多変数解析論の最近10年間における歩み

塩　谷　　実

(1961 年 1 月 受 付)

The Recent Progress in the Theory of Multivariate Analysis

Minoru SIOTANI

Summary. This is an expository paper giving an outline of some topics on the theory of multivariate analysis published in about latest ten years. The following problems are selected and discussed in expositive way:

(a・1) the derivation of sampling distributions of fundamental but now classical statistics in multivariate analysis,

(a・2) the Jacobians of certain matrix transformations,

(a・3) the some asymptotic distributions,

(a・4) the distribution of Hotelling's generalized T_0^2-statistic in the multivariate analysis of dispersion,

(b・1) the union-intersection test region and the step-down procedure,

(b・2) the simultaneous confidence bounds,

(c) the problems of classification, selection and discriminant function,

(d) the distributions of latent roots of some determinantal equations in the null case and in the non-null case,

(e) some other topics.

For the convenience of explanation, a short historical note on the multivariate analysis before 1950 is given.

§1. まえがき

統計における多変数解析も 1950 年前後から漸く理論的体系を整えてきたが，一方自動計算機の急速な進歩と共に数値計算の労が著しく減ったことも加わり，実際問題への応用もまた可成り広くやられるようになった．教科書としても周知のように

T. W. Anderson: Introduction to Multivariate Statistical Analysis,

M. G. Kendall: A Course in Multivariate Analysis,

が既に刊行され，基礎的な概念，理論が体系を整えて紹介されると共に，統計学における1つの branch としての独立性をもつまでになっている．しかし一口に多変数解析論といっても，統計理論全般にわたる広汎なものとなるので，ここでは議論の対象をしぼることにする．最初，事柄の多変数解析としての重要度（筆者なりの判断による）によって項目を撰択することを考えたが，文献の整理の結果，それでは必ずしも本報告の課題である‘最近の歩み’の概要を伝えることにならず，加えて或る程度のことは前記 Anderson, Kendall の本にまとめられているので，撰択の基準を次のように変更した．1950 年から 1960 年の約 10 年間を対象にとり，此の期間に文献に現われた多変数解析論関係の中で，系統的に或いは頻度多く取り扱われた項目を取り上げ，これに筆者が重要であると思うもの，教育的であると思う項目を加えた．斯くして本報告では，次の項目の最近 10

年間における歩みの概要を，主として理論の面から，みてゆくことにする．

（a） 標本分布に関するもの

（a・1） 基本分布の導出法

（a・2） 変換の Jacobian

（a・3） 漸近分布

（a・4） 分散分析における Hotelling の T_0^2-統計量

（b） Union-Intersection Method

（b・1） Union-Intersection Test Region と Step-down Test

（b・2） 同時信頼区間

（c） 分類の問題，判別函数

（d） 特有根に関するもの

（e） 其の他

文献を調べた雑誌は

（1） Ann. Math. Stat.（米） （2） Jour. Amer. Stat. Assoc.（米）

（3） Biometrics（米） （4） Biometrika.（英）

（5） Jour. Roy. Stat. Soc.（英） （6） Applied Statistics.（英）

（7） Sankhyā.（印） （8） Ann. Inst. Math. Stat.（日）

（9） 統計数理研究所彙報（日） （10） Bull. Math. Stat.（日）

及び Psychometrika, Ann. Eugen., Skand. Aktuarietidskr の一部が主でその他のものは，筆者の‘多変数解析論アブストラクト集’に記録してきたものを対象とした．

記述にあたっては，理論の厳密性を或る程度犠牲にしても，上記の対象項目について，最近どのような種類の仕事がなされているかを示し，その主なものの研究結果の筋道を伝えることに主力を注いだ．

さて本論に入るに先だって注意しておかねばならぬことがある．変量の次元が高まれば，その基礎にある分布の含むパラメターの個数は増してきて，取り扱いが複雑となり困難となってくる．このため記述的段階をすぎて標本分布に関係する段階になった時，取り扱い得る基礎分布として正規分布が仮定されているのが現状である．これは現在の多変数解析論のもつ一大欠点であり，将来の発展のためには是非とも打破しなければならない壁である．最近 multivariate Tchebycheff inequality, bivariate sign test, non-parametric tolerance region, 及び multivariate finite population を取り扱ったもの，multi-way contingency table を取り扱ったものがでているが，本報告で取り上げられた項目における標本分布に関する部分では，依然として正規性が基礎となっていることをここで断っておく．

吾々がこの論文で注目する期間を主として最近の 10 年間としたことから，論述が唐突になるおそれがあるので，これを幾分でも避けるため，1950 年までの多変数解析論の発展の歴史をごく簡単に次節でふれておく．そして これを背景とし，記号の説明をした後で，§4 から，主題とする項目について最近の歩みを順次述べてゆく．

§2. 1950 年までの多変数解析論概観

多変数解析論において，いわゆる Wishart 分布，すなわち，正規母集団からの標本における，分散・共分散の同時標本分布は最も基本的である．二変数の場合には，標本相関係数の標本分布に関連して，R. A. Fisher [38; 1915] により得られたが，一般の場合のものは，J. Wishart [177; 1928] により初めてあたえられた．この当時は多変数解析論における草分けの項で，一変数の場合の多変数の場合への拡張，変数の間の相関関係の研究が相次いでなされている． 1940 年までの約 10 年間の主なものをひろってみると：

R. A. Fisher により，偏相関係数 [39; 1924] 及び重相関係数 [40; 1928] の標本分布が求められ，次いで H. Hotelling [59; 1931] が，一変数の場合の Student の t の多変数の場合への拡張である，いわゆる，Hotelling の T-統計量を定義し，その標本分布を与えた. S. S. Wilks [174; 1932] は，分散・共分散行列の行列式を generalized variance と定義し，これに基いて相関比，F-統計量の拡張をやっている．また analysis of dispersion でよく使われる，within class generalized variance と total の generalized variance との比，すなわち，所謂 Λ-統計量が現われたのも此の時である．また Wishart 分布を，互に独立ないくつかの χ^2-分布と正規分布の積に分ける有名な Bartlett の分解定理 [10: 1933] が，相次いで得られている．Λ-統計量のモーメントは，一般の場合に正確に求められたが，その標本分布は，一変数と二変数の時，及び比較される class の数が 2 個と 3 個の時しか得られていなかった．これに対する Bartlett [11; 1938] の χ^2 近似は実用上重用である.

以上の観点とは異なり，R. A. Fisher [41; 1936] の導入した discriminant function analysis は極めて重要で，classification の問題に限らず，多変数の場合に適した検定基準を導く新しい方法を提供した.

更に同じ年には，Hotelling [61; 1936] の canonical correlation の概念が導入され，その大標本理論が展開された．Fisher と Hotelling の重要な仕事は，やがて，或る種の行列の特有根の同時分布をうみ出すに至った．この分布は，null case にたいして，Fisher [42; 1939], Girshick [47; 1939], Hsu [64; 1939], S. N. Roy [138; 1939] により，殆んど時を同じくして独立に得られたのである.

これらの結果が得られると，直ちに Λ-統計量，T^2-統計量，Lawley の統計量 [93; 1938] 等が特有根の言葉で表現され，従ってお互の間の関係が明らかにされた [12; 1939]．更に Bartlett [11; 1938] は，回帰論と canonical correlation analysis との関係を明らかにした.

この他，Hotelling [60; 1933] による principal components の概念の導入，及び，classification の問題に関連して，Mahalanobis [96; 1930] により，二つの母集団（分散・共分散行列は同じ）の間の距離として定義された，いわゆる，Mahalanobis の距離 D^2 は，多変数解析論草分けの頃の落してはならないものであろう.

以上 Wishart 分布が求められてからの 10 年余りの主な結果をひろってみると，現在，多変数解析論の基礎となっている重要な概念は，殆んど出揃っている感じである．その後，理論が厳密に精密になり，種々の推論のための統計量が増えてきたし，又理論が次第に統一的，体系的になってきたが，根本的には，これ等の基礎的概念に立脚していると言って過言ではあるまい.

1940 年代に入って，その前半には，世界大戦の影響もあって，多変数解析論に関する発展は少くとも論文の上ではあまり見られない．但し P. L. Hsu [65; 1941 a, 66; 1941 b] の canonical correlations，及び，或る種の行列式方程式（特性方程式）の根の極限分布に関するすぐれた結果があり，又 Simaika [159; 1941], Hsu [67, 1945] は，Hotelling の平均ベクトルに関する T^2 検定，重相関係数に関する検定の optimum な性質について論じている．後半に入って研究も漸く軌道にのってきたが，この頃では，特に classification 或いは discriminant function analysis に関する研究，及び characteristic roots の分布に関する研究が目につく．classification に関しては，例えば，von Mises [99; 1945] の対象母集団が有限個の場合に対する minimax procedure, A. Wald [169; 1944] の二標本に基くいわゆる Wald の discriminant function の分布に関するものがあり，又 Cochran and Bliss [30; 1948] は，変数の中に discrimination に対して間接的に貢献するものがある場合の問題を論じている．C. R. Rao [126; 1946, 127; 1947, 128; 1948, 129; 1949a, 130; 1949b, 131; 1950, 132; 1951] は，classification 及びそれに伴う距離函数に関して，理論，応用両面にわたって相次ぐ論文で組織的に論じている．これらの結果は，彼の著書 [133; 1952] の第 8

章にまとめられている．特に doubtful region の使用は注目してよい．

characteristic roots に関しては，S. N. Roy [139; 1942, 140; 1945, 141; 1946a, 142; 1946b, 143; 1950], Bartlett [13; 1947a, 14; 1947b], の研究がこの頃の代表的なものであろう．Roy の取扱った問題は，non-null case における標本分布，個々の特有根特に最大及び最小の根の分布を研究することであり，且つそれらの根の統計的推論への応用を論ずることであった．Bartlett は canonical correlations の nonnull case に対する分布を求めているが，その結果は，母集団における characteristic root のゼロでないものが唯一個である場合を除けば，殆んど使用に耐えない程複雑なものである．このことは現在でも殆んど変りがないが，彼の仕事は最近の A. T. James の仕事 (§7) に密接な関係をもっている．この他，T. W. Anderson [3; 1948], Nanda [102; 1948b] の特有根の null case における極限分布に関する研究があることを附記しておく．

1940 年代後半における今一つの特徴は，個々に，主として幾何学的に導かれた Wishart 分布，T-分布，Bartlett の分解定理等の一連の基本分布を解析的に導くこと，更にこれらの分布を統一された方法で導くことが可成り行われている．新らしい分野が開拓される場合，個々バラバラにいろんな仕事がなされるが，可成りの年数がたてば，これらの仕事をまとめ，統一して体系化することが何時でも要求される．しかし，全体的にみて，ややもすれば渋滞気味の感じがあった多変数解析の理論的発展のために，新しい数学的道具，解析方法を見つけようとした意図もまた筆者には感ぜられる．Sverdrup [168; 1947], Wishart [178; 1948] は Wishart 分布の導出法を研究し，P. K. Bose [26; 1947] は多変数分布のパラメトリックな関係を論じている．H. Cramér は彼の名著 [33; 1946] の中で，Wishart 分布の特性函数を基礎に理論を統一しようとし，Elfving [37; 1947] は，正規回帰論を基礎に基本分布を体系的に導いている．但しそこでは null case だけしか取扱われなかったが，Elfving の考え方は 1950 年代に受継がれている．Narain [104; 1948] の仕事は，見ていないが，矢張り基本分布導出の統一的方法を論じたものであろう．

T. W. Anderson [2; 1946] は Wishart 分布を noncentral case に拡張し，それの応用を考えているが，不幸にもあまり複雑すぎて，一変数の時の noncentral χ^2-distribution に見られるような発展がその後の研究にも見られない．

多変数分散分析に関しては，そこで使用される統計量として，Wilks の Λ-統計量の他に，現在代表的なものとされている Roy の最大特有根（既に述べたもの）及び Hotelling の T_0^2 統計量 (§4·4) が現われている．これは誤差分散行列を共有するいくつかの普通の T^2 統計量の和をとり，爆弾照準機の空中テストを素材とした多変数品質管理の問題で論じている [62; 1947]．理論的な議論は後に発表されているが，この統計量は characteristic roots の和の形であることがわかり，本質的には Lawley の統計量と同じものである．

以上 Wishart 分布が求められてから，1950 年に至るまでの多変数解析の理論的発展の跡を概観した．これらの結果を背景にして，本論文の中心範囲である 1950 年から 1960 年に至る最近 10 年間の理論を綜合的に見てゆこう．まず記号の説明から始めよう．

§3. 記　号

特に断らない限り次の記号を使う．ギリシャ文字で，母集団パラメターを，イタリック文字で与えられた実数（アルファベットの前半）か確率変数或いは標本の量を表わす．行列は肉太の大文字で，ベクトルは肉太の小文字で表わし，何れも実数の要素をもつ．転置行列はプライムを付して表わす．例えば $\boldsymbol{A}'$ は $\boldsymbol{A}$ の転置行列である．特にベクトルは縦ベクトルを表わすことにし，従って横ベクトルはプライムを付して表わされる．また三角行列は，主対角線の上側の要素が全部 0 であるものを表わすことにし，特に $\tilde{\boldsymbol{T}}$ の如く表わす．主対角線の下側が 0 である三角行列は，従って $\tilde{\boldsymbol{T}}'$ となる．行列 $\boldsymbol{A}$（正方）の行列式は $|\boldsymbol{A}|$ で逆行列は（$\boldsymbol{A}$ が nonsingular な正方行列のとき）

$\boldsymbol{A}^{-1}$ で表わす．$a_1, a_2, \cdots, a_p$ を対角要素とする対角行列は $\boldsymbol{D}_a$ で表はし，特に単位行列には $\boldsymbol{I}$ を用いる．正方行列 $\boldsymbol{M}$ の characteristic roots の集合には $C(\boldsymbol{M})$ なる記号を用い，特に，最大根，最小根は $C_{\max}(\boldsymbol{M})$, $C_{\min}(\boldsymbol{M})$ と表はす．記号 $\mathrm{tr}\,\boldsymbol{M}$ は $\boldsymbol{M}$（正方）の跡で，主対角線上の要素の和である．なお行列の行と列の数，或いは，ベクトルの成分の数を明記する必要がある場合には，例えば，$\boldsymbol{A}(p\times q)$ で $\boldsymbol{A}$ は p 行 q 列の行列であることを示し，$\boldsymbol{\xi}(p\times 1)$ で $\boldsymbol{\xi}$ は p 個の成分をもつベクトルであることを示す．特に $p\times p$ の単位行列は $\boldsymbol{I}_p$ と表わす．

行列 $\boldsymbol{X}$ から $\boldsymbol{Y}$ への変換のヤコービヤンを $J(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y})$ で表わす．すなわちそれぞれ同じ m 個の独立な要素 $x_1, x_2, \cdots, x_m$; $y_1, y_2, \cdots, y_m$ を持つとき

$$J(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y})=\frac{\partial(y_1, y_2, \cdots, y_m)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_m)}$$

$P(\cdots)$ 或いは $P\{\cdots\}$ は（　），｛　｝の中に書かれた関係が成立する確率を表わす．P 個の成分をもつ確率ベクトル $\boldsymbol{x}(p\times 1)$ が，平均ベクトル $\boldsymbol{\mu}(p\times 1)$，分散・共分散行列 $\boldsymbol{\Lambda}(p\times p)$ (nonsingular) をもつ正規分布に従う時，すなわち，同時確率密度

$$(3\cdot 1)\qquad (2\pi)^{-\frac{k}{2}}|\boldsymbol{\Lambda}|^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Lambda}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\right\}$$

をもつ時，$\boldsymbol{x}$ は $N(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Lambda})$ に従うという．また母集団における特性ベクトルが $N(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Lambda})$ に従う時，その母集団のことを正規母集団 $N(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Lambda})$ という表現を使う．

$\boldsymbol{S}(p\times p)$ を確率変数を要素とする正値定符号の対称行列とする．$\boldsymbol{S}$ が自由度 ν，係数行列 $\boldsymbol{\Lambda}(p\times p)$ の Wishart 分布，すなわち，$\frac{1}{2}p(p-1)$ 個の変数の同時分布が

$$(3\cdot 2)\qquad \frac{1}{\pi^{p(p-1)/4}\Pi_{i=1}{}^{p}\Gamma\left(\frac{1}{2}(\nu+1-i)\right)}|\boldsymbol{\Lambda}|^{-\frac{\nu}{2}}|\boldsymbol{S}|^{\frac{1}{2}(\nu-p-1)}\exp\left\{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{S}\right\}$$

