機能と構造に関する統計的量関係表現とその方法について

田　口　時　夫

(1960 年 2 月 受 付)

A Case Study on the Recognition of Quantities Which Regard to the Structures and Functions of the Nation's Economy and Study of Mathematical Method for Measuring Them

Tokio TAGUTI

Author tried to explain his own problems about the empirical, and statistical method which has been recognized as the most standard one. Namely, would the summation be the best method of attaining to the whole which represent some economic situation

For instance, to set some kind of economic activity or force index, might we aggregate simply the individual amount of produced goods?

In such cases, at first, we should establish explicit and strict concept and at the same time should have a profound quantitative analysis about the organization and the measuring of various elements of the components of the situation. This paper but has not yet been completed and is very preliminary one.

Institute of Statistical Mathematics

は し が き

統計資料の処理について従来の方式を反省し，その結果の二，三を報告する.

実際のデータを処理する際は，慣行方式の踏襲に留らず，その本質や，限界を解明することが必要であり，それは，理論の発展に寄与するものと思う.

本篇は直接後編に接続するもので猶暫定的且試論の域にある.

目　　次

§1.　基本的量認識について

統計において，構造とその総合機能との関係や，総合機能に対する各構成部分の評価を行うことは，あるいは総合計と構成比として一般に容認されている．

しかし，諸種の観点から判断して，機能としての総合評価が単に部分和に基づくとする格別の論拠は成立たない．あるいはドグマに近い．

この場合，構成各部分の総合計に対する評価も，単純な比（％）であることは許されない．

以下過去方式を解明しつつ，数学的視野の下に方法を究明する．

§2.　総合評価と構成率（構造指数）について

1.　一般的形態

（0）　機能表現としての総合評価 X と，それに寄与する構成部分 x_1，x_2，x_3，……x_n について一般に

$$X=x_1\cup x_2\cup x_3\cup\cdots\cdots\cup x_n \quad (\text{合 construction})$$

と表わせる．

ここで，任意の x_i（$\forall x_i$）及び i と異なる j について

$$x_i\cap x_j=0 \quad (\text{交 intersection})$$

つまり各構成は範疇を異にする（重複しない）．以上は集合論的考察に類似する．

（1）　今特に量形態としての構成形態を具体的に

$$X=x_1 * x_2 * \cdots * x_n \quad (\text{combination})$$

とすれば，この構成形式に対して次のごとき基本的法則が考えられ，当面の基礎としては妥当すると思われる．

以上及び以下は現実性が，最大の課題であるが差当り数学上のいわゆる実数体[1),2,3),4)] での構成（いわゆる　operater)，計量方式及びその性質として当面処理する．

1.　単位 I が存在する．

$$\exists I : I * x=x$$

脚注 1)　所謂実数については数学的立場からのみならず実際的な視野の下に考察する機会があると思う．また，部分評価（構成率）を

$p_i=\mathfrak{p}(x_i\,;\,x)$ とすれば

1.　$\log\mathfrak{p}=\log x *' \log X$

　　ここに $*'$ は $*$ の逆結合である．

2.　$\mathfrak{p}$ は相互補足的である．

　　つまり　$p_1 * p_2 * \cdots\cdots * p_n=e^I$　（I は単位）

脚注 2)　従ってもし $*$ が加算を示すものであれば

$e^I=e^{\circ}=1$ である．

脚注 3)　単位　$u * a=a$　の存在は以上及び以下の例では　0，1，e，e_e …… $\overbrace{e^{e^{\cdot^{\cdot^{e}}}}}^{t}$ …… であることがその唯一性と倶に容に容易に示されるが，これは上述の結論と併せ考えると，従来の代数学の群的構想に相似する．

また　$I_e(t)=\overbrace{e^{e^{\cdot^{\cdot^{e}}}}}^{t}$

一般に　$x_n^{\cdot^{\cdot^{x_2^{x_1}}}}$

は量に関する歴史の一端を示す関係と云えよう．

脚注 4)　構成量 x_i の数論的性質についての現実的考察は今後の課題とする．その結果は commutative, associative が否定されるかも知れない．

2. 逆結合が存在する

$\exists *' : (x_1 * x_2) *' x_2 = x_1$

3. 可換的 commutative である.

