定常確率過程の移動平均表現についての注意

藤　井　光　昭

(1962 年 2 月 受 付)

A Note on the Moving Average Representation of a Stationary Process

Mituaki HUZII

Let x_n be a stationary and purely nondeterministic stochastic process with discrete time parameter. And this process is assumed to have the spectral representation

$$x_n = \int_{-1/2}^{1/2} e^{2\pi i n\lambda}\, dZ(\lambda) \qquad (Ex_n = 0)$$

with the spectral density $f(\lambda)$.

Now, we shall construct a white noise by

$$\xi_n = \int_{-1/2}^{1/2} e^{2\pi i n\lambda} dZ_\xi(\lambda) \qquad Z_\xi(\lambda) = \int_{-1/2}^{\lambda} \frac{1}{G(\mu)}\, dZ(\mu)$$

where $f(\lambda) = |G(\lambda)|^2$ for almost all λ. And we can take $G(\lambda)$ as the form $\sum_{k=0}^{\infty} \bar{G}_k\, e^{2\pi i k\lambda}$.

Then we have the moving average representaion

$$x_n = \sum_{k=0}^{\infty} G_k\, \xi_{n-k} \quad .$$

Let $L_2(x;\, n)$ and $L_2(\xi; n)$ be the linear spaces spanned by $\{x_k;\ k \leq n\}$ and $\{\xi_k; k \leq n\}$, respectively. Using the moving average representation, we can construct the best predictor of $x_{n+h}(h>0)$ in the space $L_2(x;n)$ by the projection. But, in this case, we need the relation $L_2(x;n) = L_2(\xi;n)$. In general case, we have $L_2(x;n) \subseteqq L_2(\xi;n)$. And this depends on the choice of $G(\lambda)$. In K. Karhunen [1], the general form of $G(\lambda)$ and the desirable form, which establishes $L_2(x;n) = L_2(\xi;n)$, are given. We shall consider the probabilistic meaning of the general form of $G(\lambda)$.

Institute of Statistical Mathematics

1. 時刻パラメターが離散値をとる定常確率過程が，purely non-deterministic である場合，white noise を用いて移動平均表現が出来る．この確率過程について white noise をスペクトル密度の平方根を用いてつくり出すことが出来るが，この作り方は一意的ではない．即ち平方根に絶対値が 1 である函数の自由性がある為，white noise にもその自由性が残る．しかし例えば，時刻 n までの値から時刻 $n+h(h>0)$ の値の二乗平均誤差を最小にする意味での線型予報量を求めようとする場合，移動平均表現を用いれば非常に都合がよい．というのは，white noise が時刻が異なれば直交していて，ヒルベルト空間の射影の理論が使えるからである．ところで，この射影の理論を使う際に大切なことは，考えている定常過程の時刻 n までの値の一次結合のはる線型空間と，white noise

の時刻nまでの値の一次結合のはる線型空間が一致することである．

K. Karhunen [1] には，スペクトル密度の平方根の函数の一般型が求めてあり，そのうち上述の意味で二つの空間の一致する形が求めてある．ここでは，K. Karhunen の結果を用いて平方根の一般型で white noise をつくった場合，この white noise は未来の情報を含むわけであるが，これが $G(\lambda)$ の一般型の各要素と，どのような関係があるかを考えてみる．

2. これから，時刻パラメターが離散値をとる複素数値弱定常確率過程 $\{x_n; n=\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$ を考えることにする．話を簡単にする為に平均は0と仮定し，自己共変量を

$$R(n)=E\,x_{m+n}\,\bar{x}_m$$

とあらわすことにする．この時

$$x_n=\int_{-1/2}^{1/2} e^{2\pi in\lambda}dZ(\lambda)$$

$$R(n)=\int_{-1/2}^{1/2} e^{2\pi in\lambda}dF(\lambda)$$

とスペクトル表示出来る．ここで $F(\lambda)$ はスペクトル分布函数で有界非減少である．又 $Z(\lambda)$ は

(i) もし $\lambda<\mu$ の時 $EZ(\lambda)\overline{Z(\mu)}=E|Z(\lambda)|^2$

(ii) $E|Z(\lambda)|^2=F(\lambda)$

なる性質を持った確率過程である．

以下において $F(\lambda)$ は絶対連続であると仮定し，その密度函数を $f(\lambda)$ とあらわすことにする．更に $f(\lambda)$ は

$$\int_{-1/2}^{1/2}\log f(\lambda)d\lambda>-\infty$$

を満足するものとする．この時，H_2 に属する* $G(z)$ で，ほとんどすべての λ に対して

$$f(\lambda)=|G(e^{2\pi i\lambda})|^2$$

となる $G(z)$ を定めることが出来，この $G(z)$ により

$$\xi_n=\int_{-1/2}^{1/2} e^{2\pi in\lambda}dZ_\xi(\lambda),\quad Z_\xi(\lambda)=\int_{-1/2}^{\lambda}\frac{1}{\overline{G(e^{2\pi i\mu})}}dZ(\mu)$$