を密度としてもつ時，$\boldsymbol{S}$ は $W_p(\boldsymbol{\Lambda},\nu)$ に従うという．

§4. 標本分布に関するもの

4・1 基本分布の導出法

Wishart 分布，重相関係数，偏相関係数，Hotelling の T^2 統計量等いはば古典的統計量の分布，更に Bartlett の分解定理の導出等の基本的なものを，統一的な方法で，解析的に体系化しようとする研究は 1950 年代に入っても続けられた．特に正規回帰論に基く Elfving の考え方は，J. Ogawa [107; 1952a, 108; 1952b, 109; 1953] C. R. Rao [Sec. 2d of 133, 1952] により non-null case に押し進められ，漸く体系化の基礎が固まってきた．T. W. Anderson の本 [8; 1958] の導出法も，改善された点もあるが，矢張りこの線に沿うものである．p 変数確率ベクトル $\boldsymbol{x}'=(x_1, x_2, \cdots, x_p)$ の同時確率要素は，条件付き分布により

$$(4\cdot 1)\qquad p(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}=p(x_1|x_2,\cdots,x_p)dx_1\cdot p(x_2|x_3,\cdots,x_p)dx_2\cdots p(x_{p-1}|x_p)dx_{p-1}p(x_p)dx_p$$

と分解して考えることが出来る．そして問題を一変数的に考え，次第に step-down して最後に unconditional すなわち p 変数としての分布を導こうとする．従ってここでは回帰論が決定的な役割りを果す．

S. N. Roy [145; 1952, 148; 1954, 152; 1957a] は別の角度から統一的導出を考えた．それは p 変数確率ベクトル $\boldsymbol{x}$ についての n 個の独立な観測 $\boldsymbol{X}(p\times n)=(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n)$，或いは，この種の行列のいくつかに対して一連の変数変換を考え，且つそれぞれの変換の Jacobian を求めて各種の標本分布を導くものである．これは Wishart 分布に基礎をおかない点が特徴であり，特に特有根の分布を導く時には有力である．4・2 でやや詳しくこの点について述べることにする．

次に Wishart 行列の分解に基礎をおく今一つの導出法を示そう．以下は Wijsman [172; 1957, 173; 1959], Kshirsagar [81; 1959] の結果である．今各列が互に独立で，p 変数正規分布 $N(\boldsymbol{O}, \boldsymbol{\Lambda})$ に従う $p\times n$ 行列を $\boldsymbol{X}$ で表わす．但し $p\leqq n$ とする．Wishart 行列を $\boldsymbol{A}_{pn}(x)$ で表わせば $\boldsymbol{A}_{pn}(x)=\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}'$ であるが，これを互に独立な正規変数，χ-変数を要素とする三角行列で表現することが基礎となっている．$\boldsymbol{X}$ の i 行を $\boldsymbol{X}_i'=(x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{in})$，$(i=1,2,\cdots,p)$ とし，$\boldsymbol{X}_i, i=1,\cdots,p$，を直交化する．すなわち

$$(4\cdot 2)\qquad \boldsymbol{Y}_i=\boldsymbol{X}_i-b_{i1}\boldsymbol{Y}_1-b_{i2}\boldsymbol{Y}_2-\cdots\cdots-b_{i,i-1}\boldsymbol{Y}_{i-1},\qquad i=1,2,\cdots,p$$

但し $b_{i\alpha}(i=2,\cdots,p;\ \alpha=1,\cdots,i-1)$ は $\boldsymbol{Y}_i'\boldsymbol{Y}_j=0,\ i\neq j,\ i,j=1,2,\cdots,p$ を充すもの，すなわち，$b_{i\alpha}=\boldsymbol{Y}_\alpha'\boldsymbol{X}_i/\boldsymbol{Y}_\alpha'\boldsymbol{Y}_\alpha$ である．今

$$(4\cdot 3)\qquad C^*_{i\alpha}=(\boldsymbol{Y}_\alpha'\boldsymbol{Y}_\alpha)^{\frac{1}{2}}b_{i\alpha},\qquad i=2,\cdots,k;\ \alpha=1,2,\cdots,i-1$$

とおけば
$$\boldsymbol{X}_i'\boldsymbol{X}_i=\boldsymbol{Y}_i'\boldsymbol{Y}_i+\sum_{\alpha=1}^{i-1}C^{*2}_{i\alpha},\qquad i=1,\cdots,p$$

$$\boldsymbol{X}_i'\boldsymbol{X}_j=\sum_{\alpha=1}^{i-1}C^*_{i\alpha}C^*_{j\alpha}+C^*_{ji}(\boldsymbol{Y}_i'\boldsymbol{Y}_i)^{\frac{1}{2}},\qquad j>i,\ i.j=1,2,\cdots,p$$

が直交性から容易に得られる．故に $\boldsymbol{A}_{pn}(x)$ の $i\times i$ の主小行列を $\boldsymbol{A}_{in}(x)$ とすれば

$$(4\cdot 4)\qquad \boldsymbol{A}_{in}(x)=\tilde{\boldsymbol{T}}_i\tilde{\boldsymbol{T}}_i'\qquad i=1,2,\cdots,p$$

$$(4\cdot 5)\qquad \tilde{\boldsymbol{T}}_i=\begin{bmatrix} (\boldsymbol{Y}_1'\boldsymbol{Y}_1)^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ C^*_{21} & (\boldsymbol{Y}_2'\boldsymbol{Y}_2)^{\frac{1}{2}} & 0 & \cdots & 0 \\ C^*_{31} & C^*_{32} & (\boldsymbol{Y}_3'\boldsymbol{Y}_3)^{\frac{1}{2}} & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ C^*_{i1} & C^*_{i2} & C^*_{i3} & \cdots & (\boldsymbol{Y}_i'\boldsymbol{Y}_i)^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$$

と表わすことができる．

まづ母集団分散行列が $\boldsymbol{\Lambda}=\boldsymbol{I}_p$ の場合を考えると，$\boldsymbol{X}$ の要素は皆独立で $N(0,1)$ に従う．この時には，$\mathcal{E}(C^*_{i\alpha})=0$，$\mathrm{Var}(C^*_{i\alpha})=1$ で，容易に

$(_*{}^*{}_*)\begin{cases} C^*_{i\alpha}, i=2,\cdots,p;\ \alpha=1,\cdots,i-1,\ \text{は皆独立で}\ N(0,1)\ \text{に従い．}\ \boldsymbol{Y}_i'\boldsymbol{Y}_i, i=1,\cdots,p\ \text{は独立} \\ \text{に，それぞれ，自由度}\ (n-i+1)\ \text{の}\ \chi^2\text{-分布に従う．これらの変数は皆互に独立である} \end{cases}$

ことがわかる．

次に $\boldsymbol{\Lambda}\neq\boldsymbol{I}_p$ の場合を考える．$\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}'=\boldsymbol{\Lambda}$ なる $p\times p$ 行列 $\boldsymbol{C}$ が存在するから，この $\boldsymbol{C}$ を使って

$$(4\cdot 6)\qquad \boldsymbol{A}_{pn}(x)=\boldsymbol{C}\tilde{\boldsymbol{T}}_p\tilde{\boldsymbol{T}}_p'\boldsymbol{C}'$$

と表わし得ることは容易に分る．但し $\tilde{\boldsymbol{T}}_k$ は前に求めたものと同じである．(4・4) 或いは (4・6) を出発点にすれば，いろいろな分布が相当楽に求まる．2, 3 例を示そう．

(a) Wilks の generalized variance. $\boldsymbol{S}$ を自由度 n の標本分散行列とする．平均の影響を除けば，$n\boldsymbol{S}=\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}'$ であるから $n\boldsymbol{S}=\boldsymbol{A}_{pn}(x)=\boldsymbol{C}\tilde{\boldsymbol{T}}_p\tilde{\boldsymbol{T}}_p'\boldsymbol{C}'$．故に generalized variance は両辺の行列式より

$$(4\cdot 7)\qquad n^p|\boldsymbol{S}|/|\boldsymbol{\Lambda}|=|\tilde{\boldsymbol{T}}_p|^2=(\boldsymbol{Y}_1'\boldsymbol{Y}_1)(\boldsymbol{Y}_2'\boldsymbol{Y}_2)\cdots\cdots(\boldsymbol{Y}_p'\boldsymbol{Y}_p)=\chi^2_n\cdot\chi^2_{n-1}\cdots\cdots\chi^2_{n-p+1}$$

すなわち独立な χ^2-変数の積となる．

(b) 標本重相関係数 R. $\bar{R}$ を p 番目の変数とはじめの $p-1$ 個の変数の間の母集団重相関係数とし，R を対応する標本量とする．定義から

$$(4\cdot 8)\qquad 1-R^2=|\boldsymbol{A}_{pn}(x)|/a_{pp}|\boldsymbol{A}_{(p-1)n}(x)|$$

勿論標本平均の影響は除いて考えている．この場合 (4・6) における $\boldsymbol{C}=(C_{ij})$ としては $C_{ii}=1$, $i=1,\cdots,p-1$，$C_{pp}=(1-\bar{R}^2)^{\frac{1}{2}}$，$C_{p1}=\bar{R}$，他の要素は 0 とすれば充分である．この理由は重相関係数 $\bar{R}$ は $(x_1,\cdots,x_{p-1})$ と x_p の間の canonical correlation そのものであることに注意すれば変数は最初から canonical variate として一般性を失わないからである．鍋谷氏 [100; 1948] の

R の分布導出もこの観点からのものである．かくして

$$\boldsymbol{CC}'=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \bar{R} \\ & \ddots & & 0 \\ & & & \vdots \\ & & 1 & 0 \\ \hline \bar{R} & 0 \cdots & 0 & 1 \end{array}\right]=\boldsymbol{A}.$$

故に (4・5) 及び (4・6) より

$$(4 \cdot 9) \qquad R^2/(1-R^2)=[\{C^*_{p1}+(\boldsymbol{Y}_1'\boldsymbol{Y}_1)^{\frac{1}{2}}\bar{R}/\sqrt{1-\bar{R}^2}\}^2+\sum_{i=1}^{P-1}C^{*2}_{pi}]/(\boldsymbol{Y}_p'\boldsymbol{Y}_p)$$

を得る．$(\boldsymbol{Y}_1'\boldsymbol{Y}_1)$ を止めた時の $R^2/(1-R^2)$ の分布は，$({}_*{}^*{}_*)$ より容易に noncentrality parameter $(\boldsymbol{Y}_1'\boldsymbol{Y}_1)\bar{R}^2/(1-\bar{R})^2)$ を持つ自由度 $(p-1,\ n-p+1)$ noncentral F の分布であることがわかる．これより R の分布はすぐ求まる．

(c) Wishart 分布と Bartlett の分解．自由度 n の標本分散行列 $\boldsymbol{S}$ に対して $\boldsymbol{S}_1=n\boldsymbol{S}$ とすれば (4・6) より

$$(4 \cdot 10) \qquad \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{C}'^{-1}=\boldsymbol{T}_p\boldsymbol{T}_p'$$

ところで $(\boldsymbol{Y}_i'\boldsymbol{Y}_i),\ i=1,\cdots,p,\ C^*_{i\alpha},\ i=2,\cdots,p;\ \alpha=1,\cdots,i-1$ の同時分布は $({}_*{}^*{}_*)$ より

$$(4 \cdot 11) \qquad K_{pn}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{p}\sum_{\alpha=1}^{i-1}C^{*2}_{i\alpha}\right\}\prod_{i=1}^{p}\left\{(\boldsymbol{Y}_i'\boldsymbol{Y}_i)^{(n-i-1)/2}\exp\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{Y}_i'\boldsymbol{Y}_i\right)\right\}.$$

なる同時密度函数を持つ．但し

$$K_{pn}{}^{-1}=2^{np/2}\pi^{p(p-1)/4}\prod_{i=1}^{p}\Gamma\left[\frac{1}{2}(n-i+1)\right]$$

(4・11) は

$$(4 \cdot 12) \qquad K_{pn}\exp\left(-\frac{1}{2}\operatorname{tr}\boldsymbol{T}_p\boldsymbol{T}_p'\right)|\boldsymbol{T}_p\boldsymbol{T}_p'|^{(n-p-1)/2}\prod_{i=1}^{p}(\boldsymbol{Y}_i'\boldsymbol{Y}_i)^{(p-i)/2}$$

$$=K_{pn}|\boldsymbol{A}|^{-n/2}\,|\boldsymbol{S}_1|^{(n-p-1)/2}\exp\left(-\frac{1}{2}\operatorname{tr}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{S}_1\right)\cdot|\boldsymbol{A}|^{(p+1)/2}\prod_{i=1}^{p}(\boldsymbol{Y}_i'\boldsymbol{Y}_i)^{(p-i)/2}$$

$\frac{1}{2}p(p+1)$ 個の変数 $(\boldsymbol{Y}_i'\boldsymbol{Y}_i),\ i=1,\cdots,p,\ C^*_{i\alpha},\ i=2,\cdots,p;\ \alpha=1,\cdots,p-1$ を (4・10) を使って $\boldsymbol{S}_1$ の独立な要素に変換すれば，その変換の Jacobian は $|\boldsymbol{A}|^{(p+1)/2}\prod_{i=1}^{p}(\boldsymbol{Y}_i'\boldsymbol{Y}_i)^{(p-i)/2}$ であるから，これより Wishart 分布

$$(4 \cdot 13) \qquad p(\boldsymbol{S}_1)=K_{pn}|\boldsymbol{A}|^{-n/2}|\boldsymbol{S}_1|^{(n-p-1)/2}\exp\left(-\frac{1}{2}\operatorname{tr}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{S}_1\right)$$

を得る．このことから逆に (4・11) が complete な Bartlett の分解を与えていることがわかる．

(d) Hotelling の T^2-分布．$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_{n+1}$ を大さ $n+1$ の標本，$\bar{\boldsymbol{x}}$ を標本平均ベクトル，$\boldsymbol{S}$ を標本分散行列 (自由度 $n\geqq p$) とする．今 $T^2/n=\boldsymbol{t}'\boldsymbol{A}_{pn}{}^{-1}(y)\boldsymbol{t},\ \boldsymbol{t}=\sqrt{n+1}(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{\mu}_0),\ \boldsymbol{A}_{pn}(y)=\boldsymbol{Y}(p\times n)\boldsymbol{Y}'(n\times p)=n\boldsymbol{S}$ の形で T^2 を表わす．T^2 は $p\times p$ の non-singular transformation に対して invariant であるから，一般性を失うことなく，母集団は $N(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{I}_p)$ と仮定される．故に $\boldsymbol{t}$ の分布は $N[\sqrt{n+1}(\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\mu}_0),\boldsymbol{I}_p]$，$\boldsymbol{Y}$ の各列の分布は $N(\boldsymbol{O},\boldsymbol{I}_p)$ で且つ $\boldsymbol{t}$ と $\boldsymbol{Y}$ は独立である．従って $\boldsymbol{A}_{pn}(y)$ は (4・6) の $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{I}_p$ の時のもの，すなわち，(4・4) の形に表わすことができる．そこで，$\boldsymbol{\Omega}(p\times p)$ を第 p 行の要素が $\omega_{pi}=t_i/\sqrt{\boldsymbol{t}'\boldsymbol{t}},\ i=1,\cdots,p$ であるような直交行列とし，この $\boldsymbol{\Omega}$ を使って

$$(4 \cdot 14) \qquad T^2/n=(\boldsymbol{\Omega t})'(\boldsymbol{\Omega A}_{pn}(y)\boldsymbol{\Omega}')^{-1}(\boldsymbol{\Omega t})=(0,\cdots,0,\sqrt{\boldsymbol{t}'\boldsymbol{t}})(\boldsymbol{\Omega A}_{pn}(y)\boldsymbol{\Omega}')^{-1}\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ \sqrt{\boldsymbol{t}'\boldsymbol{t}}\end{bmatrix}$$

$$=(\boldsymbol{t}'\boldsymbol{t})\times[(\boldsymbol{\Omega A}_{pn}(y)\boldsymbol{\Omega}')^{-1}\text{ の }(p,p)\text{ 要素}]$$