つまり $x_1 * x_2 = x_2 * x_1$

4. 均一的 associate である.

つまり $(x_1 * x_2) * x_3 = x_1 * (x_2 * x_3)$

2 具体的評価例

(1) 機能表現としての総合評価 X と，それに寄与する構造部分 x_1, x_2, ……, x_n は従来の加算の観点によれば

$$X = x_1 + \cdots\cdots + x_n = \sum x_i$$

この場合構成指数（パーセント）

$$p_1,\ p_2 \cdots\cdots\cdots p_n \text{ は}$$
$$x_1 = Xp_1,\ x_2 = Xp_2,\ \cdots\cdots\cdots,\ x_n = Xp_n$$

ゆえに

$$p_1 = \frac{x_1}{X},\ p_2 = \frac{x_2}{X},\ \cdots\cdots\cdots,\ p_n = \frac{x_n}{X}$$

明かに

$$p_1 + p_2 + \cdots\cdots + p_n = \sum p_i = 1 = e^0 = e^{I_1}$$

（率の相互補完性）

となる．これは構成比の基本的性質として掲げることが出来る．

(2) より有機的な総合評価として，乗法を基礎認識とすれば，単純乗積

$$X = x_1 \times x_2 \times \cdots\cdots \times x_n = \Pi x_i$$

この評価は次の方式が適切となろう．

$$x_1 = e^{\log p_1 \cdot \log X},\ x_2 = e^{\log p_2 \cdot \log X},\ \cdots\cdots x_n = e^{\log p_n \cdot \log X}$$

ゆえに

$$p_1 = e^{\frac{\log x_1}{\log X}},\ p_2 = e^{\frac{\log x_2}{\log X}},\ \cdots\cdots p_n = e^{\frac{\log x_n}{\log X}}$$

$$p_1 \times p_2 \times \cdots\cdots \times p_n = \Pi e^{\frac{\log x_i}{\log X}} = e^{\sum \frac{\log x_i}{\log X}} = e^{\frac{\log \Pi x_i}{\log X}} = e^{\frac{\log X}{\log X}} = e = e^1 = e^{I_2}$$

かくて評価の基本的性質は保持される．

(3) Potentia を基礎とすれば，対数乗積

$$X = e^{\{\log x_1 \cdot \log x_2 \cdots\cdots \log x_n\}} = e^{\Pi \log x_i}$$

この場合構成指数は

$$x_1 = e^{e^{\log \log p_1 \cdot \log \log X}},\ x_2 = e^{e^{\log \log p_2 \cdot \log \log X}},\ \cdots\cdots x_n = e^{e^{\log \log p_n \cdot \log \log X}}$$

とすることができる．

明らかに

$$p_1 = e^{e^{\frac{\log \log x_1}{\log \log X}}},\ \cdots\cdots,\ p_n = e^{e^{\frac{\log \log x_n}{\log \log X}}}$$

頭書の定義によれば

$$\log X = \Pi \log x_i = \Pi e^{\log \log p_i \cdot \log \log X} = e^{\log \log X \cdot \sum \log \log p_i}$$

$$\therefore\ \sum \log \log p_i = 1 \quad \text{かくて} \quad \Pi \log p_i = e \quad e^{\Pi \log p_i} = e^e$$

これにより構成方式 $* = e^{\Pi \log}$ に関して，$* p_i = e^e = e^{I_3}$ が容易に結論される．従ってこ

の方式によると評価に関する (1) の性質が保持される.

［注］ log. x の主要なる性質は

x_1, x_2, ……, x_n を等倍率的

即ち

$$\frac{x_2}{x_1}=\frac{x_3}{x_2}=\cdots\cdots=\frac{x_{i+1}}{x_i}=\cdots\cdots=\frac{x_n}{x_{n-1}}=K$$

なるごとく採用すれば, 対応する数列

$$y_1=\log x_1,\quad x_2=\log x_2,\quad \cdots\cdots,\quad x_n=\log x_n$$

は等差的, つまり

$$y_2-y_1=y_3-y_2=\cdots\cdots=y_{i+1}-y_i=\cdots\cdots y_n-y_{n-1}=\log K \text{（定値）}$$

であることである.