をつくれば

$$E\xi_n=0$$

$$E\xi_n\bar{\xi}_m=\int_{-1/2}^{1/2} e^{2\pi i(n-m)\lambda}\frac{f(\lambda)}{|G(e^{2\pi i\lambda})|^2}d\lambda=\begin{cases}1\,;\ n=m\\0\,;\ \text{その他}\end{cases}$$

となる．今 $G(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\bar{G}_k z^k$，$(\sum_{k=0}^{\infty}|G_k|^2<+\infty)$ とすると，x_n は

$$\begin{aligned}x_n&=\int_{-1/2}^{1/2} e^{2\pi in\lambda}dZ(\lambda)\\&=\int_{-1/2}^{1/2} e^{2\pi in\lambda}\overline{G(e^{2\pi i\lambda})}dZ_\xi(\lambda)\\&=\sum_{k=-\infty}^{n}G_{n-k}\xi_k\end{aligned}$$

と移動平均表現が出来る．

3. さて，これから定常過程の線型予報の問題を考えることにする．即ち，時刻nまでの値 $\{x_k; -\infty<k\leq n\}$ を知って時刻 $n+h(h>0)$ の値 x_{n+h} を予報するわけであるが，ここでは x_{n+h} との間の二乗平均誤差を最小にするような予報量を求めるという観点で考えることにする．

* $|z|<1$ で正則な函数 $\varphi(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\bar{C}_n z^n$ が $0\leq\gamma<1$ の時 $\int_0^1|\varphi(\gamma e^{2\pi i\theta})|^2d\theta\leq M$ の時，$\varphi(z)$ は H_2 に属するということにする．

今，$\{x_k; -\infty<k<+\infty\}$ の一次結合によってはられる線型空間を $L_2(x)$ とあらわすことにする．そして $\{x_k; -\infty<k\leq n\}$ によってはられる $L_2(x)$ の部分空間を $L_2(x; n)$ と表わすことにする．こうすると，上述の問題は

$$E|x_{n+h}-l_n|^2$$

を最小にするような l_n を $L_2(x; n)$ の中から見出すことになるが，ヒルベルト空間の理論により，このような l_n は

$$P_{L_2(x;n)}\, x_{n+h}$$

で与えられる．ここで $P_{L_2(x;n)}$ は $L_2(x; n)$ への projection である．

$$x_{n+h}=\sum_{k=-\infty}^{n+h} G_{n+h-k}\, \xi_k$$

であるから

$$P_{L_2(x;n)}\, x_{n+h} = \sum_{k=-\infty}^{n+h} G_{n+h-k}\, P_{L_2(x;n)}\, \xi_k$$

となる．$\{\xi_k; -\infty<k\leq n\}$ の一次結合によってはられる空間を $L_2(\xi; n)$ とあらわす時，もし

$$L_2(x;n) = L_2(\xi; n)$$

が成り立てば，$P_{L_2(x;n)}\, \xi_j=P_{L_2(\xi;n)}\xi_j$ となり

$$j > n \text{ ならば } P_{L_2(\xi;n)}\xi_j = 0$$
$$j \leq n \text{ ならば } P_{L_2(\xi;n)}\xi_j = \xi_j$$