しかるに $\boldsymbol{\Omega} A_{pn}(y)\boldsymbol{\Omega}'=(\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{Y})(\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{Y})'$ であり，$\boldsymbol{Z}(p\times n)=\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{Y}$ の各列ベクトルの $\boldsymbol{\Omega}$ をとめた時の分布を考えると，互に独立な $N(\boldsymbol{0},\boldsymbol{I}_p)$ であり且つ $\boldsymbol{\Omega}$ に依存しない．従って $\boldsymbol{Z}$ の各要素は皆独立で，$N(0,1)$ に従い，且つ $\boldsymbol{t}$ と独立である．故に

$$\boldsymbol{\Omega} A_{pn}(y)\boldsymbol{\Omega}'=A_{pn}(z)=\boldsymbol{Z}\boldsymbol{Z}'=\tilde{\boldsymbol{T}}_p\tilde{\boldsymbol{T}}_p{}'$$

とすることが出来る．ここに $\tilde{\boldsymbol{T}}_p$ は (4·5) と同じ内容の三角行列である．斯くして

$$\begin{aligned}\{(\boldsymbol{\Omega} A_p(y_n)\boldsymbol{\Omega}')^{-1} \text{ の } (p,p) \text{ の要素}\}&=\{(\tilde{\boldsymbol{T}}_p\tilde{\boldsymbol{T}}'_p)^{-1} \text{ の } (p,p) \text{ 要素}\}\\&=\{\tilde{\boldsymbol{T}}_p{}'^{-1} \text{ の } (p,p) \text{ 要素}\}\times\{\tilde{\boldsymbol{T}}_p{}^{-1} \text{ の } (p,p) \text{ 要素}\}\\&=1/\chi_{n-p+1}{}^2 \qquad (\because\ ({*}{*}{*}))\end{aligned}$$

故に $(\boldsymbol{t}'\boldsymbol{t})$ が自由度 p, noncentrality parameter $(n+1)(\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\mu}_0)'(\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\mu}_0)$ を持つ non-central χ^2–分布に従うことに注意すれば，

$$\frac{T^2}{n}\,\frac{n-p+1}{p}=\frac{\chi'^2{}_p}{\chi^2{}_{n-p+1}}\,\frac{n-p+1}{p}=F'_{p,n-p+1} \tag{4·15}$$

は noncentrality parameter $(n+1)(\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\mu}_0)'(\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\mu}_0)$ をもつ自由度 $(p,\,n-p+1)$ の non-central F 分布を持つことがわかる．これより容易に T^2 の分布を得る．

T. W. Anderson の本 [8; 1958] に，A. H. Bowker からの personal communication として示されている T^2–分布の導出も，上と同じ random orthogonal transformation によるものである．

4・2 変換の Jacobian*)

各種統計量の標本分布の導出，特に特有根に関する分布の導出に著しく貢献したものに，一連の matrix transformation の Jacobian の評価についての結果がある．W. L. Deemer and I. Olkin [34; 1951] は 1947 年 P. L. Hsu が University of North Carolina で講義したものを整理し Biometrika に発表している．そこには種々の Jacobian が求められているが，特に non-linear transformation の Jacobian が重要である．Jacobian の評価にあたって次の定理は便利である．「行列変換 $\boldsymbol{Y}=F(\boldsymbol{X})$ において，微分をとったものの変換 $d\boldsymbol{Y}=dF(\boldsymbol{X})$ は線型であり，且つもとの変換の Jacobian は，この微分の変換の Jacobian に等しい」すなわち non-linear な変換を，両辺の微分を取ることにより linear になおして，Jacobian を求めればよいことになる．

[例（線型変換)]．変換 $\boldsymbol{Y}=\tilde{\boldsymbol{A}}\tilde{\boldsymbol{X}}'+\tilde{\boldsymbol{X}}\tilde{\boldsymbol{A}}'$ の Jacobian を求めてみよう．但し行列は何れも $p\times p$ 行列である．変換より $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{Y}\tilde{\boldsymbol{A}}'^{-1}=\tilde{\boldsymbol{X}}'\tilde{\boldsymbol{A}}'^{-1}+\tilde{\boldsymbol{A}}\tilde{\boldsymbol{X}}$, $\boldsymbol{U}=\tilde{\boldsymbol{A}}^{-1}\boldsymbol{Y}\tilde{\boldsymbol{A}}'^{-1}$, $\tilde{\boldsymbol{V}}=\tilde{\boldsymbol{A}}^{-1}$, $\tilde{\boldsymbol{X}}$ とおけば $\boldsymbol{U}=\tilde{\boldsymbol{V}}+\tilde{\boldsymbol{V}}'$．故に求める Jacobian は $J(\tilde{\boldsymbol{X}};\,\boldsymbol{Y})=J(\tilde{\boldsymbol{X}};\,\tilde{\boldsymbol{V}})J(\tilde{\boldsymbol{V}};\,\boldsymbol{U})J(\boldsymbol{U};\,\boldsymbol{Y})$ として得られる．$J(\tilde{\boldsymbol{X}};\,\tilde{\boldsymbol{V}})=\prod_{i=1}^{p}a_{ii}{}^{-i}$, $J(\tilde{\boldsymbol{V}};\,\boldsymbol{U})=2^p$, $J(\boldsymbol{U};\,\boldsymbol{Y})=1/J(\boldsymbol{Y};\,\boldsymbol{U})=1/|\tilde{\boldsymbol{A}}|^{-(p+1)}=\prod_{i=1}^{p}a_{ii}{}^{p+1}$ と計算されるから

$$J(\tilde{\boldsymbol{X}};\,\boldsymbol{Y})=2^p\prod_{i=1}^{p}a_{ii}{}^{p-i+1} \tag{4·16}$$

[例（非線型変換)] 変換 $\boldsymbol{Y}=\tilde{\boldsymbol{T}}\tilde{\boldsymbol{T}}'$ の $J(\tilde{\boldsymbol{T}};\,\boldsymbol{Y})$ を求めるのは容易である．行列は何れも $p\times p$ で $\boldsymbol{Y}$ は対称行列である．変換式の両辺の微分をとれば $J(\tilde{\boldsymbol{T}};\,\boldsymbol{Y})=J(d\tilde{\boldsymbol{T}};\,d\boldsymbol{Y})=2^p\prod_{i=1}^{p}t_{ii}{}^{p-i+1}$ と容易に求まる．それは $d\boldsymbol{Y}=\tilde{\boldsymbol{T}}\cdot d\tilde{\boldsymbol{T}}'+d\tilde{\boldsymbol{T}}\cdot\tilde{\boldsymbol{T}}'$ で前例の線型の場合そのままであるから．

[例（非線型変換)] $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$ を $p\times p$ の positive definite な行列とする時，変換式 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{D}_\phi\boldsymbol{T}'$, $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}'$ の Jacobian $J(\boldsymbol{T},\phi;\,\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ を求める．$\boldsymbol{D}_\phi=\mathrm{diag}\{\phi_1,\cdots,\phi_p\}$, $\phi_1>\phi_2>\cdots>\phi_p>0$ とする．$d\boldsymbol{X}=(d\boldsymbol{T})\boldsymbol{D}_\phi\boldsymbol{T}'+\boldsymbol{T}(d\boldsymbol{D}_\phi)\boldsymbol{T}'+\boldsymbol{T}\boldsymbol{D}_\phi(d\boldsymbol{T}')$, $d\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{T}(d\boldsymbol{T}')+(d\boldsymbol{T})\boldsymbol{T}'$ とすれば $J(\boldsymbol{T},\phi;\,\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})=J(d\boldsymbol{T},d\phi;\,d\boldsymbol{X},d\boldsymbol{Y})$ である．微分をとった式を変形して

$$d\boldsymbol{X}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{U}\boldsymbol{T}',\quad d\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{V}\boldsymbol{T}',\quad \boldsymbol{W}=\boldsymbol{T}^{-1}(d\boldsymbol{T})$$

---

*) 変換は 1:1 であることは仮定しておく．従ってそこに現はれるすべての微分は存在しているものとされる．

とおけば, $U=WD_\phi+D_\phi W'+dD_\phi$, $V=W+W'$ なる関係式を得て, 従って, 求める Jacobian は

$$J(dT, d\phi;\ dX, dY)=J(dT, d\phi;\ W, d\phi)J(W, d\phi;\ U, V)J(U, V;\ dX, dY)$$

として計算される. ところで $J(dT, d\phi;\ W, d\phi)=J(dT;\ W)=|T|^{-p}$, $J(U, V;\ dX, dY)=J(U;\ dX)J(V;\ dY)=|T|^{2(p+1)}$ と容易に求まり, 残りの $J(W, d\phi;\ U, V)$ は各要素についてみれば,

$$u_{ii}=2\phi_i w_{ii}+d\phi_i,\ u_{ij}=w_{ij}\phi_j+w_{ji}\phi_i,\ v_{ii}=2w_{ii},\ v_{ij}=w_{ij}+w_{ji}$$

であるから, 微分係数の作る行列式の中は下に示すようになり,

	$d\phi_i$ $(i=1,\cdots,p)$	w_{ij} $(i=1,\cdots,p)$	w_{ij} $(j<i)$	w_{ij} $(i<j)$
$u_{ii}(i=1,\cdots,p)$	I_p	L	0	0
$v_{ii}(i=1,\cdots,p)$	0	$2I_p$	0	0
$u_{ij}(i<j)$	0	0	P	Q
$v_{ij}(i<j)$	0	0	$I_{p(p-1)/2}$	$I_{p(p-1)/2}$

$J(W, d\phi;\ U, V)=2^p|P-Q|$ となる. ここに P, Q は共に対角行列で

$$P=\mathrm{diag}\{\overbrace{\phi_1, \phi_1, \cdots, \phi_1}^{(p-1)};\ \overbrace{\phi_2, \cdots, \phi_2}^{(p-2)};\cdots\cdots;\ \phi_{p-2}, \phi_{p-2};\ \phi_{p-1}\}$$
$$Q=\mathrm{diag}\{\phi_2, \phi_3, \cdots, \phi_p;\ \phi_3, \cdots, \phi_p;\cdots\cdots;\ \phi_{p-1}, \phi_p;\ \phi_p\}$$

故に $J(W, d\phi;\ U, V)=2^p|P-Q|=2^p\prod_{i<j}^{p}(\phi_i-\phi_j)$ となる. 以上をまとめて

$$J(T, \phi;\ X, Y)=2^p|T|^{p+2}\prod_{i<j}^{p}(\phi_i-\phi_j) \tag{4・17}$$

を得る.

このような方法で各種の変換の Jacobian が [34; 1951] にまとめられている. 変換式

$$X=TD_\phi T',\quad Y=TT'$$

及びこれの Jacobian (4・17) は, 独立な二つの正規標本における積和行列 $S^*(p\times p)$, $S(p\times \mathrm{p})$ の特有根 $C(S^*S^{-1})$ の分布を求める時, 若し S^*, S が共に Wishart 分布に従うならば便利なものである. しかし分散分析の時に見られるように, S は Wishart 分布をもつが, S^* の自由度が p より小さく Wishart 分布をもたない時には利用出来ない. [34; 1951] にまとめられているものの中には, このような事情の時に応ずるものが見あたらない. 4・1 節でも触れたが, この時にも attack できる方法として, Olkin と Roy は正規変数行列 $X(p\times n)$*) に関する種々の変換を考え, それらの Jacobian を求めている [145; 1952, 148; 1954, 152; 1957]. 例えば, $X_1(p\times n_1)$, $(p>n_1)$ を最後の n_1 行が non-singular な正方行列をつくる rank n_1 の行列 $X_2(p\times n_2)(p\leqq n_2)$ を rank p の行列とすれば, 次の変換が存在する.

$$\left\{\begin{aligned} X_1(p\times n_1)&=\begin{array}{c} p-n_1 \\ n_1 \end{array}\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}_{n_1} D_{\sqrt{\theta}}(n_1\times n_1)L_1(n_1\times n_1) \\ X_2(p\times n_2)&=\begin{array}{c} p-n_1 \\ n_1 \end{array}\begin{bmatrix} U_1 & \tilde{U}_3 \\ U_2 & U_4 \end{bmatrix}_{\substack{n_1\ \ p-n_1}} L_2(p\times n_2) \end{aligned}\right. \tag{4・18}$$

ここに L_1 は直交行列, $L_2L_2'=I_p$, $\theta'=(\theta_1, \cdots, \theta_{n_1})$ は $C[(X_1X_1')\cdot(X_2X_2')^{-1}]$ の零でない n_1 個のもの($(p-n_1)$個は 0 である). $U=\begin{bmatrix} U_1 & \tilde{U}_3 \\ U_2 & U_4 \end{bmatrix}$ は non-singular で, 且つ U_1 の第 1 行, $\tilde{U}_3$ の対角要素は正である. $\theta_i(i=1, \cdots, n_1)$ が皆異っている場合上の変換は 1 対 1 である. そしてこの変換

*) $X(p\times n)=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ で x_i は互に独立で $N(\mu, \Lambda)$ に従うものである.

の Jacobian は $\theta_1>\theta_2>\cdots\cdots>\theta_{n_1}>0$ として

$$(4\cdot19)\qquad J(\theta, \boldsymbol{U}, \boldsymbol{L}_{1I}, \boldsymbol{L}_{2I};\ \boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2)=2^p|\boldsymbol{U}|^{n_1+n_2-p}\prod_{i=1}^{n_1}\theta_i^{(p-n_1-1)/2}\prod_{i<j}^{n_1}(\theta_i-\theta_j)\cdot \cdot\prod_{i=1}^{p-n_1}u_{3ii}^{p-n_1-i}\cdot\psi(\boldsymbol{L}_1, \boldsymbol{I}_2)$$

なる形に得られる．ここに $\psi(\boldsymbol{L}_1, \boldsymbol{L}_2)$ は $\boldsymbol{L}_1, \boldsymbol{L}_2$ の要素だけの函数で $\boldsymbol{U}, \theta_i$ には依存しない．

$\boldsymbol{S}^*, \boldsymbol{S}$ は何れも $p\times p$ 行列，自由度をそれぞれ n_1, n_2 とする．$n_1<p,\ n_2>p$ のとき $\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{X}_1'=\boldsymbol{S}^*$, $\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{X}_2'=\boldsymbol{S}$ ($\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2$ は変換式で使ったもの) で，$\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2$ の同時分布は多変数分散分析の時を考えると

$$(2\pi)^{-p(n_1+n_2)/2}|\boldsymbol{\Lambda}|^{-(n_1+n_2)/2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\operatorname{tr}\boldsymbol{\Lambda}^{-1}[\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{X}_2'+(\boldsymbol{X}_1-\boldsymbol{M})(\boldsymbol{X}_1-\boldsymbol{M})']\right\}$$

$\boldsymbol{M}$ は平均行列 $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}, \cdots, \boldsymbol{\mu})$ である．故に null-hypothesis $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{0}$ の時には，上に述べた変換で容易に $\theta_i, i=1, \cdots, n_1$ の同時分布

$$(4\cdot20)\qquad \pi^{n_1/2}\left[\frac{\left[\prod_{i=1}^{p}\Gamma\left(\frac{n_1+n_2+1-i}{2}\right)\right]\prod_{i=1}^{p-n_1}\Gamma\left(\frac{p-n_1+1-i}{2}\right)}{\prod_{i=1}^{p}\Gamma\left(\frac{n_2+1-i}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p+1-i}{2}\right)\prod_{i=1}^{n_1}\Gamma\left(\frac{n_1+1-i}{2}\right)}\right]\cdot\frac{\prod_{i=1}^{n_1}\theta_i^{(p-n_1-1)/2}}{(1+\theta_i)^{(n_1+p_2)/2}}\cdot\prod_{i<j}^{n_1}(\theta_i-\theta_j)$$

を得る．

今 degenerate case, すなわち，Wishart 分布が利用できない場合の例について述べたが，non-degenerate case に対しても，正規変数行列の変換及びその Jacobian が求められ，特有根に関する分布を Wishart 分布に基礎をおかず，もとの変数の正規分布から系統的に導びかれている．

4・3 漸 近 分 布

多変数解析において，対象とする統計量の標本分布は，たとえ母集団分布が正規型であっても，exact な形に求め得ない場合が非常に多い．例えば多変数分散分析における Wilks の Λ-統計量は，低い次元，比較すべき処理の個数が少ない場合にのみ exact な分布が知られているにすぎない（但し moment はわかっている）．また non-null case の時には，ほんの僅かしか知られていない．そこで多変数解析においては，大標本の時のもの，すなわち，極限分布或いは漸近分布の研究が重要なのである．特有限に関する仮設検定等にあっては，§2 でも触れたが，non-null case の exact な分布は極めて複雑で殆んど実用にならず，大標本の時しか取扱い得ないのが現状である．しかし極限分布でも，標本の大さを可成り大きくとらなければ十分な近似が得られない場合が多く，そのため求める分布函数或いは密度函数を漸近展開の形で得ることが大切となる．特有根に関するものは §7 にまとめることにし，尤度比検定基準の分布に関するもの，Wishart 行列を含むある種の統計量の分布等についてその梗概を述べることにする．