上記の機能評価と構成指数は, その把握に関して更に現実的に発展すべきものである. またその適否は実際上認識主体によるであろうが, 客観的手法として意義をもつであろう. 差当り企業別構成比の比較が資料として見込まれる.

§ 3. 機能とその実現形態との関係把握の方式について

1. 総体の構成及び部分評価と並んで重要なことは, 一般に二量（例えば機能とその実効等）の関係・いわゆる系数把握である. 従来この問題に関する量認識の基本は, 市民的段階として, 単純定比の存在であろうが, 定羃率, 定重羃率も量認識の基本としてしかるべき性質をもつ.

これは, 比の発展形態とみたい.

つまり機能 (x) とその実現形態 (y) について y/x により係数的把握を試みると共に

$e^{\frac{\log y}{\log x}}$ [1]　（定羃率　$\log y=\lambda \log x$ の予想）

$e^{\frac{\log\log y}{\log\log x}}$　（定重羃率　$\log\log y=\lambda\cdot\log\log x$ の予想）

これはある log normal の場合 $\xi=x-x_0$ とすればすべての log normal の場合成立する. (そして経済関係の資料では平均が小さいから特に一般的にそうである)

をもって機能形態把握の基礎とすることは現段階的認識である.

その方法としての適否はデコボコ及びバラツキ[2] を併せ考慮しなければならない.

後掲参考資料 I は方法適用の一例である. これは, 本来, 各経営体相互及び内部の分析と並行すべきものであるが, 資料の所在や作業の予定上, 一応国富調査報告第 III 巻 (経済企画庁刊) の規模別平均数値をもって代替したので, 規模分類は充分とはいえない. 参考資料 II については, 上記の方法適用は, その意義からみて省略した.

2. 猶機能と実現値についての二量間の関係については又微係数的把握方法があり, 前篇で具体的な説明を試みたが, 結合様式 $*$ に関して

ある機能量 x_0 における実現値 y_0 の微係数とは (x_0, y_0) を基準として, その周辺量 (x, y) と

$$x=\xi * x_0$$
$$y=\eta * y_0$$

なる関係で考察し, 当面は以上の具体例の範囲内で, 従来形式のいわゆる極限[3] の意味で

$y_*'=\lim\limits_{\xi\to I_*} e^{(\log\eta\ *'\log\xi)}$ をもって y_*' を定義することができる.

脚註 1) 基準量 e については猶猶考慮の余地がある.
脚註 2) デコボコ及びチラバリについては, 数の性質と共に別に究明する予定である.
脚註 3) 極限も問題の対象となる.

$*$ を multiplication とすれば

$$(y_0')_{x_0}=\lim_{\xi\to 1} e^{\frac{\log\eta}{\log\xi}}=\lim_{x\to x_0} e^{\frac{\log y-\log y_0}{\log x-\log x_0}}$$

また Potential においては

$$(y_0')_{x_0}=\lim_{\xi\to e} e^{e^{\frac{\log\log\eta}{\log\log\xi}}}=\lim_{x\to x_0} e^{e^{\frac{\log(\log y/\log y_0)}{\log(\log x/\log x_0)}}}$$

具体的に

$y=e^{\lambda x^{\nu}}$ ならば

$$y_m'(x_0)=e^{\lambda\nu x_0{}^{\nu}} \quad y_p'(x_0)=e^{x_0{}^{\nu}}$$

又重冪

$y=e^{\lambda e^{\mu x^{\nu}}}$ ならば

$$y_m'(x_0)=e^{\lambda\mu\nu x_0{}^{\nu} e^{\mu x_0{}^{\nu}}} \quad y_p'(x_0)=e^{e^{\mu\nu x_0{}^{\nu}}\log x_0}$$

また

$$Y=\mathop{*}_{i} e^{\log y_i * \log\xi_i} \quad \left(\text{直接的には}\ \ Y_u-Y_0=\mathop{*}_{i=0}^{u}(e^{\log y_i * \log\xi_i})\right)$$

