数量化理論とその応用例 (V)*

林　　知　己　夫

(1961 年 2 月 受 付)

Theory of Quantification and its Examples (V)

Chikio HAYASHI

In the present paper, the method of quantification is described in the following cases. (i) Outside variable is numerical, and some factors to predict it are numerical and other factors are qualitative which are represented by the response pattern on the categories in items. Th essential idea is shown in the paper "On the prediction of phenomena from qualitative data and the quantification of qualitative data from the mathematico-statistical point of view (Ann. I.S.M. Vol. III, No.2). As a result, we obtain the formula (A) to solve under the contidions $x_{j1}=0,\ j=2, \cdots, R$. (ii) Outside variable is qualitative which is represented by what class each element belongs to, and some factors to predict it are numerical and other factors are qualitative (c.f. (i)). The essential idea is found in the paper "Multidimensional quantification I", (The Proceedings of Japan Academy Vol. 30, No. 2). As a result, we have the equation (B) to solve under the conditions $x_{j1}=0, j=1, \cdots, R$.

Institute of Statistical Mathematics

§1. 外的変数 (outside variable) が数量で与えられているとき，それを予測するための要因の数量化について，外的変数がベクトルである場合，また要因が特殊の型をしている場合などに関して，すでに数量化とその応用例 (IV)，統計数理研究所彙報第5巻第2号，に記述した．しかし，その後この方法についての応用が盛んになり，社会調査や市場調査などに多く用いられるようになったので，便利のため，いま少しく書き足しておこうと思う．要因の一部が数量である場合を考えてみる．勿論，彙報第7巻，第1号，数量化と予測の根本概念の所で述べたように，一般的には，要因が数量であろうとなかろうと，アイテムにおけるカテゴリーの反応として表現できるので，すでに述べた方法をそのまま使うことができる（できるというより，数量そのものをあつかうより，より以上に望ましいことである)．しかし，こうする場合，求むべき数量（数量化さるべきカテゴリー）の数が極めて大きくなり，計算が面倒になる可能性がある．そこで，もし数量で与えられている要因が，外的変数と線型的関係にあると見做せる場合においては，重相関を求める場合と同様に，その数量を用い，そのウェイトだけを算出するといった仕方をとるならば，計算を簡単に処理することができる．この場合の式を参考のため書き下しておこう．なお，これについての考え方は全く同様であって，重相関の時の形とわれわれのすでに述べた一般的な場合の形とを組み合わせたものが

* これは昭和 35 年度文部省科学研究費による研究の一部である．

現われるに過ぎない.

L 個の要因が数量化されているとし, R 個の要因は, これまでの通り, アイテム・カテゴリーの形であらわされているものとする. 記号は全く前のものをつかう. L 個の数量で与えられている要因を $z_1, \cdots, z_L$ であらわす. これにそれぞれ $w_1, \cdots, w_L$, というウェイトを乗ずるものとする. 勿論これを求めることになるのである. $z_l(i)$ は i なるものが l 項目で示す標識とする. j アイテム・k カテゴリーに x_{jk} の数量を与えるものとする. i なるものが j アイテム・k カテゴリーに反応しているとき $\delta_i(jk)=1$, しからざるとき $\delta_i(jk)=0$ とする. i なるものの外的変数は A_i とする. i なるものの要因からする数量 α_i として

$$\alpha_i=\sum_l^L w_l z_l(i)+\sum_j^R\sum_k^{Kj} x_{jk}\delta_i(jk)$$

を与えることにする. ここに一般数を失うことなく $\sum_i z_l(i)=0$, $l=1, \cdots, L$ としておく (これはどうでもよいことであるが). われわれとしては, α_i を以て A_i を最も効率よく推定しようと考えるのである. このため, α と A との相関係数が最大になるように, すなわち

$$Q^2=\sum_i(A_i-\alpha_i)^2$$

を考へ, これが最小になるように, w_l, x_{jk} ($l=1, \cdots, L$, $j=1, \cdots, R$, $k=1, \cdots, k_j$) を求めるのである. 仕方は全く同様なので省略し, 最後の解くべき式だけを書いておこう.