一般に仮設検定の時尤度比を λ とすれば，適当な正則条件の下で，$-2\log\lambda$ は，null hypothesis の下では χ^2-分布に，non-null hypothesis の下では non-central χ^2-分布に asymptotically に従うことはよく知られている．しかしこれが有効なためには，可成り大きな標本を要求するため，もっと精密な近似が必要となる．多変数解析の場合，Wilks の仕事 [174; 1932] 以来，尤度比検定基準の moment が gamma function のある種の函数で得られることに着目して，G. E. P. Box [27; 1949] は次の結果を得た．

統計量 $W(0\leq W\leq1)$ の h 次の moment が

$$(4\cdot21)\qquad \mathcal{E}W^h=K\left[\frac{\prod_{j=1}^{b}y_j^{y_j}}{\prod_{i=1}^{a}x_i^{x_i}}\right]^h\frac{\prod_{i=1}^{a}\Gamma\{x_i(1+h)+\xi_i\}}{\prod_{j=1}^{b}\Gamma\{y_j(1+h)+\eta_j\}}\qquad h=0, 1, 2, \cdots\cdots$$

であるとする．但し K は$W^0=1$ となる定数で且つ $\sum_{i=1}^{a}x_i=\sum_{j=1}^{b}y_j$ である． $M=-2\log W$ とおけば，$0<\rho\leq 1$ なる ρ にたいして（適当な条件の下で）

$$(4\cdot22)\qquad P\{\rho M\leqq\rho M_0\}=P\{\chi_\nu^2\leqq\rho M_0\}+\omega_1[P\{\chi^2_{\nu+2}\leqq\rho M_0\}-P\{\chi^2_\nu\leqq\rho M_0\}]$$
$$+[\omega_2(P\{\chi^2_{\nu+4}\leqq\rho M_0\}-P\{\chi_\nu^2\leqq\rho M_0\})$$
$$+\frac{\omega_1^2}{2}(P\{\chi^2_{\nu+4}\leqq\rho M_0\}-2P\{\chi^2_{\nu+2}\leqq\rho M_0\}+P\{\chi_\nu^2\leqq\rho M_0\})+]\cdots\cdots$$

なる近似公式が得られる．但しここに

$$\nu=-2\left\{\sum_{i=1}^{a}\xi_i-\sum_{j=1}^{b}\eta_j-\frac{1}{2}(a-b)\right\},$$
$$\omega_r=\frac{(-1)^{r+1}}{r(r+1)}\left[\sum_{i=1}^{a}\frac{B_{r+1}(u_i)}{(\rho x_i)^r}-\sum_{j=1}^{b}\frac{B_{r+1}(v_j)}{(\rho y_j)^r}\right]$$

$B_r(u)$ は Bernoulli の多項式 $\left(B_0(u)=1,\ B_1(u)=u-\frac{1}{2},\ B_2(u)=u^2-u+\frac{1}{6},\ \cdots\cdots\right)$ で，

$$u_i=(1-\rho)x_i+\xi_i,\quad v_j=(1-\rho)y_j+\eta_j$$

である．χ_ν^2 は自由度 ν の χ^2–分布に従う確率変数である．ρ のきめ方は多くの場合 $\omega_1=0$ を充たすようになされる．この場合，(4·22) の第一項だけ用いても，応用上は，標本の大さがかなり小さい時にも，相当いい近似が得られる．

$\boldsymbol{x}_\alpha(p\times1)$, $\alpha=1,\cdots,n$ を $N(\boldsymbol{\beta Z}_\alpha,\boldsymbol{\Lambda})$ からの大いさ n の random sample とする．$\boldsymbol{\beta}(p\times q)=[\boldsymbol{\beta}_1(p\times q_1),\ \boldsymbol{\beta}_2(p\times q_2)]$, $\boldsymbol{Z}'_\alpha(1\times q)=(\boldsymbol{Z}'_{1\alpha}(1\times q_1),\ \boldsymbol{Z}'_{2\alpha}(1\times q_2))$, $q_2=q-q_1$ とする時，H_0: $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\beta}_{10}$ の尤度比検定基準は，$n\hat{\boldsymbol{\Lambda}}_\Omega\equiv\boldsymbol{A}=\sum_{\alpha}^{n}(\boldsymbol{x}_\alpha-\hat{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{Z}_\alpha)(\boldsymbol{x}_\alpha-\hat{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{Z}_\alpha)'$, $\hat{\boldsymbol{\beta}}=(\sum_\alpha\boldsymbol{x}_\alpha\boldsymbol{Z}_\alpha')(\sum_\alpha\boldsymbol{Z}_\alpha\boldsymbol{Z}_\alpha')^{-1}$, 及び $n\hat{\boldsymbol{\Lambda}}_\omega\equiv\boldsymbol{A}+\boldsymbol{T}=\boldsymbol{A}+(\hat{\boldsymbol{\beta}}_1-\boldsymbol{\beta}_{10})\boldsymbol{Q}_{11.2}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_1-\boldsymbol{\beta}_{10})'$, $\boldsymbol{Q}_{11.2}=[(\sum_\alpha\boldsymbol{Z}_{1\alpha}\boldsymbol{Z}_{1\alpha}')-(\sum_\alpha\boldsymbol{Z}_{1\alpha}\boldsymbol{Z}_{2\alpha}')(\sum_\alpha\boldsymbol{Z}_{2\alpha}\boldsymbol{Z}_{2\alpha}')^{-1}(\sum_\alpha\boldsymbol{Z}_{2\alpha}\boldsymbol{Z}_{1\alpha}')]$ として $\lambda=|\hat{\boldsymbol{\Lambda}}_\Omega|^{n/2}/|\hat{\boldsymbol{\Lambda}}_\omega|^{n/2}=|\boldsymbol{A}|^{n/2}/|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{T}|^{n/2}$ である．既に知られている如く，λ の moment は $(n\geq p+q)$ H_0 の下で

$$(4\cdot23)\qquad \mathcal{E}\lambda^h=K\prod_{i=1}^{p}\Gamma\left\{\frac{1}{2}(n-q+i+nh)\right\}\Big/\prod_{j=1}^{p}\Gamma\left\{\frac{1}{2}(n-q_2+1-j+nh)\right\}$$

であるが，これは (4·21) の形である．すなわち $a=b=p$, $x_i=y_j=\frac{1}{2}n$, $\xi_i=\frac{1}{2}(-q+1-i)$, $\eta_j=\frac{1}{2}(-q_2+1-j)$ となっている．$2\omega_1=(pq_1)/(\rho n)\left[n\rho-\left\{n-q-\frac{1}{2}(p-q_1+1)\right\}\right]$ と求まり，$\omega_1=0$ とするには $\rho=\frac{1}{n}\left\{n-q-\frac{1}{2}(p-q_1+1)\right\}$ である．故に (4·22) の第一項を使用すれば

$$(4\cdot24)\qquad -\left\{n-q-\frac{1}{2}(p-q_1+1)\right\}\log\frac{|\boldsymbol{A}|}{|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{T}|}$$

が近似的に自由度 $\nu=pq_1$ の χ^2–分布に従うとされる．この時の誤差の order は n^{-2} である．ω_2 を計算して整理すれば，更に精密な近似が得られること勿論であるが，既に第一項だけでも可成り小さい n で相当によい近似を与えており，実用のためには十分である．(4·24) の $|\boldsymbol{A}|/|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{T}|$ は実は Wilks の Λ–統計量で，$\boldsymbol{A}$ は自由度 n-q で Wishart 分布をもち，$\boldsymbol{T}$ は自由度 q_1 をもっている．多変数分散分析における検定に屢々使われる．

$N[\boldsymbol{\mu}(p\times1),\ \boldsymbol{\Lambda}(p\times p)]$ に従う random vector $\boldsymbol{X}(p\times1)$ の分割 $\boldsymbol{X}'=[\boldsymbol{X}_1'(1\times p_1),\cdots,\boldsymbol{X}_k'(1\times p_k)]$, $p_1+p_2+\cdots+p_k=p$ における成分変数の組の独立性，すなわち，仮設 H_0: $\boldsymbol{\Lambda}_{ij}(p_i\times p_j)=\boldsymbol{0}$, $i\neq j$ の尤度比検定を考える．$\boldsymbol{\Lambda}_{ij}$ は $\boldsymbol{X}$ の分割に対応する Λ の submatrix である．$\boldsymbol{x}_i$, $i=1,\cdots,n$ を標本，$\boldsymbol{A}=\sum_{\alpha=1}^{n}(\boldsymbol{x}_\alpha-\bar{\boldsymbol{x}})(\boldsymbol{x}_\alpha-\bar{\boldsymbol{x}})'$, $\boldsymbol{A}$ の $\boldsymbol{\Lambda}$ と同じ分割における submatrix を $\boldsymbol{A}_{ij}$, $i,j=1,\cdots,k$ とす

れば，H_0 の尤度比検定基準は $\lambda=|\boldsymbol{A}|^{n/2}\Big/\prod_{i=1}^{k}|\boldsymbol{A}_{ii}|^{n/2}$ となり [8; 1958]，且つその h 次の moment は

$$(4\cdot25)\qquad \mathcal{E}\lambda^h=K\prod_{i=1}^{p}\Gamma[\{n(1+h)-i\}/2]\Big/\prod_{i=1}^{k}\prod_{j=1}^{p}\Gamma[\{n(1+h)-j\}/2]$$

となる．(4·21) に対応させるには，$a=b=p$, $x_i=y_j=\dfrac{n}{2}$, $\xi_i=-\dfrac{i}{2}$, $\eta_j=\dfrac{1}{2}$, $(p_1+\cdots+p_{i-1}-j)$; $j=p_1+\cdots+p_{i-1}+1,\cdots,p_1+\cdots+p_i$; $i=1,\cdots,k$ とおけばよい．$\omega_1=0$ を充す ρ は

$$n\rho=n-\frac{3}{2}-\frac{p^3-\sum p_i^3}{3(p^2-\sum_i p_i^2)}$$

となり，再び (4·22) の第一項を使って

$$(4\cdot26)\qquad -\left\{n-\frac{3}{2}-\frac{p^3-\sum_i p_i^3}{3(p^2-\sum p_i^2)}\right\}\log|\boldsymbol{A}|\Big/\prod_{i=1}^{k}|\boldsymbol{A}_{ii}|$$

が近似的に $\nu=\dfrac{1}{2}(p^2-\sum_i p_i^2)$ の χ^2–分布である．特別の場合として，$p_i=1$ なら

$$(4\cdot27)\qquad -\left\{(n-1)-\frac{1}{6}(2p+5)\right\}\log|\boldsymbol{R}|,\qquad |\boldsymbol{R}|=\text{相関行列}$$

が近似的に自由度 $\dfrac{1}{2}p(p-1)$ の χ^2–分布する．また $k=2$ の時 $(p=p_1+p_2)$

$$(4\cdot28)\qquad -\left\{(n-1)-\frac{1}{2}(p+1)\right\}\log\frac{|\boldsymbol{A}|}{|\boldsymbol{A}_{11}||\boldsymbol{A}_{22}|}$$

が自由度 p_1p_2 の χ^2–分布で近似される．

ここにあげた例の他にいくつか結果が得られているが [27; 1949, 8; 1958]，個別的には Bartlett [11; 1938, 14; 1947b, 15; 1950, 17; 1951b, 18; 1951c] が，古くからこの線に沿った結果を得ており，且つ χ^2–近似のための multiplying factor を [19; 1954] にまとめている．Bartlett は，更に χ^2 の分解を考え，それの χ^2 近似に言及しているが，特有根の分布に関係するので，§7 で再び触れることにする．

$\boldsymbol{S}_\nu(p\times p)$ を自由度 ν の $W_p\left(\dfrac{1}{\nu}\boldsymbol{\Lambda},\nu\right)$ に従う Wishart 行列で，$\operatorname*{Plim}_{\nu\to\infty}\boldsymbol{S}_\nu=\boldsymbol{\Lambda}$ とする．別に $\boldsymbol{H}$ を $\boldsymbol{S}_\nu$ とは独立な確率行列とし，$\boldsymbol{S}_\nu$ と $\boldsymbol{H}$ の函数である統計量 $T(\boldsymbol{H},\boldsymbol{S}_\nu)$ を考える．今 $T(\boldsymbol{H},\boldsymbol{S}_\nu)$ の分布は未知であるが，$\boldsymbol{S}_\nu$ を $\boldsymbol{\Lambda}$ でおきかえた $T(\boldsymbol{H},\boldsymbol{\Lambda})$ の分布は知られており，これを足場に $T(\boldsymbol{H},\boldsymbol{S}_\nu)$ の漸近分布を $1/\nu$ についての展開の形で求めることを問題としよう．$T(\boldsymbol{H},\boldsymbol{S}_\nu)$, $T(\boldsymbol{H},\boldsymbol{\Lambda})$ は連続な密度函数を持ち，且つ，十分大きい ν に対して，$P\{T(\boldsymbol{H},\boldsymbol{S}_\nu)\leqq t(\nu)\}$ は，$\boldsymbol{\Lambda}$ のまわりで Taylor 展開が可能であると仮定される．$\boldsymbol{\Lambda}=||\lambda_{ij}||$, $\boldsymbol{\partial}(p\times p)=||1/2(1+\delta_{ij})\partial/\partial\lambda_{ij}||$, δ_{ij} はクロネッカーの δ とすれば，

$$\begin{aligned}(4\cdot29)\qquad P\{T(\boldsymbol{H},\boldsymbol{S}_\nu)\leqq t(\nu)\}&=\int P\{T(\boldsymbol{H},\boldsymbol{S}_\nu)\leqq t(\nu)|\boldsymbol{S}_\nu\}dW_\nu\left(\frac{1}{\nu}\boldsymbol{\Lambda},\nu\right)\\&=\int\exp\{\mathrm{tr}(\boldsymbol{S}_\nu-\boldsymbol{\Lambda})\boldsymbol{\partial}\}P\{T(\boldsymbol{H},\boldsymbol{\Lambda})\leqq t(\nu)\}dW_\nu\left(\frac{1}{\nu}\boldsymbol{\Lambda},\nu\right)\\&=\exp\{-\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\partial}\}\cdot\left|\boldsymbol{I}_p-\frac{2}{\nu}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\partial}\right|^{-\nu/2}P\{T(\boldsymbol{H},\boldsymbol{\Lambda})\leqq t(\nu)\}\\&=\exp\left\{-\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\partial}-\frac{\nu}{2}\log\left|\boldsymbol{I}_p-\frac{2}{\nu}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\partial}\right|\right\}P\{T\boldsymbol{H},\boldsymbol{\Lambda}\leqq t(\nu)\}\end{aligned}$$

(i) $t(\nu)\equiv t_0$ (定数) か或いは，(ii) $t(\nu)=t_0+t_1(\nu)+t_2(\nu)+\cdots\cdots$ (t_0 は定数．$t_i(\nu)=0(1/\nu_i)$, $i=1,2,\cdots$ で，$\boldsymbol{S}_\nu$ の要素に関係してもよい) の展開を持つ場合を考えると

$$P\{T(\boldsymbol{H},\boldsymbol{S}_\nu)\leqq t(\nu)\}=\Big[1+\Big\{\frac{1}{\nu}\sum_{rstu}\lambda_{ur}\lambda_{st}\partial_{rs}\partial_{tu}+t_1(\nu)D\Big\}
+\frac{4}{3}\frac{1}{\nu^2}\sum_{rstuvw}\lambda_{wr}\lambda_{st}\lambda_{uv}\partial_{rs}\partial_{tu}\partial_{vw}+\frac{1}{2}\frac{1}{\nu^2}\sum_{rstuvwxy}\lambda_{ur}\lambda_{st}\lambda_{yv}\lambda_{wx}\partial_{rs}\partial_{tu}\partial_{vw}\partial_{xy}
+t_2(\nu)D+\frac{1}{2}t_1^2(\nu)D+\frac{1}{\nu}\sum_{rstu}\lambda_{ur}\lambda_{st}(t_1^{(rs.tu)}(\nu)D+2t_1^{(rs)}(\nu)\partial_{tu}D+t_1(\nu)\partial_{rs}\partial_{tu}D)
+O(\nu^{-3})\Big]\cdot P\{T(\boldsymbol{H},\boldsymbol{\Lambda})\leqq t_0\} \tag{4·30}$$

を得る．但し $D\equiv\partial/\partial t_0$, $t_1^{(rs)}(\nu)=1/2(1+\delta_{rs})\partial t_1(\nu)/\partial\lambda_{rs}$ 等で，此等の微分可能性は仮定される．(i) の場合には，上式で $t_i(\nu)\equiv 0$, $t_1^{(rs)}(\nu)\equiv 0,\cdots$とすればよい．上の各項に含まれる微係数を評価すれば，一応 ν^{-2} の項までの漸近展開が得られる．しかし計算は至って複雑で，多くの場合 ν^{-3} の項まで求めることは困難であり，且つ上の形式的展開の誤差に対する理論的限界を評価することがむづかしい．従って得た結果は，一変数の時の既存の結果と比較するとか，何らかの数値的チェックが必要である．上に述べた方法で，G. S. James [76; 1954] は，分散行列が一定でない場合の多変数線型仮設の検定の問題，及び，多変数の場合の Behrens-Fisher の問題を論じている．筆者 [160; 1956a, 161; 1956b] 及び伊藤氏 [70; 1956] はHotelling の T_0^2-統計量についてその漸近分布に関する結果を得た．更に筆者はこの方法を統計量が 2 つの場合 $P\{T_1(\boldsymbol{H}_1,\boldsymbol{S}_\nu)\leqq t_1(\nu)$, $T_2(\boldsymbol{H}_2,\boldsymbol{S}_\nu)\leqq t_2(\nu)\}$ に対して拡張し，一般化された距離の最大 (小) 値の分布の近似を求めるのに使い，幾つかの同時信頼区間設定に貢献した [163; 1959a, 164; 1959b, 166; 1960b].