をもって広義の integral（通俗的に面積）として矛盾はない．

微係数が例えば能率表現の手法とすれば integral は実績表現の手法といえよう．

結　　語

Summa や単純定比を量認識の基礎とすることは，猶根強いものであるが，量論においても評価，算法の発展は，歴史的事実である．

この観念と代数的結合 (*) の確定及びその実用簡易化とより具体的現実的の結合段階方式及び算法の，確定は現状において統計学の発展に先行するものであろう．資本の有機的構成に関しては，猶多くの検討を要する問題がある．

以上古典群的思想を基礎とするバランスの追求は確かに現状においても猶不充分であるが，それ以上の立場を得るには更に多くの原理的研究を要し可成の時日を要する見込である．

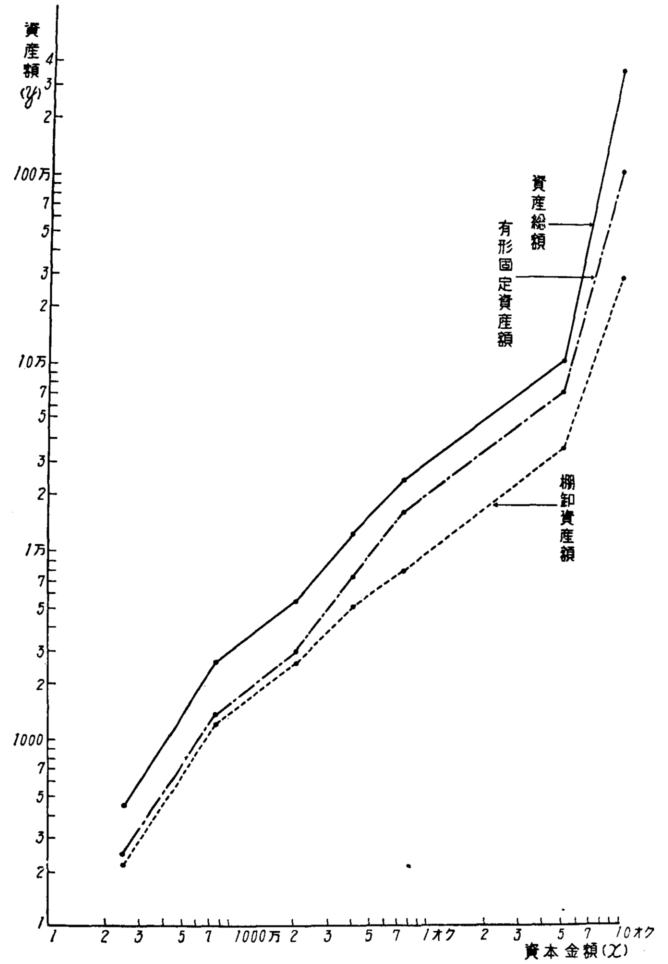