$$\sum_i A_i z_m(i)=\sum_l^L\Big[\sum_i z_m(i)z_l(i)\Big]w_l+\sum_j^R\sum_k^{Kj}\Big[\sum_i\delta_i(jk)z_m(i)\Big]x_{jk}, \qquad m=1, \cdots, L$$

$$\sum_i A_i\,\delta_i(uv)=\sum_l^L\Big[\sum_i\delta_i(uv)z_l(i)\Big]w_l+\sum_j^R\sum_k^{Kj}\Big[\sum_i\delta_i(jk)\delta_i(uv)\Big]x_{jk},$$
$$u=1, \cdots, R, \quad v=1, \cdots, K_u$$

$$\begin{cases}\sum_i z_m(i)z_l(i) &=c(l, m)\\ \sum_i\delta_i(jk)z_m(i) &=d(jk, m)\\ \sum_i\delta_i(jk)\delta_i(uv) &=f(jk, uv)\end{cases}$$

とすると

$$(\mathrm{A})\begin{cases}\sum_i^L A_i z_m(i)=\sum_l^L c(l, m)w_l+\sum_j^R\sum_k^{Kj}d(jk, m)x_{jk}\\ \sum_i A_i\delta_i(uv)=\sum_l^L d(uv, l)w_l+\sum_j^R\sum_k^{Kj}f(jk, uv)x_{jk}, \quad m=1, \cdots L;\ u=1, \cdots, R;\ v=1, \cdots K_u\end{cases}$$

を解けばよいことになる. 解を求める条件としては, 例えば $x_{j1}=0$, $j=2, \cdots, R$, とおくのが便利である.

§2. §1 は外的変数が数量の場合であったが, これが分類の形で与えられている場合 (要因の方の形は §1 と同様) について書いてみよう. 記号については, 全く既発表のもの (例えば, 態度数量化の一方法 II, 統計数理研究所彙報第6巻, 第2号) と同一とする. α_i は §1 と同様.

$$\sigma^2=\frac{1}{n}\sum_i\alpha_i-\bar{\alpha}^2, \qquad \bar{\alpha}=\frac{1}{n}\sum_i\alpha_i$$

$$\sigma_b{}^2=\frac{1}{n}\sum_t n_t\bar{\alpha}_t{}^2-\bar{\alpha}^2, \qquad \bar{\alpha}_t=\frac{1}{n_t}\sum_{i[t]}\alpha_{i[t]},$$

$i[t]$ は t 層に属している i を示し, したがって

$$\bar{\alpha}_t=\frac{1}{n_t}\sum_l^L z_l[t]w_l+\frac{1}{n_t}\sum_j\sum_k g^t(jk)x_{jk},$$

但し,
$$g^t(jk)=\sum_{i[t]}^{n_t}\delta_{i[t]}(jk)$$

$$z_l[t]=\sum_{i[t]}^{n_t} z_l(i[t])$$

そこで

$$\frac{\partial \sigma_b{}^2}{\partial w_m}=\eta^2\frac{\partial \sigma^2}{\partial w_m},\qquad m=1,\cdots L\quad \text{及び}$$

$$\frac{\partial \sigma_b{}^2}{\partial x_{uv}}=\eta^2\frac{\partial \sigma^2}{\partial x_{uv}},\qquad u=1,\cdots,R,\ \ v=1,\cdots,K_u$$

を書き出せばよい．

$$\text{(B)}\begin{cases}\displaystyle\sum_l^L\left[\sum_t \frac{z_l[t]z_m[t]}{n_t}\right]w_l+\sum_j^R\sum_k^{Kj}\left[\frac{z_m[t]g^t(jk)}{n_t}\right]x_{jk} \\ \displaystyle\qquad\qquad=\eta^2\left(\sum_l^L c(l,m)w_l+\sum_j^R\sum_\kappa^{Kj} d(jk,m)x_{jk}\right), \\ \displaystyle\sum_l^L\left[\sum_t \frac{z_l[t]g^t(uv)}{n_t}\right]w_l+\sum_j^R\sum_\kappa^{K}\left[\sum_t\frac{g^t(jk)g^t(uv)}{n_t}-\frac{n_{uv}n_{jk}}{n}\right]x_{jk} \\ \displaystyle\qquad\qquad=\eta^2\left(\sum_l^L d(uv,l)w_l+\sum_j^R\sum_k^{Kj}\left[f(jk,uv)-\frac{n_{uv}n_{jk}}{n}\right]x_{jk}\right) \\ m=1,\cdots,L;\ \ u=1,\cdots,R;\ \ v=1,\cdots,K_u\end{cases}$$

を，例えば $x_{j1}=0,\ j=1,\cdots,R$ の条件の下に解けばよい事がわかる．

統計数理研究所