母集団が正規以外の時に，steepest decent の方法で，問題とする統計量の saddlepoint approximate distribution を求めることが多変数の場合にも行われてよいと思うが現在の所未だ見かけられない．

4・4 分散分析における Hotelling の T_0^2-統計量

簡単のため，先づ p 変数の場合の乱塊法を例にとる．基礎のパラメトリックな線型モデルを

$$\boldsymbol{x}_{ij}=\boldsymbol{\mu}+\boldsymbol{\tau}_i+\boldsymbol{\beta}_j+\boldsymbol{\varepsilon}_{ij},\qquad i=1,\cdots,r;\ j=1,\cdots,s$$

但し $\sum_{i=1}^r\boldsymbol{\tau}_i=\sum_{j=1}^s\boldsymbol{\beta}_j=0$. とする．$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}$ は独立に $N(\boldsymbol{0},\boldsymbol{\Lambda})$ に従う．

$$\sum_{i=1}^r\sum_{j=1}^s(\boldsymbol{x}_{ij}-\boldsymbol{x}_{\cdot\cdot})(\boldsymbol{x}_{ij}-\boldsymbol{x}_{\cdot\cdot})'=s\sum_{i=1}^r(\boldsymbol{x}_{i\cdot}-\boldsymbol{x}_{\cdot\cdot})(\boldsymbol{x}_{i\cdot}-\boldsymbol{x}_{\cdot\cdot})'+r\sum_{j=1}^s(\boldsymbol{x}_{\cdot j}-\boldsymbol{x}_{\cdot\cdot})(\boldsymbol{x}_{\cdot j}-\boldsymbol{x}_{\cdot\cdot})'
+\sum_{i=1}^r\sum_{j=1}^s(\boldsymbol{x}_{ij}-\boldsymbol{x}_{i\cdot}-\boldsymbol{x}_{\cdot j}+\boldsymbol{x}_{\cdot\cdot})(\boldsymbol{x}_{ij}-\boldsymbol{x}_{i\cdot}-\boldsymbol{x}_{\cdot j}+\boldsymbol{x}_{\cdot\cdot})'
=\boldsymbol{T}+\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}$$

$\boldsymbol{E}/(r-1)(s-1)$ は $\boldsymbol{\tau}_i,\boldsymbol{\beta}_j$ の如何にかかわらず，$\boldsymbol{\Lambda}$ の不偏推定行列で，$\boldsymbol{E}$ は $W_p(\boldsymbol{\Lambda},(r-1)(s-1))$ に従ういわゆる誤差による積和行列である．今処理効果 $\boldsymbol{\tau}_i, i=1,\cdots,r$ があるかどうかを考えた場合，用いられる test statistic としては，(i) Wilks の Λ-統計量，$\Lambda=|\boldsymbol{E}|/|\boldsymbol{T}+\boldsymbol{E}|$，次節で触れる (ii) Roy の最大根統計量 $C_{\max}(\boldsymbol{T}\boldsymbol{E}^{-1})$，及び (iii) Hotelling の T_0^2-統計量，$T_0^2=(r-1)\cdot(s-1)\operatorname{tr}\boldsymbol{T}\boldsymbol{E}^{-1}$ が代表的である．本節では特に T_0^2-統計量について述べるが，その前に一般的な形で書いておく．$\boldsymbol{S}_0$ を誤差による積和行列で自由度 n_0 をもち，$\boldsymbol{S}^*$ で仮設に基く積和行列を表わし，その自由度を m とすると，T_0^2 は

$$T_0^2=n_0\operatorname{tr}(\boldsymbol{S}^*\boldsymbol{S}_0^{-1}) \tag{4·31}$$

である．$\boldsymbol{S}_0$ は $W_p(\boldsymbol{\Lambda},n_0)$ に従い，$\boldsymbol{S}^*$ は $\sum_{\alpha=1}^m\boldsymbol{y}_\alpha\boldsymbol{y}_\alpha'$ *) と同等である．但し $\boldsymbol{y}_\alpha(p\times 1)$ は，H_0 の下で，$N(\boldsymbol{0},\boldsymbol{\Lambda})$ に従う確率ベクトルである (対立仮設の下では平均は $\boldsymbol{0}$ でない)．この時 T_0^2 は次の

---

*) $m\geqq p$ の時には勿論 $\boldsymbol{S}^*$ は $W_p(\boldsymbol{\Lambda},m)$ に従う．

ように表わすことができる.

$$(4\cdot 32)\qquad T_0^2=n_0\,\mathrm{tr}\{(\sum_{\alpha=1}^{m}\boldsymbol{y}_\alpha\boldsymbol{y}_\alpha')\boldsymbol{S}_0^{-1}\}=n_0\sum_{\alpha=1}^{m}\mathrm{tr}\{(\boldsymbol{y}_\alpha\boldsymbol{y}_\alpha')\boldsymbol{S}_0^{-1}\}=n_0\sum_{\alpha=1}^{m}\boldsymbol{y}_\alpha'\boldsymbol{S}_0^{-1}\boldsymbol{y}_\alpha=\sum_{\alpha=1}^{m}T_\alpha^2$$

T_α^2 は普通の Hotelling の T^2-統計量で，従って，T_0^2 は $\boldsymbol{S}_0$ を共有する T_α^2 の和であることが知れる．一方 $C(\boldsymbol{S}^*\boldsymbol{S}_0^{-1})$ を $\theta_i, i=1, \cdots, s$, $\mathrm{s}=\min(m, p)$ とすれば

$$(4\cdot 33)\qquad T_0^2=n_0\sum_{i=1}^{s}\theta_i=n_0\times(\text{Lawley の統計量})$$

となる．§2にもふれたが，Hotelling は第2次世界大戦中爆弾照準機の空中テストによる品質管理に T_0^2 統計量を用い，それを [62; 1947] にまとめたが理論的結果は [63; 1951] に発表された．これは $p=2$, $m\geq 2$, $n_0>2$*) の時，(4･33) から出発して H_0 の下での T_0^2 の exact な分布を求めたもので，結果は $\omega=t_0^2/(2n_0+t_0^2)$ として

$$(4\cdot 34)\qquad P\{T_0^2>t_0^2\}=1-I_w(m-1, n_0)$$
$$+\sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left\{\frac{1}{2}(m+n_0-1)\right\}}{\Gamma\left\{\frac{1}{2}m\right\}\Gamma\left\{\frac{1}{2}n_0\right\}}\left(\frac{1-w}{1+w}\right)^{(n_0-1)/2}I_{w^2}\left(\frac{1}{2}(m-1), \frac{1}{2}(n_0-1)\right)$$

$m=1\sim 50$, $n_0=3\sim 50$ に対して Grubbs が 1%，5% 点の表を作成している．$p>2$ の場合には exact な分布を求めることが非常に複雑でありこのため種々の近似が考えられている．筆者 [160; 1956a, 161; 1956b] 及び伊藤氏 [70; 1956] は (4･32) なる形から出発して，全く独立に，次のパーセント点を求める漸近公式を得た．すなわち $P(T_0^2>t_0^2(\alpha))=\alpha$ を充す $t_0^2(\alpha)$ に対するものである．$\chi^2_{mp}(\alpha)\equiv\chi^2$ を自由度 mp の α 点，$\chi_{2s}=\chi^{2s}/mp(mp-2)\cdots\cdots(mp+2s-2)$ として

$$(4\cdot 35)\qquad t_0^2(\alpha)=\chi^2+\frac{m}{2n_0}\{p(p+1)(\chi_4+\chi_2)+mp(\chi_4-\chi_2)\}$$
$$+\frac{m}{n_0^2}\left\{\frac{m}{16}\left(1-\frac{mp-2}{\chi^2}\right)(p(p+1)(\chi_4+\chi_2)+mp(\chi_4-\chi_2))^2\right.$$
$$-\frac{m}{8}(p(p+1)(\chi_4+\chi_2)+mp(\chi_4-\chi_2))(p(p+1)(\chi_4-1)+mp(\chi_4-2\chi_2+1))$$
$$-\frac{1}{3}(p(p^2+3p+4)(\chi_6+\chi_4+\chi_2)+3mp(p+1)(\chi_6-\chi_2)+m^2p(\chi_6-2\chi_4+\chi_2))$$
$$+\frac{1}{16}(4p(2p^2+5p+5)(\chi_8+\chi_6+\chi_4+\chi_2)+16mp(p+1)(\chi_8-\chi_2)$$
$$+mp(p^3+2p^2+5p+4)(\chi_8+\chi_6-\chi_4-\chi_2)+2m^2p(p^2+p+4)(\chi_8-\chi_6-\chi_4+\chi_2)$$
$$\left.+m^3p^2(\chi_8-3\chi_6+3\chi_4-\chi_2))\right\}+O(n_0^{-3})$$

これは $\boldsymbol{S}^*$ の分布が Wishart であることを要求しないで導かれた．伊藤氏は更に分布函数の漸近展開も与えている．その他のものは，$\theta_i, i=1, \cdots, s$ の同時分布から出発し，(4･33) の形の分布を問題にする．Pillai and Samson [123; 1959] は，$s=4$ までの s に対して4次までのモーメントを求め，Pearson curves のパーセント点の表 [116; 1951] を利用して，T_0^2/n_0 の 5,1% 点の表を作っている．更に Pillai and Mijares [125; 1959] は同じことを $s=6$ の時にやっている．

さて T_0^2-検定の power function であるが，これは極めて複雑であり，筆者は (4･35) を求めたのと同様の方法で僅かに n_0^{-1} の項までを得た [162; 1957].**) $T_0^2=n_0\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{S}^*\boldsymbol{S}_0^{-1}=n_0\sum_{\alpha=1}^{m}\boldsymbol{y}_\alpha'\boldsymbol{S}_0^{-1}\boldsymbol{y}_\alpha$ において $\boldsymbol{y}_\alpha$ は $N(\boldsymbol{\mu}_\alpha, \boldsymbol{\Lambda})$ に従うとされ，$\boldsymbol{\mu}_\alpha'=(\mu_{1\alpha}, \mu_{2\alpha}, \cdots, \mu_{m\alpha})$，$\tau^2=\sum_{\alpha=1}^{m}\mu_\alpha'\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{\mu}_\alpha$，$g_\rho(h;\tau)=e^{-\tau^2/2}\times$

---

*) $m=1$ の時は普通の T^2-統計量でその分布はよく知られている．

**) 伊藤氏は A.M.S. Vol. 31 (1960), pp. 1148-1153 に同種の結果を発表しているが，筆者の結果を知らなかったと思われる．

$\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{\tau^2}{2}\right)^j h^{\rho+j-1}e^{-h}/\{j!\,\Gamma(\rho+j)\}$, $G_\rho(h;\ \tau)=\int_0^h g_\rho(x;\ \tau)dx$ とおけば

$$(4\cdot36)\qquad P(n_0\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{S}^*\boldsymbol{S}^{-1}\leqq 2h|H)=G_\nu(h;\ \tau)-\frac{1}{n_0}\Bigg[\frac{1}{4}mp(p-m+1)g_{\nu+1}(h;\ \tau)$$
$$+\frac{m}{2}\left\{\frac{1}{2}p(p-1)+\frac{1}{2}mp-\tau^2\right\}g_{\nu+2}(h;\ \tau)$$
$$+\left\{\left(\frac{m}{2}+p+1\right)\tau^2-\sum_{i\cdot j=1}^{p}\sum_{k,l=1}^{p}\lambda^{ki}\lambda^{lj}\Big(\sum_{\alpha=1}^{m}\mu_{i\alpha}\mu_{j\alpha}\Big)\Big(\sum_{\alpha=1}^{m}\mu_{k\alpha}\mu_{l\alpha}\Big)\right\}g_{\nu+3}(h;\ \tau)$$
$$+\sum_{i,j=1}^{p}\sum_{h,l=1}^{p}\lambda^{ki}\lambda^{lj}\Big(\sum_{\alpha=1}^{m}\mu_{i\alpha}\mu_{j\alpha}\Big)\Big(\sum_{\alpha=1}^{m}\mu_{k\alpha}\mu_{l\alpha}\Big)g_{\nu+4}(h;\ \tau)\Bigg]+O(n_0^{-2})$$

ここに λ^{ki} は $\boldsymbol{\Lambda}^{-1}$ の (k,i) 要素，$\nu=mp/2$ である．$p=2$ の時には

$$\phi\equiv\sum_{i\cdot j}\sum_{k,l}\lambda^{ki}\lambda^{lj}\Big(\sum_{\alpha=1}^{m}\mu_{i\alpha}\mu_{j\alpha}\Big)\Big(\sum_{\alpha=1}^{m}\mu_{k\alpha}\mu_{l\alpha}\Big)=\tau^4-2\Big|\sum_{\alpha=1}^{m}\mu_\alpha'\mu_\alpha\Big|/|\boldsymbol{\Lambda}|$$

$m=1$ の時には

$$\phi=\sum_{i\cdot j}\sum_{k,l}\lambda^{ki}\lambda^{lj}\mu_i\mu_j\mu_k\mu_l=\tau^4.\qquad となる.$$

§5. Union-Intersection Method

この方法は，S. N. Roy を中心として，最近多変数解析の検定方式，同時信頼区間を作るのに用いられている方法で，その根本思想は Roy の論文 [146; 1953]，及び Roy と Bose の論文 [147; 1953] に発表されており，その後の発展及び関連しておこる標本分布の導出（既述）も含めて，Roy の本 [152; 1957] にまとめられている．

5・1 Union-Intersection Test Region と Step-Down Test

検定すべき仮設を H_0 とし，対立仮設を H，その可能な範囲を Ω で表はす．簡単のため H_0，H を共に単純仮設であるとし，H_0 を対立仮設の全体 Ω に対して有意水準 α で検定する場合を考える．このため今任意の対立仮設 $H\in\Omega$ を固定しよう．するとよく知られた検定に関する Neyman-Pearson の基本定理により，可成りゆるい条件の下で，H_0 の H に対する most powerful test が存在し且つ作ることができる．この場合の有意水準を $\beta_H(<\alpha)$ とし，棄却領域を $W(H_0, H, \beta_H)$ で，採択領域を $W'(H_0, H, \beta_H)$ で表わす．勿論 $W'(H_0, H, \beta_H)$ は $W(H_0, H, \beta_H)$ の補集合である．β_H は次に述べるように α に関連してきめられる．Union-Intersection 法による H_0 の H の全体 Ω に対する検定は，棄却領域として，H を Ω の上で動かした時の $W(H_0, H, \beta_H)$ の和集合 (union) $\cup_H W(H_0, H, \beta_H)$ をとるものである．従って採択領域はその補集合である積集合 (intersection) $\cap_H W'(H_0, H, \beta_H)$ となる．ここで問題となるのが β_H の指定のしかたで，H_0 の下で $\cup_H W(H_0, H, \beta_H)$ のもつ確率が検定の大さ α になるようにきめなければならない．しかしこのきめ方は無数にある．Neyman-Pearson の基本定理を使う時，棄却領域は

$$W(H_0, H, \beta_H):\ f_H\geq\lambda(H_0, H, \beta_H)f_{H0}$$

(f_H, f_{H0} はそれぞれ H, H_0 の下での尤度函数) できめられるが，Roy は β_H と $\lambda(H_0, H, \beta_H)$ のこの関連を考えて，type I, type II の二つの型の検定を定義した．type I test では $\beta_H=\beta$ (定数) とし，β は

$$(5\cdot1)\qquad P\{\boldsymbol{x}\in\cup_H W(H_0, H, \beta|H_0\}=\alpha$$

を充すようにきめる．type II test では $\lambda(H_0, H, \beta_H)=\lambda$ (定数) とし，β_H はこれを通してきめられる．従って type II の場合には，$W(H_0, H, \beta_H)$，$W'(H_0, H, \beta_H)$ をそれぞれ $W^*(H_0, H, \lambda)$，$W^{*\prime}(H_0, H, \lambda)$ と書きかえられ，λ は

$$(5\cdot2)\qquad P\{\boldsymbol{X}\in\cup_H W^*(H_0, H, \lambda)\}=\alpha$$

を充すようにきめるのである．容易にわかるように，この type II test は likelihood ratio test と

同じものである.