この場合単に方式の段階に留まらず，数の問題ともなる．

統計数理研究所

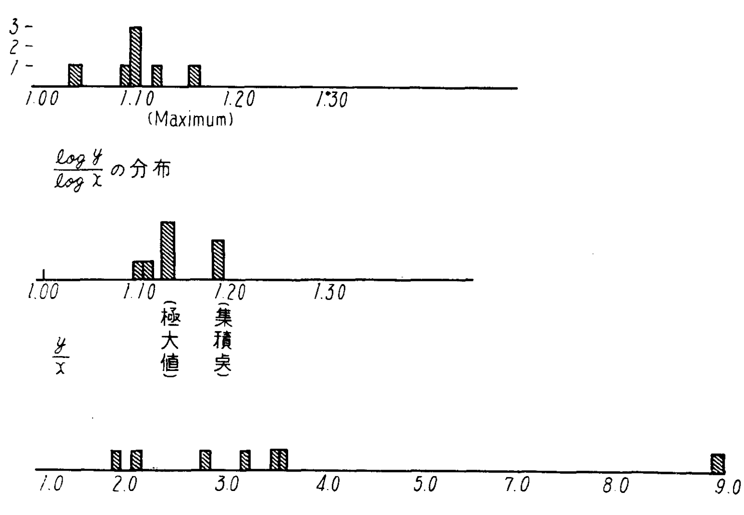
参考資料 I　資本機能の一形態（法人資産）

参考資料 II　資本機能の一形態（地域問題）—人口密度傾斜—

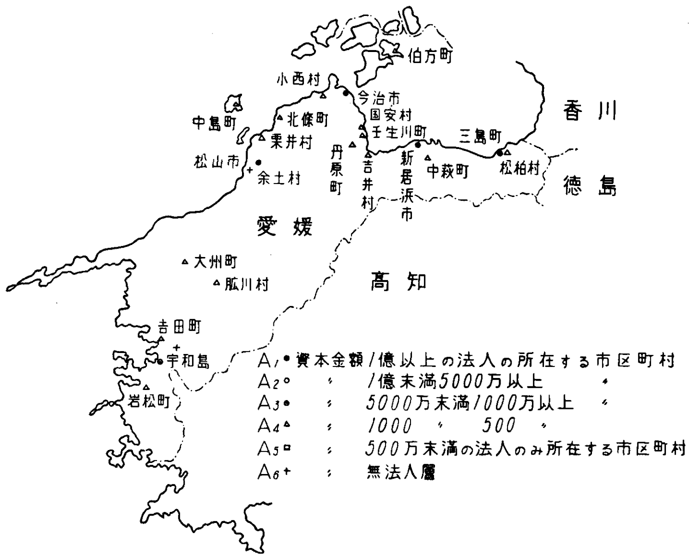
その1 積空間に於ける資本金と一社当り資産の関係



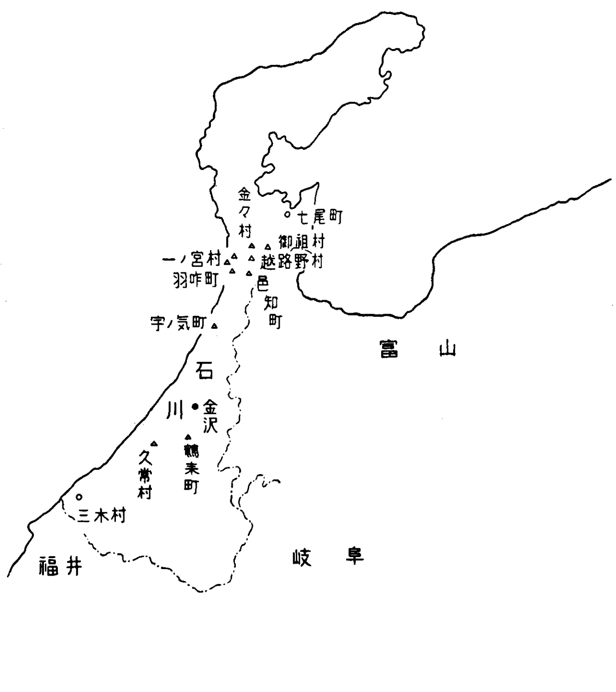
$\dfrac{\log \log x}{\log \log x}$ の分布　　　その2 資本金—資産係数の分布例（デコボコ）



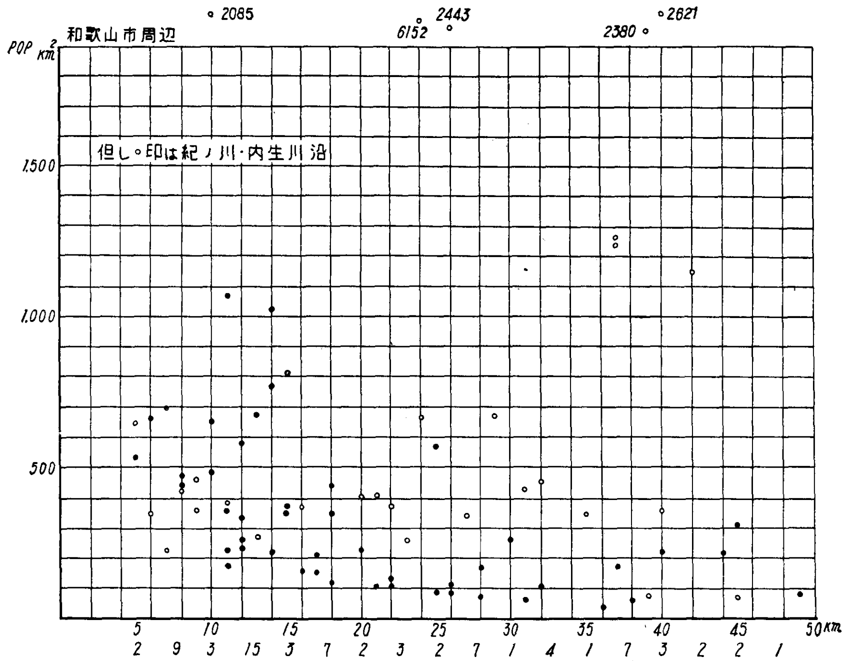
その I　資本の関係からみた市町村の関係（昭和 30 年度
国富調査標本設計の資料による）