となって

$$P_{L_2(x;n)}\, x_{n+h} = \sum_{k=-\infty}^{n} G_{n+h-k}\xi_k$$

が得られる．

さて ξ_n は $f(\lambda)=|G(e^{2\pi i\lambda})|^2$（ほとんどすべての λ に対して）となる $G(e^{2\pi i\lambda})$ によって作り，$G(e^{2\pi i\lambda})$ は一意的には定まらないから ξ_n も一意的には定まらない．一般に，

$$x_n = \sum_{\nu=-\infty}^{n} G_{n-\nu}\, \xi_\nu$$

と表現が出来るから

$$L_2(x;n) \subseteqq L_2(\xi;n)$$

が成り立つことは明らかである．しかし予報量を求めるという立場から考える時

$$L_2(x; n) = L_2(\xi; n)$$

となる $\{\xi_k\}$ であることが望ましい．

K. Karhunen [1] によれば，$G(z)$ が

（i） 単位円内部で正則

（ii） $0\leq \gamma < 1$ に対して $\int_{-1/2}^{1/2} |G(\gamma e^{2\pi i\lambda})|^2 d\lambda \leq M$

（iii） ほとんどすべての λ に対して $f(\lambda)=|G(e^{2\pi i\lambda})|^2$

（iv） $\int_{-1/2}^{1/2} \log f(\lambda) d\lambda > -\infty$，即ち $\int_{-1/2}^{1/2} \log |G(e^{2\pi i\lambda})| d\lambda > -\infty$

をみたすならば，この $G(z)$ は

$$G(z)=B(z)e^{\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{e^{2\pi i\theta}+z}{e^{2\pi i\theta}-z}\log f(\theta)d\theta+\int_0^1 \frac{e^{2\pi i\theta}+z}{e^{2\pi i\theta}-z}d\chi(\theta)+i\alpha}$$

とあらわされる*．ここで，α は実数，$B(z)$ は Blaschke product で $\chi(\theta)$ は連続，有界，非増

* $f(\theta)$ は $-\frac{1}{2}\leq\theta\leq\frac{1}{2}$ で定義された函数であるが，条件（iii）により $0\leq\theta\leq 1$ で定義された函数とも考えられる．

加で導函数がほとんど到るところ0になる函数である．従って ξ_n を定義する $G(e^{2\pi i\lambda})$ は上述のような形をしているわけであるが，このうち $L_2(x;n)=L_2(\xi;n)$ を成り立たせる $G_0(z)$ は

$$G_0(z)=e^{\frac{1}{2}\int_0^1\frac{e^{2\pi i\theta}+z}{e^{2\pi i\theta}-z}\log f(\theta)d\theta+i\alpha}$$

である．それでは，その他の部分があった場合に確率論的にみてどのような事情が起っているかを考えてみる．

（1） Blaschke product がある場合

Blaschke product を

$$B(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{z-z_k}{1-z\bar{z}_k}\left(-\frac{\bar{z}_k}{|z_k|}\right)\qquad（但し\ \prod_{k=1}^{\infty}|z_k|<+\infty）$$

とする．簡単の為に

$$\frac{z-z_k}{1-z\bar{z}_k}\left(-\frac{\bar{z}_k}{|z_k|}\right)$$

について考える．今

$$z_k=\gamma e^{2\pi i\theta}$$

$$G_0(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\overline{G}_k z^k$$

とおき

$$G(z)=-e^{-2\pi i\theta}\left(\frac{z-\gamma e^{2\pi i\theta}}{1-z\gamma e^{-2\pi i\theta}}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\overline{G}_k z^k\right)$$

$$=\left(\sum_{j=0}^{\infty}\overline{B}_j z^j\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\overline{G}_k z^k\right)$$

とおく．この $G(z)$ によって white noise を

$$\eta_n=\int_{-1/2}^{1/2}e^{2\pi in\lambda}dZ_\eta(\lambda)$$

$$Z_\eta(\lambda)=\int_{-1/2}^{\lambda}\frac{1}{\overline{G(e^{2\pi i\mu})}}dZ(\mu)$$

と定義すると x_n は $\{\eta_k\}$ によって

$$x_n=\int_{-1/2}^{1/2}e^{2\pi in\lambda}\overline{G(e^{2\pi i\lambda})}dZ_\eta(\lambda)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k}B_{k-j}G_j\right)\eta_{n-k}$$

と移動平均表現が出来る．

今簡単の為に $n=0, h=1$ について考えると

$$E|x_1-P_{L_2(x;0)}x_1|^2=|G_0|^2$$

なることがわかっているが，$L_2(\eta;0)$ について考えると

$$E|x_1-P_{L_2(\eta;0)}x_1|^2=|B_0G_0|^2=\gamma^2|G_0|^2$$

となって，

$$\gamma^2|G_0|^2<|G_0|^2$$

であるから，η の方は時刻0以後の情報も含むことになる．

そして

$$(\xi_{n+m},\eta_n)=\int_{-1/2}^{1/2}e^{2\pi im\lambda}\overline{B(e^{2\pi i\lambda})}d\lambda=B_m\ (m\geqq 0)$$