さて H_0, H が複合仮説の場合についてみよう. 若し H_0 にたいする similar regions が存在し, 且つ, H_0 を H にたいして検定するための一つの bisimilar region*) が存在するならば, 上の simple な場合の定義は容易に拡張される. すなわち各 H についての bisimilar region の union と intersection で考えればよいのである. Hotelling の T^2-検定は尤度比検定で, 従って, type II に属するが, 同時に type I test であることが証明される.

しかし多変数解析における尤度比検定は, 多くの場合, type I test でないことがたしかめられている.

H_0, H が複合仮説である場合, H_0 にたいする similar regions は存在しても, 任意の $H \in \Omega$ に対する H_0 の bisimilar region が存在しないことが屢々おこる. この時, 若し次の事情が成立すれば, type I test を拡張することができる. すなわちある集合 A にたいして, $H_0=\cap_{a\in A}H_{0a}$, $H=\cap_{a\in A}H_a$, $H\in\Omega$ なる複合仮設 H_{0a}, H_a があり, 且つ H_{0a} に対する similar regions, 及び各 $H\in\Omega$ について, H_a に対する H_{0a} の most powerful (bisimilar) region が存在する時である. この場合, H_0 の Ω に対する検定の棄却領域は $\cup_H \cup_{a\in A} W(H_{0a}, H_a, \beta)$, 採択領域はその補集合 $\cap_H \cap_{a\in A} W'(H_{0a}, H_a, \beta)$ となり, β は

(5・3) $$P\{\boldsymbol{x}\in \cup_H \cup_{a\in A} W(H_{0a}, H_a, \beta)|H_0\}=\alpha$$

を充すようにきめる. この検定は extended type I test と呼ばれ, 多変数解析における union-intersection 法による検定の多くは, この拡張された type I test である. 以上は test を作っていく時の発見的方法であって, こうして作られた検定のもつ性質の理論的研究は未だ至って不十分である. ただ既知の検定でチェックされた範囲では, 可成りいい性質をもっていることが報告されている. 拡張された type I test を例で説明しよう.

$N(\boldsymbol{\mu}_i, \boldsymbol{\Lambda}_i)\, i=1,2$ において, H_0: $\boldsymbol{\Lambda}_1=\boldsymbol{\Lambda}_2$ を H: $\boldsymbol{\Lambda}_1\neq\boldsymbol{\Lambda}_2$ に対して検定することが問題である. 複合仮設 H_0 に対する similar region は無数にあるが, bisimilar region は存在しないことが知られている [144; 1950]. 今 $\boldsymbol{a}$ を零でないベクトルとし, H_0, H を次のように考える.

$$H_{0\boldsymbol{a}}: \boldsymbol{a}'\boldsymbol{\Lambda}_1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}'\boldsymbol{\Lambda}_2\boldsymbol{a}, \qquad H_0=\cup_{\boldsymbol{a}}H_{0\boldsymbol{a}}; \qquad H_{\boldsymbol{a}}^{(1)}: \boldsymbol{a}'\boldsymbol{\Lambda}_1\boldsymbol{a}<\boldsymbol{a}'\boldsymbol{\Lambda}_2\boldsymbol{a},,$$
$$H_{\boldsymbol{a}}^{(2)}: \boldsymbol{a}'\boldsymbol{\Lambda}_1\boldsymbol{a}>\boldsymbol{a}'\boldsymbol{\Lambda}_2\boldsymbol{a}, \qquad H_{\boldsymbol{a}}=H_{\boldsymbol{a}}^{(1)}\cup H_{\boldsymbol{a}}^{(2)}, \qquad H=\cap_{\boldsymbol{a}}H_{\boldsymbol{a}},$$

$\boldsymbol{a}$ の動く範囲は零でないベクトルの全体である. 先づ fix された $\boldsymbol{a}$ に対して, $H_{0\boldsymbol{a}}$ の $H_{\boldsymbol{a}}^{(i)}$ に対する検定を考える. $\boldsymbol{x}^{(i)}$ の分布を $\boldsymbol{a}'\boldsymbol{x}^{(i)}$ の分布すなわち一変数の正規分布 $N(\boldsymbol{a}'\boldsymbol{\mu}^{(i)}, \boldsymbol{a}'\boldsymbol{\Lambda}_i\boldsymbol{a})$ に reduce して考え, しかる後に $\boldsymbol{a}$ を動かして問題を解こうとする考え方である. $\boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2$ をそれぞれ自由度 n_1, n_2 の $\boldsymbol{\Lambda}_1, \boldsymbol{\Lambda}_2$ の不偏な標本共分散行列とすれば, $F_a=\boldsymbol{a}'\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{a}/\boldsymbol{a}'\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{a}$ は自由度 (n_1, n_2) の F-分布に従う. 従ってよく知られているように, $H_{0\boldsymbol{a}}$ の $H_{\boldsymbol{a}}^{(i)}$ $(i=1,2)$ に対する片側検定では, 一様に most powerful (bisimilar) region が存在する. 有意水準を $\beta_i (i=1,2)$ とすると, 棄却域はそれぞれ $F_{\boldsymbol{a}}\leq F'(\beta_1; n_1, n_2)$; $F_{\boldsymbol{a}}\geq F(\beta_2; n_1, n_2)$ となる. ここに $F'(\beta_1; n_1, n_2)$, $F(\beta_2; n_1, n_2)$ は, 自由度 (n_1, n_2) をもつ F-分布の下方 β_1 点, 上方 β_2 点である. これを基に, $H_{0\boldsymbol{a}}$ の $H_{\boldsymbol{a}}$ に対する検定の大さ β (定数) の棄却域は, union-intersection の原理により, 上の二つの棄却域の和をとる. $\beta=\beta_1+\beta_2$ で β_1, β_2 のきめ方は無数にあるが, 例えば, 検定の locally unbiasedness を要求して一意に定める. かくして H_0 の H に対する拡張された type I test を作ることができる. 採択域は $\cap_{\boldsymbol{a}}\left[F_{1\beta}\leq\dfrac{\boldsymbol{a}'\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}'\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{a}}\leq F_{2\beta}\right]$, 棄却域はその補集合 $\cup_{\boldsymbol{a}}\left[\dfrac{\boldsymbol{a}'\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}'\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{a}}>F_{2\beta} \text{ or } <F_{1\beta}\right]$ であ

*) 複合仮設 H_0, H が, 指定された要素と指定されない要素から成るとする. H_0 を H に対して検定する棄却領域で, その位置が指定されない要素に依存せず, しかも H の指定されない要素を指定して得られる任意の単純対立仮設に対して, H_0 からの同様の意味の任意の単純仮設を検定するとき, どの単純仮設ということに依存せず一様に most powerful なものが存在する場合, その棄却領域のことを S. N. Roy [146; 1953, 152; 1957] により bisimilar region と呼ぶ.

る．$F_{i\beta}$ は $F'(\beta_1;\, n_1, n_2)$，$F(\beta_2;\, n_1, n_2)$ の代りに書いたものである．今方程式

$$|\boldsymbol{S}_1-\theta\boldsymbol{S}_2|=0 \tag{5・4}$$

の根の最小のものを $\theta_{\min}$，最大のものを $\theta_{\max}$ で表わせば，上の採択域，棄却域はそれぞれ

$$F_{1\beta}\leq\theta_{\min}\leq\theta_{\max}\leq F_{2\beta};\qquad \theta_{\max}>F_{2\beta}\ \text{と}\ \theta_{\min}<F_{1\beta} \tag{5・5}$$

となる．全体の有意水準を α とすれば locally unbiasedness の条件と

$$P\{F_{1\beta}\leq\theta_{\min}\leq\theta_{\max}\leq F_{2\beta}|H_0\}=\alpha \tag{5・6}$$

より $F_{1\beta}, F_{2\beta}$ はきめられる．

以上の例にみられると同様の方法でいくつかの仕事がなされている．主な結果をまとめてみると次のようになる．

$N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Lambda})$ の時，H_0: $\boldsymbol{\Lambda}=\boldsymbol{\Lambda}_0$ を H: $\boldsymbol{\Lambda}\neq\boldsymbol{\Lambda}_0$ に対して検定する場合には，H_{0a}: $\boldsymbol{a}'\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}'\boldsymbol{\Lambda}_0\boldsymbol{a}$, H_a: $\boldsymbol{a}'\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{a}'\boldsymbol{\Lambda}_0\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}\in A$ として考えればよく，拡張された type I test の採択域は

$$\cap_{\boldsymbol{a}}\left[\frac{\chi^2{}_{1\beta}}{(n-1)}\leqq\frac{\boldsymbol{a}'\boldsymbol{S}\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}'\boldsymbol{\Lambda}_0\boldsymbol{a}}\leqq\frac{\chi^2{}_{2\beta}}{(n-1)}\right]\quad \text{すなわち}\quad \frac{\chi^2{}_{1\beta}}{(n-1)}\leqq\theta_{\min}\leqq\theta_{\max}\leqq\frac{\chi^2{}_{2\beta}}{(n-1)} \tag{5・7}$$

で棄却域はその補集合である．$\boldsymbol{S}$ は標本分散行列であり，

$$\theta_{\max}=C_{\max}(\boldsymbol{S}\boldsymbol{\Lambda}_0^{-1}),\quad \theta_{\min}=C_{\min}(\boldsymbol{S}\boldsymbol{\Lambda}_0^{-1}),\quad \chi^2{}_{i\beta}(i=1,2)$$

は local unbiasedness の条件及び

$$P\left\{\frac{\chi^2{}_{1\beta}}{(n-1)}\leqq\theta_{\min}\leqq\theta_{\max}\leqq\frac{\chi^2{}_{2\beta}}{(n-1)}\,|H_0\right\}=1-\alpha \tag{5・8}$$

からきめられる．よって $\chi^2{}_{i\beta}(i=1,2)$ の代りに $C_{i\alpha}$ と書いてよい．

$N(\boldsymbol{\mu}_i, \boldsymbol{\Lambda}), i=1,2,\cdots,k$ について，H_0 : $\boldsymbol{\mu}_1=\cdots\cdots=\boldsymbol{\mu}_k$ を H : $\neq H_0$に対して検定する場合には，$H_{0\boldsymbol{a}}$: $\boldsymbol{a}'\boldsymbol{\mu}_1=\cdots\cdots=\boldsymbol{a}'\boldsymbol{\mu}_k$, $H_{\boldsymbol{a}}$: $\neq H_{0\boldsymbol{a}}$, $\boldsymbol{a}\in A$ として考えれば，棄却域は

$$\cup_{\boldsymbol{a}}\left[\frac{\boldsymbol{a}'\boldsymbol{S}^*\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}'\boldsymbol{S}\boldsymbol{a}}\geq F_\beta\right]\qquad \text{すなわち}\qquad \theta_{\max}\geq F_\beta \tag{5・9}$$

となる．$\boldsymbol{S}^*, \boldsymbol{S}$ は標本における 'between' 'within' の共分散行列，$\theta_{\max}=C_{\max}(\boldsymbol{S}^*\boldsymbol{S}^{-1})$ で，F_β は

$$P\{\theta_{\max}\geq F_\beta\,|H_0\}=\alpha \tag{5・10}$$

からきめられ C_α と書かれる．多変数分散分析における Roy の最大根統計量はこれである．

$N\left[\begin{pmatrix}\boldsymbol{\mu}_1\\ \boldsymbol{\mu}_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\boldsymbol{\Lambda}_{11}\,\boldsymbol{\Lambda}_{12}\\ \boldsymbol{\Lambda}_{21}\,\boldsymbol{\Lambda}_{22}\end{pmatrix}\right]$ において，H_0 : $\boldsymbol{\Lambda}_{12}=\boldsymbol{0}$ の H : $\boldsymbol{\Lambda}_{12}\neq\boldsymbol{0}$ にたいする検定の場合には，$H_{0\boldsymbol{ab}}$: $\boldsymbol{a}'\boldsymbol{\Lambda}_{12}\boldsymbol{b}=0$, $H_{\boldsymbol{ab}}$: $\boldsymbol{a}'\boldsymbol{\Lambda}_{12}\boldsymbol{b}\neq0$, $\boldsymbol{a}\in A$, $\boldsymbol{b}\in A$ として考えれば，$r_{\boldsymbol{ab}}=\boldsymbol{a}'\boldsymbol{S}_{12}\boldsymbol{b}/(\boldsymbol{a}'\boldsymbol{S}_{11}\boldsymbol{a})^{1/2}(\boldsymbol{b}'\boldsymbol{S}_{22}\boldsymbol{b})^{1/2}$ なる二変数の時の相関係数の検定を利用することができる．$\boldsymbol{S}_{ij}$ は標本共分散行列の分割におけるものである．採択域は

$$\cap_{\boldsymbol{ab}}\left[\frac{(\boldsymbol{a}'\boldsymbol{S}_{12}\boldsymbol{b})^2}{(\boldsymbol{a}'\boldsymbol{S}_{11}\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}'\boldsymbol{S}_{22}\boldsymbol{b})}\leqq r_\beta{}^2\right]\quad \text{すなわち}\quad \theta_{\max}\leqq r_\beta{}^2 \tag{5・11}$$

となり棄却域はこの補集合である．ここに $\theta_{\max}=C_{\max}(\boldsymbol{S}_{11}^{-1}\boldsymbol{S}_{12}\boldsymbol{S}_{22}^{-1}\boldsymbol{S}_{21})$ であり，$r_\beta{}^2$ は

$$P\{\theta_{\max}\geqq r_\beta{}^2\,|H_0\}=\alpha \tag{5・12}$$

によりきめられ，従って C_α と書かれる．

以上述べた検定においては，その個々の power function に関する考察が多少なされているが [152; 1957a] 到底十分なものではない．この他可成り一般的な形で多変数分散分析の問題が取扱われている [152; 1957a, 156; 1959] ことを付記しておく．

union-intersection の原理に基いて検定基準を出す時，零でない $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\in A$ を使って問題を一次元或いは二次元化していくやり方とは別に，条件付き分布を使い，成分変数を step by step に考えてゆくいわゆる step-down procedure がある．成分変数を重要性の順に並べ*)，一方仮設を次のよ