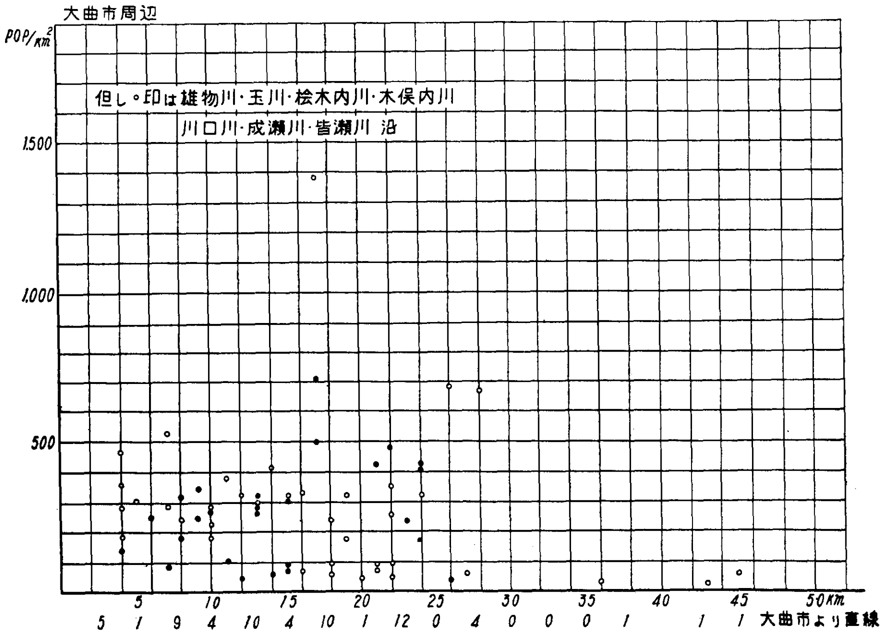


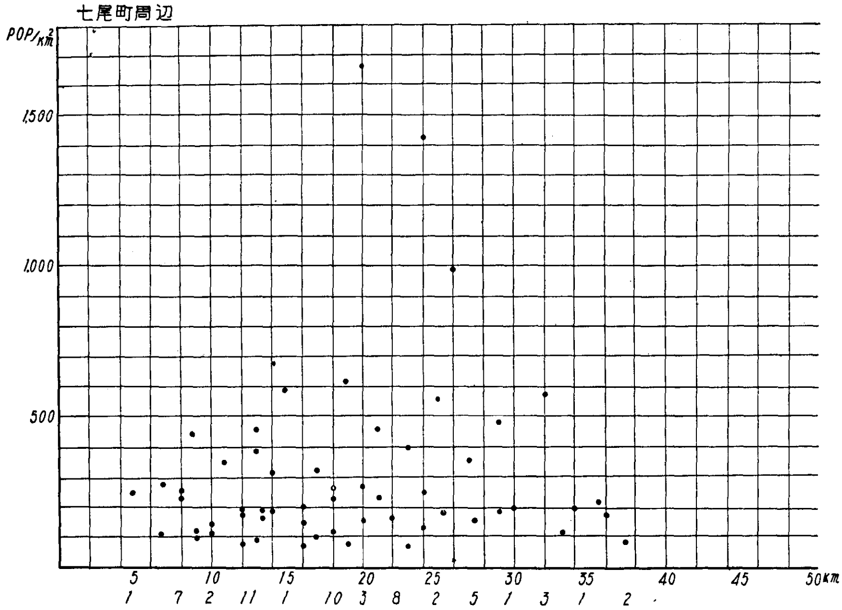
注　なお本資料はサンプルによるもので全体について記録出来ないのが残念である又地域分類に於て傾斜係数によるのは必要であるが資料不足である.