で結局

$m<0$ の時 $\quad(\xi_{n+m},\eta_n)=0$

$m=0$ の時　$(\xi_n,\ \eta_n)=B_0=\gamma$

$m\geqq 1$ の時　$(\xi_{n+m},\eta_n)=B_m=-\gamma^{m-1}e^{2\pi i m\theta}(1-\gamma^2)\neq 0$

となる．即ち η_n は未来全体にわたって情報を含んでいる．

なお，　$L_2(x\,;\infty)=L_2(\xi\,;\infty)=L_2(\eta\,;\infty)$　である．

（2）　$C(z)=e^{\int_0^1 \frac{e^{2\pi i\theta}+z}{e^{2\pi i\theta}-z}d\chi(\theta)}$　について

$$\mathrm{Real}\ C(\gamma e^{2\pi i\lambda})=e^{\int_0^1 \frac{1-\gamma^2}{1-2\gamma\cos 2\pi(\lambda-\theta)+\gamma^2}d\chi(\theta)}$$

で $\dfrac{1-\gamma^2}{1-2\gamma\cos 2\pi(\lambda-\theta)+\gamma^2}\geqslant 0$, そして $\chi(\theta)$ は非増加函数であるから

$\displaystyle\int_0^1\frac{1-\gamma^2}{1-2\gamma\cos 2\pi(\lambda-\theta)+\gamma^2}d\chi(\theta)\leqslant 0$, 又 $C(z)$ は $|z|<1$ で正則であるから $C(z)\in H_2$. 今 $|z|<1$ において

$$C(z)=\sum_{l=0}^{\infty}\overline{C}_l z^l$$

とおくと，ほとんどすべての λ に対して

$$\lim_{\gamma\to 1-0}C(\gamma e^{2\pi i\lambda})=\sum_{l=0}^{\infty}\overline{C}_l e^{2\pi i l\lambda}$$

が成り立つ． white noise を

$$\tilde{\eta}_n=\int_{-1/2}^{1/2}e^{2\pi i n\lambda}dZ_{\tilde{\eta}}(\lambda)$$

$$Z_{\tilde{\eta}}(\lambda)=\int_{-1/2}^{\lambda}\frac{1}{\overline{C(e^{2\pi i\mu})G_0(^{2\pi i\mu})}}dZ(\mu)$$

と定義すれば

$$x_n=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k}C_{k-j}G_j\right)\tilde{\eta}_{n-k}$$

とあらわされるが

$$E|x_1-P_{L_2(\tilde{\eta};0)}x_1|^2=|C_0G_0|^2=|e^{\int_0^1 d\chi(\theta)}G_0|^2<|G_0|^2$$

となり $\{\eta_n\}$ と同様 $\tilde{\eta}_n$ は時刻 n より先の情報も含むことになり

$$(\xi_{n+m},\ \tilde{\eta}_n)=\int_{-1/2}^{1/2}e^{2\pi i m\lambda}\,\overline{C(e^{2\pi i\lambda})}\,d\lambda=\int_{-1/2}^{1/2}e^{2\pi i m\lambda}\left(\sum_{l=0}^{\infty}C_l e^{-2\pi i l\lambda}\right)d\lambda$$

で

$m>0$ の時　少くとも一つの m について

$$(\xi_{n+m},\ \tilde{\eta}_n)=C_m\neq 0$$

$m=0$ の時　$(\xi_n,\ \tilde{\eta}_n)=C_0\ (<1)$

$m<0$ の時　$(\xi_{n+m},\ \tilde{\eta}_n)=0$

となり，$\tilde{\eta}_n$ は過去のものは含まないが，少くとも未来の一時点の情報を持つ．そしてこの場合も

$$L_2(x\,;\infty)=L_2(\tilde{\eta}\,;\infty)$$

となる．

統計数理研究所

参　考　文　献

［1］ Karhunen, K. 'Über die Struktur stationärer zufälliger Funktionen', *Arkiv för Matematik*, Band 1 (1949), pp. 141–160.

［2］ Grenander, U. and Szegö, G. *Toeplitz Forms and their Applications* (University of California Press, 1958).

［3］ Nevanlinna, R. *Eindeutige Analytische Funktionen* (Springer, Berlin, 1936).