---

*) step-down procedure は成分変数の並べ方に対して invariant でないので，実際の応用の時には問題である．

うに分解する．第一の仮設は，第一変数（最初の変数のグループ）の周辺分布に関するもの，第二の仮設は第一変数を与えた条件の下での第二変数の分布に関するもの，第三の仮設は第一，第二変数を与えた時の第三変数の分布に関するもの等である．そして全体の棄却域（採択域）は，各 step の棄却域（採択域）の union (intersection) をとるのである．各 step における有意水準は，全体の α とにらみ合せ，検定がよい性質をもつようにきめられる．簡単な例で説明しよう．普通の多変数分散分析に関するもので，$\boldsymbol{Y}(n\times p)$ を random matrix，各行は独立に p-変数正規分布 $N[-, \boldsymbol{\Lambda}]$ に従うものとする．平均は $E(\boldsymbol{Y})=\boldsymbol{A}(n\times m)\Theta(m\times p)$ 但し $\boldsymbol{A}$ は階数 $r(\leqq n-p)$ で既知であり，θ が未知パラメターの行列である．estimable*) な $\boldsymbol{\theta}$ の線型函数の set を $\boldsymbol{\Phi}(t\times p)=\boldsymbol{B}(t\times m)\Theta$ ($\boldsymbol{B}$ は既知）とする．そして検定すべき仮設を $H_0:\boldsymbol{\Phi}=\boldsymbol{0}$ としよう．$\boldsymbol{Y},\Theta$ の第 i 列を $\boldsymbol{y}_i,\boldsymbol{\theta}_i$ で表わし，且つ，$\boldsymbol{Y}_i=[\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\cdots,\boldsymbol{y}_i]$，$\Theta_i=[\boldsymbol{\theta}_1,\boldsymbol{\theta}_2,\cdots,\boldsymbol{\theta}_i]$ と表わす．更に $\boldsymbol{\Lambda}$ の左上 $i\times i$ 部分行列を $\boldsymbol{\Lambda}_i$ とする．$\boldsymbol{Y}_i$ をとめた条件の下では，$\boldsymbol{y}_{i+1}$ の分布は $N[\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_{i+1}+\boldsymbol{Y}_i\boldsymbol{\beta}_i,\sigma_{i+1}^2\boldsymbol{I}_n]$ となる．但し

$$\boldsymbol{\beta}_i=\boldsymbol{\Lambda}_i^{-1}\begin{bmatrix}\lambda_{1,i+1}\\ \vdots\\ \lambda_{i,i+1}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\eta}_{i+1}=\Theta_{i+1}-\Theta_i\boldsymbol{\beta}_i,\quad \sigma_{i+1}^2=|\boldsymbol{\Lambda}_{i+1}|/|\boldsymbol{\Lambda}_i|,\ |\boldsymbol{\Lambda}_0|=1.$$

$\boldsymbol{\beta}_i$ は i 番目の step-down regression coefficient，σ_{i+1}^2 は i 番の step-down residual variance と呼ばれる．

$\boldsymbol{\phi}_i=\boldsymbol{B}\boldsymbol{\eta}_i,\ (i=1,2,\cdots,p)$ とおけば，$H_0:\boldsymbol{\Phi}=\boldsymbol{0}$ と $\{H_{0i}:\boldsymbol{\phi}_i=\boldsymbol{0},\ i=1,2,\cdots,p\}$ は同等である．さて $\boldsymbol{Y}_{i-1}$ を止めて考えると，$\boldsymbol{y}_i$ の分布から，一変数の時の分散分析の問題となる．かくして

$$F_i=\frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}_i'\boldsymbol{C}_i^{-1}\hat{\boldsymbol{\phi}}_i/t}{S_i^2/(n-r-i+1)}\qquad (i=1,2,\cdots,p)\tag{5·13}$$

なる統計量をつくると，$\boldsymbol{Y}_{i-1}$ をとめた時 H_{0i} の下で自由度 $(t,n-r-i+1)$ の F-分布に従う．$\hat{\boldsymbol{\phi}}_i$ は $\boldsymbol{\phi}_i$ の不偏推定で，その共分散行列が $\boldsymbol{C}_i\cdot\sigma_i^2$，$S_i^2$ は σ_i^2 の不偏推定量で自由度 $n-r-i+1$ をもつ．しかるに $F_1,F_2,\cdots,F_p$ は互に独立であることが容易に証明され（H_0 の下で），従って step-down 法による H_0 の有意水準 α の検定は

$$F_i\leqq F_{\beta i},\qquad \text{すべての } i=1,2,\cdots,p\tag{5·14}$$

が成立すれば H_0 を採択し（棄却せず），さもなければ，H_0 を棄却することとなる．但し $P\{F_i\geqq F_{\beta i}|H_{0i}\}=\beta_i$ となるように $F_{\beta i}$ はきめられ，β_i は今の例では $F_i, i=1,\cdots,p$ の独立性から，$1-\alpha=\prod_{i=1}^{p}(1-\beta_i)$ を充すようにきめる．例えば $\beta_1=\cdots=\beta_p$ の条件を更に付してやれば，β_i は一意にきまる．このきめ方の時，上の検定は uniform unbiasedness の性質をもつ．

step-down procedure によりなされている仕事は，上の例 [137; 1958] の外に

$N(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Lambda})$ の時の $H_0:\boldsymbol{\Lambda}=\boldsymbol{\Lambda}_0$ の検定及び $N(\boldsymbol{\mu}_i,\boldsymbol{\Lambda}_i)$ $i=1,2$ の時の $H_0:\boldsymbol{\Lambda}_1=\boldsymbol{\Lambda}_2$ の検定 [137; 1958]

$N(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Lambda})$ の時，成分変数間及び成分変数のグループ間の multiple independence の検定 [154; 1958, 20; 1959] がある．

5・2 同時信頼区間

同時信頼区間の問題は，母集団パラメターの函数（その形は取扱う問題によりきめられる）の有限個あるいは無限個のものに対して，同時の信頼係数が予め定められた $1-\alpha(0<\alpha<1)$ である信頼区間の set を作ることである．多変数解析においては，パラメターに関する推論で，ベクトルとしての overall なものの他に，当然成分に対する推論，及び比較さるべき母集団がいくつかある場合の成分についての multiple な比較が要求されるので，この同時信頼区間の問題は殊に重要である．以下の方法は union-intersection の原理に基くものである．先づ各パラメター函数を個別に考

---

*) すべての $\boldsymbol{\theta}$ に対して，$\boldsymbol{\Phi}$ の unbiased estimate である $\boldsymbol{Y}$ の線型函数が存在する時，$\boldsymbol{\Phi}$ は estimable という．

え，それぞれに例えば $1-\beta$ の信頼係数 (type I である) をもつ普通の信頼区間を作る．この場合よい性質をもつ区間を作ることに努める．次にこれら信頼区間全体の intersection をとり，これを同時信頼係数 $1-\alpha$ をもつ同時信頼区間として用いるのである．前節 5・1 と同じように，与えられた α に対して β はきめられる．同時信頼区間の場合も検定の時と同様に，かくして作られた区間が推定のためにもつ性質を理論的に研究することが，不十分のまま残されている．

上の同時信頼区間はまた検定にも使うことができる．パラメターの函数を $f_k(\boldsymbol{\theta})$, $k\in\Omega=(1,2,\cdots)$，とし，これの同時信頼係数 $1-\alpha$ の同時信頼区間

$$\phi_{k1}(O_n)\leqq f_k(\boldsymbol{\theta})\leqq\phi_{k2}(O_n),\qquad k\in\Omega$$

(O_n は n 個の観測を表わす) が作られているものとする．今検定すべき仮設が $H_0:f_k(\theta)=f_{k0}$, $k\in\Omega$ であるならば，H_0 の検定は，少くとも一つの k について

$$\phi_{k1}(0_n)\leqq f_{k0}\leqq\phi_{k2}(0_n)$$

が破れる時に，H_0 を棄却することより成る．そして検定の大さは明らかに α である．このやり方は，どの成分，どの比較が有意であるかを知らせてくれる便宜がある．

以下母集団分布が正規である場合，可成りの種類にわたって求められている同時信頼区間を紹介しよう．初めに方法をはっきり知るために具体的に述べよう．$N(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Lambda})$ において，$\boldsymbol{\mu}$ の成分の任意の一次結合について，同時信頼区間を設ける問題を考える．すべての零ではないベクトルの集合を A とすれば，$\boldsymbol{a}'\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{a}\in A$ の同時信頼区間を，大いさ n のランダム・サンプルに基いて作ることである．$\bar{\boldsymbol{x}}$ を標本平均ベクトル，$\boldsymbol{S}$ を標本共分散行列とする．まづ

$$(5\cdot15)\qquad n^{1/2}|\boldsymbol{a}'(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{\mu})|/(\boldsymbol{a}'\boldsymbol{S}\boldsymbol{a})^{1/2}\leqq C\ \text{or}\ n\boldsymbol{a}'(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{\mu})(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{a}/\boldsymbol{a}'\boldsymbol{S}\boldsymbol{a}\leqq C^2$$

$(C>0)$ を考える．$\boldsymbol{a}$ をとめて考えると，$\boldsymbol{a}'\boldsymbol{x}$ の分布が $N(\boldsymbol{a}'\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{a}'\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{a})$ であるから，(5・15) は，一変数の時，t-分布にもとづいて $\boldsymbol{a}'\boldsymbol{\mu}$ の信頼区間を作るときのものである．$\boldsymbol{a}$ を動かして，この一変数の時の信頼区間の intersection を作るわけであるが，そのためにはすべての $\boldsymbol{a}$ に対して (5・15) が成立すればよい．それは $\mathrm{Sup}_{\boldsymbol{a}}\{n\boldsymbol{a}'(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{\mu})(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{a}/\boldsymbol{a}'\boldsymbol{S}\boldsymbol{a}\leqq\}C^2$ と同等である．しかるに $\mathrm{Sup}_{\boldsymbol{a}}\{n\boldsymbol{a}'(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{\mu})(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{a}/\boldsymbol{a}'\boldsymbol{S}\boldsymbol{a}\}=n(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{S}^{-1}(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{\mu})$ で，Hotelling の T^2 統計量となる．従って T^2-分布の上方 α 点を $T^2(\alpha)$ とし，$C^2=T^2(\alpha)$ とおけば，(5・15) より $\boldsymbol{a}'\boldsymbol{\mu}$ のすべての $\boldsymbol{a}\in A$ にたいする信頼係数 $1-\alpha$ をもつ同時信頼区間 [147; 1953, 152; 1957a]

$$(5\cdot16)\qquad \boldsymbol{a}'\bar{\boldsymbol{x}}-[T^2(\alpha)\boldsymbol{a}'\boldsymbol{S}\boldsymbol{a}/n]^{1/2}\leqq\boldsymbol{a}'\boldsymbol{\mu}\leqq\boldsymbol{a}'\bar{\boldsymbol{x}}+[T^2(\alpha)\boldsymbol{a}'\boldsymbol{S}\boldsymbol{a}/n]^{1/2}$$

を得る．実際問題では，すべての $\boldsymbol{a}$ ということは必要でなく，問題により規定される $\boldsymbol{A}$ の部分集合だけが対象となるが，その場合，それらの $\boldsymbol{a}$ に対する $\boldsymbol{a}'\boldsymbol{\mu}$ の推定に (5・16) を用いれば，その同時信頼係数は勿論 $\geqq1-\alpha$ となる．特に $\boldsymbol{a}'\boldsymbol{\mu}$ を最大にする $\boldsymbol{a}$ をとれば [147; 1953, 152; 1957a]

$$(5\cdot17)\qquad (\bar{\boldsymbol{x}}'\bar{\boldsymbol{x}})^{1/2}-[T^2(\alpha)/n]^{1/2}C^{1/2}{}_{\max}(\boldsymbol{S})\leqq(\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\mu})^{1/2}\leqq(\bar{\boldsymbol{x}}'\bar{\boldsymbol{x}})+[T^2(\alpha)/n]^{1/2}C^{1/2}{}_{\max}(\boldsymbol{S})$$

を得る．

次に k 個の $N(\boldsymbol{\mu}_i,\boldsymbol{\Lambda}), i=1,2,\cdots,k$ について見よう．$\bar{\boldsymbol{\mu}}=\sum_{i=1}^k n_i\boldsymbol{\mu}_i/\sum_{i=1}^k n_i$ とするとき，すべての $\boldsymbol{a}\in A$, $\sum_{i=1}^k b_i^2=1$ に従うすべての b_i に対する二重線型結合，$\sum_{i=1}^k b_i\boldsymbol{a}'n_i^{1/2}(\boldsymbol{\mu}_i-\bar{\boldsymbol{\mu}})$ の，信頼係数 $1-\alpha$ の同時信頼区間を求める．n_i は各母集団からとられる標本の大さである．各標本平均を $\bar{\boldsymbol{x}}_i$, $\bar{\boldsymbol{x}}=\sum_{i=1}^k n_i\bar{\boldsymbol{x}}_i/\sum_{i=1}^k n_i$, $(\sum_{i=1}^k n_i-k)\boldsymbol{S}=\sum_{i=1}^k\sum_{\alpha=1}^k(\boldsymbol{x}_{i\alpha}-\bar{\boldsymbol{x}}_i)(\boldsymbol{x}_{i\alpha}-\bar{\boldsymbol{x}}_i)'$, $(k-1)\boldsymbol{S}^*=\sum_{i=1}^k n_i(\bar{\boldsymbol{x}}_i-\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{\mu}_i+\bar{\boldsymbol{\mu}})(\bar{\boldsymbol{x}}_i-\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{\mu}_i+\bar{\boldsymbol{\mu}})'$ と表わす．しかる時，すべての b_i に対する

$$\left|\sum_{i=1}^k b_i n_i^{1/2}\boldsymbol{a}'(\bar{\boldsymbol{x}}_i-\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{\mu}_i+\bar{\boldsymbol{\mu}})\right|\leqq[(k-1)\boldsymbol{a}'\boldsymbol{S}\boldsymbol{a}]^{1/2}g\qquad(g>0)\quad\text{が}$$

$$\sum_{i=1}^k n_i\boldsymbol{a}'(\bar{\boldsymbol{x}}_i-\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{\mu}_i+\bar{\boldsymbol{\mu}})(\bar{\boldsymbol{x}}_i-\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{\mu}_i+\bar{\boldsymbol{\mu}})'\boldsymbol{a}/(k-1)\boldsymbol{a}'\boldsymbol{S}\boldsymbol{a}\leqq g^2$$

と同等であることに注意すれば，全く(5·16) の時と同様に，同時信頼区間を得る．$C(\boldsymbol{S}^*\boldsymbol{S}^{-1})$ の最大根の分布 (null case のもの) での上方 α 点を C_α とすれば，すべての $\boldsymbol{a}\in A$，すべての $\sum_{i=1}^{k} b_i^2=1$ に従う b_i に対して [147; 1953, 152; 1957a]

$$(5\cdot18)\quad \sum_{i=1}^{k} b_i n_i^{1/2}\boldsymbol{a}'(\bar{\boldsymbol{x}}_i-\bar{\boldsymbol{x}})-[(k-1)C_\alpha \boldsymbol{a}'\boldsymbol{S}\boldsymbol{a}]^{1/2} \leqq \sum_{i=1}^{k} b_i n_i^{1/2}\boldsymbol{a}'(\boldsymbol{\mu}_i-\bar{\boldsymbol{\mu}})\leqq \sum_{i=1}^{k} b_i n_i^{1/2}\boldsymbol{a}'(\bar{\boldsymbol{x}}_i-\bar{\boldsymbol{x}})+[(k-1)C_\alpha \boldsymbol{a}'\boldsymbol{S}\boldsymbol{a}]^{1/2}$$

が，求める信頼係数 $1-\alpha$ の同時信頼区間である．

このようにきれいにゆくのは，すべての $\boldsymbol{a}$, $b_i(\sum_{i=1}^{k} b_i^2=1)$ をとるからであるが，実際にはそのようなすべての値を必要とすることはない．従って具体的な問題に対しては，(5·19) の区間は広すぎて，意味がなくなってしまう恐れが充分ある．これに応ずるため (5·18) の部分集合として二三考えられている．

$\boldsymbol{a}'(\boldsymbol{\mu}_i-\bar{\boldsymbol{\mu}})$ のすべての $\boldsymbol{a}\in A$，及び $i=1,\cdots,k$ に対する同時信頼区間 (信頼係数 $1-\alpha$，以下同じ) [165; 1960a]

$$(5\cdot19)\quad \boldsymbol{a}'(\bar{\boldsymbol{x}}_i-\bar{\boldsymbol{x}})-[t_1^2(\alpha)\boldsymbol{a}'\boldsymbol{S}\boldsymbol{a}]^{1/2}\leqq \boldsymbol{a}'(\boldsymbol{\mu}_i-\bar{\boldsymbol{\mu}})\leqq \boldsymbol{a}'(\bar{\boldsymbol{x}}_i-\bar{\boldsymbol{x}})+[t_1^2(\alpha)\boldsymbol{a}'\boldsymbol{S}\boldsymbol{a}]^{1/2}$$

$t_1^2(\alpha)$ は $\hat{T}^2_{\mathrm{MAX}\cdot D}=\max_i\{(\bar{\boldsymbol{x}}_i-\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{\mu}_i+\bar{\boldsymbol{\mu}})'\boldsymbol{S}^{-1}(\bar{\boldsymbol{x}}_i-\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{\mu}_i+\bar{\boldsymbol{\mu}})\}$ の上方 α 点である．