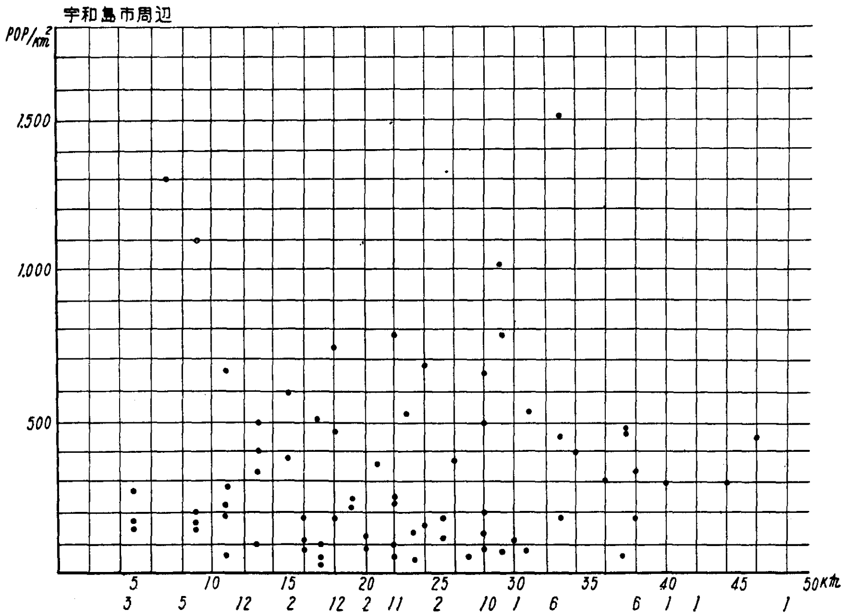


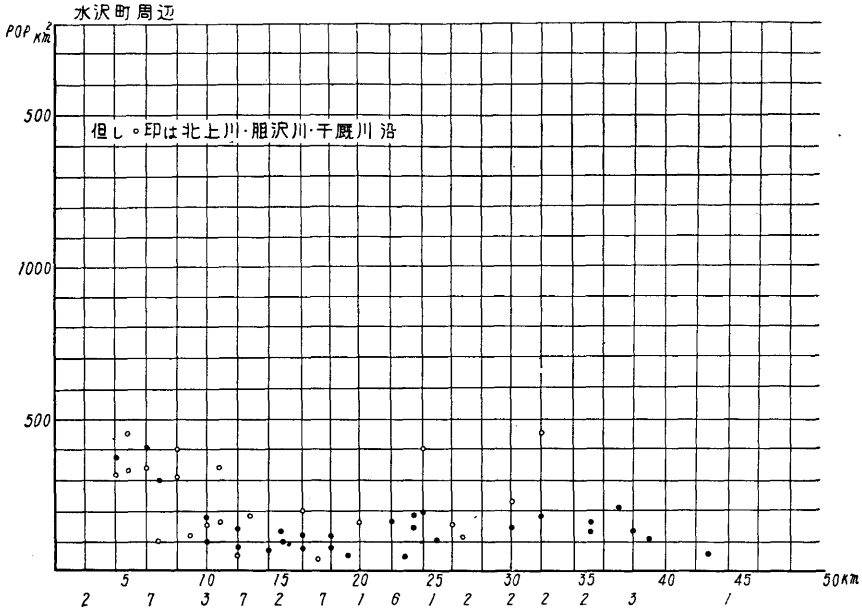
その2　衛星市町村の人口密度（広義）と地域中心都市えの距離との関係
（昭和 29 年度国勢調査報告〔総理府統計局〕資料による）






七尾町周辺
POP/km²
1,500
1,000
500
5 10 15 20 25 30 35 40 45 50km
1 7 2 11 1 10 3 8 2 5 1 3 1 2


宇和島市周辺
POP/km²
1,500
1,000
500
5 10 15 20 25 30 35 40 45 50km
3 5 12 2 12 2 11 2 10 1 6 6 1 1 1


水沢町周辺
POP Km²
500
1000
500
但し ◦印は北上川・胆沢川・千厩川沿
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50Km
2 7 3 7 2 7 1 6 1 2 2 2 2 3 1