {}_l k\sum_{r,\cdots,t=1}^{m}(-1)^{m-l}\gamma_r(s,w)\cdots\gamma_t(s,w) \end{cases}$$

(4.22) より

$$(4.23)\qquad -\sum_{j=l}^{m}{}_l p_{j,*}(s,w)={}_l k\cdot{}_l C(s,w)$$

ここで ${}_l C(s,w)$ は (4.6) で与える．

(4.23) と (4.21) より

$$(4.24)\qquad {}_l k=\frac{1}{1+{}_l C(s,w)}$$

(4.24) を (4.19) へ代入すれば (4.5) をえる．また (4.5) で解析接続を用いて (4.7) をえる．

特に $l=1$ の場合は

$${}_1 p(s,w)=1-\frac{\prod_{r=1}^{m}[1-\gamma_r(s,w)]}{\prod_{r=1}^{m}[1-\gamma_r(s,w)]-\prod_{r=1}^{m}\gamma_r(s,w)}=\frac{\prod_{r=1}^{m}\left[\dfrac{\gamma_r(s,w)}{1-\gamma_r(s,w)}\right]}{\prod_{r=1}^{m}\left[\dfrac{\gamma_r(s,w)}{1-\gamma_r(s,w)}\right]-1}$$

これは Venkataraman [6°] が示したものである．

［定理 4.2］

$$\lim_{x\to\infty}{}_l P(x)=\begin{cases}1 & \lambda\alpha\leq m \\ 1-\dfrac{\prod_{r=1}^{m}[1-w_r]}{1+{}_l C(0,1)} & \lambda\alpha>m\end{cases}$$

ここで $w_r(r=1,2,\cdots.m)$ は $z^m=\psi[\lambda(1-z)]$ の z に関しての単位円内 $|z|<1$ の m ヶの根である．

証明

$$\lim_{x\to\infty} {}_tP(s) = \lim_{s\to 0} {}_tp(s)$$

を用いる.

［定理 4.3］

$$\mu=\int_0^\infty x d_tP(x)=\begin{cases}\dfrac{\prod_{r=1}^{m}[1-w_r]}{1+{}_tC(0,1)^2}\left\{\dfrac{\alpha}{\lambda\alpha-m}(1+{}_tC(0,1))-\left[\dfrac{d}{ds}{}_tC(s,1)\right]_{s=0}\right\}, & \lambda\alpha<m\\ \infty, & \lambda\alpha\geq m\end{cases}$$

証明

$$-\mu=\lim_{s\to 0}\frac{d}{ds}{}_tp(s)$$

を用いる.

この論文を書くにあたって横浜市立大学の本間鶴千代教授の指導を受けました.
心から感謝の意を表します.

文　献

1° N. T. J. Bailey, "On queueing processes with bulk service" J. Royal Stat. Soc. Series B. Vol 15 (1954) pp. 80～87.

2° F. Dowton, "Waiting time in bulk service queues" J. Royal Stat. Soc. Series B. Vol. 16 (1955) pp. 256～261.

3° D. P. Gaver, Jr., "Imbedded Markov chain analysis of a waiting-line process in continuous time" A. M.S. Vol 30 (1959) pp. 698～720.

4° R. G. Miller., "A contribution to the theory of bulk queues" J. Royal Stat. Soc. Series B. Vol. 21 (1959) pp. 320～337.

5° Lajos Takács, "Transient behavior of Single-server queuing process with Erlang input" 未発表.

6° Lakshim Venkataraman, "Probabilistc investigation of singler server queueing process with Poissonian input and batch service", 未発表,

7° J. L. Doob, "Renewal theory from the point of view of the theory of probability" Trans. Amer. Math. Soc. Vol.63 (1948) pp. 422～438.

8° W. Feller, "Probability theory and its application" 1957.

統計数理研究所