$\boldsymbol{a}'(\boldsymbol{\mu}_i-\boldsymbol{\mu}_j)$ のすべての $\boldsymbol{a}\in A$，すべての $i\neq j$, $i,j=1,2,\cdots,k$ に対する同時信頼区間[147; 1953, 152; 1957a, 164; 1959b, 165; 1960a]

$$(5\cdot20)\quad \boldsymbol{a}'(\bar{\boldsymbol{x}}_i-\bar{\boldsymbol{x}}_j)-[t_2^2(\alpha)\boldsymbol{a}'\boldsymbol{S}\boldsymbol{a}]^{1/2}\leqq \boldsymbol{a}'(\boldsymbol{\mu}_i-\boldsymbol{\mu}_j)\leqq \boldsymbol{a}'(\bar{\boldsymbol{x}}_i-\bar{\boldsymbol{x}}_j)+[t_2^2(\alpha)\boldsymbol{a}'\boldsymbol{S}\boldsymbol{a}]^{1/2}$$

$t_2^2(\alpha)$ は $\hat{T}^2_{\mathrm{MAX}\cdot R}=\max_{i<j}\{(\bar{\boldsymbol{x}}_i-\bar{\boldsymbol{x}}_j-\boldsymbol{\mu}_i+\boldsymbol{\mu}_j)'\boldsymbol{S}^{-1}(\bar{\boldsymbol{x}}_i-\bar{\boldsymbol{x}}_j-\boldsymbol{\mu}_i+\boldsymbol{\mu}_j)\}$ の上方 α 点である．

k 番目の $N(\boldsymbol{\mu}_k,\boldsymbol{\Lambda})$ が standard である場合，すべての $\boldsymbol{a}\in A$，すべての $i=1,2,\cdots.(k-1)$ に対する $\boldsymbol{a}'(\boldsymbol{\mu}_i-\boldsymbol{\mu}_k)$ の同時信頼区間 [166; 1960b]

$$(5\cdot21)\quad \boldsymbol{a}'(\bar{\boldsymbol{x}}_i-\bar{\boldsymbol{x}}_k)-[t_3^2(\alpha)\boldsymbol{a}'\boldsymbol{S}\boldsymbol{a}]^{1/2}\leqq \boldsymbol{a}'(\boldsymbol{\mu}_i-\boldsymbol{\mu}_k)\leqq \boldsymbol{a}'(\bar{\boldsymbol{x}}_i-\bar{\boldsymbol{x}}_k)+[t_3^2(\alpha)\boldsymbol{a}'\boldsymbol{S}\boldsymbol{a}]^{1/2}$$

$t_3^2(\alpha)$ は $\hat{T}^2_{\mathrm{MAX}\cdot C}=\max_i\{\bar{\boldsymbol{x}}_i-\bar{\boldsymbol{x}}_k-\boldsymbol{\mu}_i+\boldsymbol{\mu}_k)'\boldsymbol{S}^{-1}(\bar{\boldsymbol{x}}_i-\bar{\boldsymbol{x}}_k-\boldsymbol{\mu}_i+\boldsymbol{\mu}_k)\}$ の上方 α 点である．

特定の一次比較 $\boldsymbol{\eta}_i$ $i=1,\cdots,k-1$ の組に対して，すべての $\boldsymbol{a}\in A$，すべての i に対する $\boldsymbol{a}'\boldsymbol{\eta}_i$ の同時信頼区間 [166; 1960b]．但し

$$\boldsymbol{\eta}_i=\sum_{h=1}^{k} C_{ih}n_h^{1/2}\boldsymbol{\mu}_h,\ \sum_{h=1}^{k} C_{ih}n_h^{1/2}=0,\ \sum_{h=1}^{k} C_{ih}C_{jh}=0\ (i\neq j),\qquad \sum_{h=1}^{k} C_{ih}^2=1$$

で，(C_{ih}) はこれ等の条件を充す与えられた係数の組．$\bar{\boldsymbol{y}}_i=\sum_{h=1}^{k} C_{ih}n_h^{1/2}\bar{\boldsymbol{x}}_h$ と書けば

$$(5\cdot22)\quad \boldsymbol{a}'\bar{\boldsymbol{y}}_i-[t_4^2(\alpha)\boldsymbol{a}'\boldsymbol{S}\boldsymbol{a}]^{1/2}\leqq \boldsymbol{a}'\boldsymbol{\eta}_i\leqq \boldsymbol{a}'\bar{\boldsymbol{y}}_i+[t_4^2(\alpha)\boldsymbol{a}'\boldsymbol{S}\boldsymbol{a}]^{1/2}$$

ここに $t_4^2(\alpha)$ は $\hat{T}_{\mathrm{MAX}\cdot L}=\max_i\{(\bar{\boldsymbol{y}}_i-\boldsymbol{\eta}_i)'\boldsymbol{S}^{-1}(\bar{\boldsymbol{y}}_i-\boldsymbol{\eta}_i)\}$ の上方 α 点である．

(5·19)～(5·22) に現はれる $t_i^2(\alpha), i=1,2,3,4$ は，何れも一般化された距離の最大値の分布における上方 α 点であり，その一般的な評価法は筆者の [163; 1959a] に与えられ，個々についての具体的評価については，それぞれの場所に示した文献でなされている．

次に共分散行列に関するものをみよう．まず $N(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Lambda})$ の $\boldsymbol{\Lambda}$ に関するものでは，$\boldsymbol{a}'\boldsymbol{x}$ が $N(\boldsymbol{a}'\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{a}'\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{a})$ に従うことに注意すれば，容易に，$\boldsymbol{a}'\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}\in A$ の同時信頼区間 [149; 1954, 152; 1957a, 153; 1957b]．

$$(5\cdot23)\quad (n-1)\theta_2^{-1}(\alpha)\boldsymbol{a}'\boldsymbol{S}\boldsymbol{a}\leqq \boldsymbol{a}'\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{a}\leqq (n-1)\theta_1^{-1}(\alpha)\boldsymbol{a}'\boldsymbol{S}\boldsymbol{a}$$

を得る．$\boldsymbol{S}$ は大さ n の標本の共分散行列，$\theta_i(\alpha)$ $i=1,2$ は，$\theta_{\min}=C_{\max}(\boldsymbol{S}\boldsymbol{\Lambda}^{-1})$，$\theta_{\min}=C_{\min}(\boldsymbol{S}\boldsymbol{\Lambda}^{-1})$ とおいて $P\{\theta_1(\alpha)\leqq\theta_{\min}\leqq\theta_{\max}\leqq\rho_2(\alpha)|\text{null case}\}=1-\alpha$ を充すものである．(5·23) は

$$(5\cdot 24)\qquad (n-1)\theta_2^{-1}(\alpha) \leqq \text{all } C(\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{S}^{-1}) \leqq (n-1)\theta_1^{-1}(\alpha)$$

とも書け，又各辺を $\boldsymbol{a}'\boldsymbol{a}$ で割り $\boldsymbol{a}$ を動かして考えれば [149; 1954, 152; 1957a, 153; 1957b]

$$(5\cdot 25)\qquad (n-1)\theta_2^{-1}(\alpha)C_{\min}(\boldsymbol{S}) \leqq \text{all } C(\boldsymbol{\Lambda}) \leqq (n-1)\theta_1^{-1}(\alpha)C_{\max}(\boldsymbol{S})$$

を得る．但しここでは信頼係数が $\geqq 1-\alpha$ となる．又 (5·23) を $\boldsymbol{a}'\boldsymbol{a}$ で割った形で考え，特に $C_{\max}(\boldsymbol{\Lambda})$, $C_{\min}(\boldsymbol{\Lambda})$ に着目すれば [152; 1957a, 153; 1957b]

$$(5\cdot 26)\qquad \begin{cases}(n-1)\theta_2^{-1}(\alpha)C_{\min}(\boldsymbol{S}) \leqq C_{\min}(\boldsymbol{\Lambda}) \leqq (n-1)\theta_1^{-1}(\alpha)C_{\min}(\boldsymbol{S})\\ (n-1)\theta_2^{-1}(\alpha)C_{\max}(\boldsymbol{S}) \leqq C_{\max}(\boldsymbol{\Lambda}) \leqq (n-1)\theta_1^{-1}(\alpha)C_{\max}(\boldsymbol{S})\end{cases}$$

が同時に成立する確率が $\geqq 1-\alpha$ である．その他 $\boldsymbol{a}$ の i 番目成分が 0 のもの，i, j 番目が 0 のもの等を考えれば，各種の同時信頼区間が得られ，それら全部の信頼係数が $\geqq 1-\alpha$ なのである．

$N(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\Lambda}_1), N(\boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\Lambda}_2)$ の $\boldsymbol{\Lambda}_1, \boldsymbol{\Lambda}_2$ の比較に関しても同様に，まづすべての $\boldsymbol{a}\in A$ に対する同時信頼係数 $1-\alpha$ をもつ $\boldsymbol{a}'\boldsymbol{\Lambda}_1\boldsymbol{a}/\boldsymbol{a}'\boldsymbol{\Lambda}_2\boldsymbol{a}$ の同時信頼区間

$$(5\cdot 27)\qquad \frac{n_1-1}{n_2-1}\theta^{-1}{}_{2\alpha}\frac{\boldsymbol{a}'\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}'\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{a}} \leqq \frac{\boldsymbol{a}'\boldsymbol{\Lambda}_1\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}'\boldsymbol{\Lambda}_2\boldsymbol{a}} \leqq \frac{n_1-1}{n_2-1}\theta^{-1}{}_{1\alpha}\frac{\boldsymbol{a}'\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}'\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{a}}$$

を得る．$\theta_{1\alpha}, \theta_{2\alpha}$ は $P\{\theta_{1\alpha} \leqq C_{\min}(\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2^{-1}) \leqq C_{\max}(\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2^{-1}) \leqq \theta_{2\alpha} | \boldsymbol{\Lambda}_1 = \boldsymbol{\Lambda}_2\} = 1-\alpha$ を充すものである．これより容易に [152; 1957a, 153; 1957]

$$(5\cdot 28)\qquad \frac{n_1-1}{n_2-1}\theta^{-1}{}_{2\alpha}C_{\min}(\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2^{-1}) \leqq \frac{\boldsymbol{a}'\boldsymbol{\Lambda}_1\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}'\boldsymbol{\Lambda}_2\boldsymbol{a}} \leqq \frac{n_1-1}{n_2-1}\theta^{-1}{}_{1\alpha}C_{\max}(\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2^{-1}) \qquad \boldsymbol{a}\in A$$

$$(5\cdot 29)\qquad \frac{n_1-1}{n_2-1}\theta^{-1}{}_{2\alpha}C_{\min}(\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2^{-1}) \leqq \text{all } C(\boldsymbol{\Lambda}_1\boldsymbol{\Lambda}_2^{-1}) \leqq \frac{n_1-1}{n_2-1}\theta^{-1}{}_{2\alpha}C_{\max}(\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2^{-1})$$

$$(5\cdot 30)\qquad \begin{cases}\dfrac{n_1-1}{n_2-1}\theta^{-1}{}_{2\alpha}C_{\min}(\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2^{-1}) \leqq C_{\min}(\boldsymbol{\Lambda}_1\boldsymbol{\Lambda}_2^{-1}) \leqq \dfrac{n_1-1}{n_2-1}\theta^{-1}{}_{1\alpha}C_{\min}(\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2^{-1})\\ \dfrac{n_1-1}{n_2-1}\theta^{-1}{}_{2\alpha}C_{\max}(\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2^{-1}) \leqq C_{\max}(\boldsymbol{\Lambda}_1\boldsymbol{\Lambda}_2^{-1}) \leqq \dfrac{n_1-1}{n_2-1}\theta^{-1}{}_{1\alpha}C_{\max}(\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2^{-1})\end{cases}$$

等を得る*)．(5·28)，(5·29)，(5·30) の同時信頼係数は何れも $\geqq 1-\alpha$ である．(5·27) より，truncated sample に対しても，(5·28)～(5·30) と同様のものを得る．

その他 k 個の共分散行列 $\boldsymbol{\Lambda}_i, i=1,\cdots,k$ に関しても，$\boldsymbol{\mu}_i, i=1,\cdots,k$ の時と同様に，種々の比較に対する同時信頼区間が問題となるが，この場合は可成り厄介で，標準のもの例えば $\boldsymbol{\Lambda}_k$ があり，$C(\boldsymbol{\Lambda}_i\boldsymbol{\Lambda}_k^{-1}), i=1,\cdots,k-1$ についてのものだけが取り扱われている [48; 1959]．

$p+q$ 変数 $(\boldsymbol{x}_1'\boldsymbol{x}_2')$ の時，$\boldsymbol{x}_1$ の $\boldsymbol{x}_2$ への回帰における回帰係数行列 $\boldsymbol{\Lambda}_{12}\boldsymbol{\Lambda}_{22}^{-1}=\boldsymbol{\beta}$ に関する同時信頼区間も同じようにして求められる．$\boldsymbol{y}_1=\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{y}_2=\boldsymbol{x}_2$ について考えると，$\boldsymbol{y}_1$ と $\boldsymbol{y}_2$ の共分散行列は $\boldsymbol{0}$ で，従って，$\boldsymbol{y}_1$ と $\boldsymbol{y}_2$ の間の標本の canonical correlations，すなわち

$$C(\boldsymbol{S}_{y11}^{-1}\boldsymbol{S}_{y12}\boldsymbol{S}_{y22}^{-1}\boldsymbol{S}_{y21}) = C[(\boldsymbol{S}_{11}-\boldsymbol{S}_{12}\boldsymbol{\beta}'-\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{S}_{21}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{S}_{22}\boldsymbol{\beta}')^{-1}(\boldsymbol{S}_{12}-\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{S}_{22})\boldsymbol{S}_{22}^{-1}(\boldsymbol{S}_{21}-\boldsymbol{S}_{22}\boldsymbol{\beta}')]$$

の分布は，null case で，よく知られている．上の根の最大値を $\theta_{\max}$ とし，これの上方 α 点を C_α とすれば，今までの論法から容易に，すべての $\boldsymbol{a}\in A$ に対して

$$(5\cdot 31)\qquad \boldsymbol{a}'(\boldsymbol{S}_{12}\boldsymbol{S}_{22}^{-1}-\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{S}_{22}(\boldsymbol{S}_{12}\boldsymbol{S}_{22}^{-1}-\boldsymbol{\beta})'\boldsymbol{a} \leqq \frac{C_\alpha}{1-C_\alpha}\boldsymbol{a}'(\boldsymbol{S}_{11}-\boldsymbol{S}_{12}\boldsymbol{S}_{22}^{-1}\boldsymbol{S}_{21})\boldsymbol{a}$$

が同時に成立する確率は $1-\alpha$ であることがわかる．これから出発すれば，すべての $\boldsymbol{d}'\boldsymbol{d}=1$, $\boldsymbol{b}'\boldsymbol{b}=1$ に従うすべての $\boldsymbol{d}, \boldsymbol{b}$ に対して**)

$$(5\cdot 32)\qquad \begin{cases}\boldsymbol{d}'\boldsymbol{S}_{12}\boldsymbol{d}_{22}^{-1}\boldsymbol{b}-\sqrt{E} \leqq \boldsymbol{d}'\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{b} \leqq \boldsymbol{d}'\boldsymbol{S}_{12}\boldsymbol{S}_{22}^{-1}\boldsymbol{b}+\sqrt{E}\\ \qquad E=\dfrac{C_\alpha}{1-C_\alpha}\boldsymbol{d}'\boldsymbol{S}_{22}^{-1}\boldsymbol{d}\cdot C_{\max}(\boldsymbol{S}_{11}-\boldsymbol{S}_{12}\boldsymbol{S}_{22}^{-1}\boldsymbol{S}_{21})\end{cases}$$

---

*) (5·30) は新らしい結果であるが，(5·27) が求まれば容易に導かれる．

**) (5·32) は Roy の結果 [149; 1954, 152; 1957a, 153; 1957b] を改良したものである．彼の結果では，$E=\{C_\alpha/(1-C_\alpha)\}\ C_{\max}(\boldsymbol{S}_{22}^{-1})C_{\max}(\boldsymbol{S}_{11}-\boldsymbol{S}_{12}\boldsymbol{S}_{22}^{-1}\boldsymbol{S}_{21})$ となっており，$\boldsymbol{d}, \boldsymbol{b}$ の変化にかかわらず区間の幅が一定で適当でない．

及び $\boldsymbol{a}\in A$, $\boldsymbol{d}'\boldsymbol{S}_{22}^{-1}\boldsymbol{d}=1$ に従うすべての $\boldsymbol{d}$ に対して [152; 1957a]

$$(5\cdot33)\qquad \begin{cases} \boldsymbol{a}'\boldsymbol{S}_{12}\boldsymbol{S}_{22}^{-1}\boldsymbol{d}-\sqrt{D}\leqq\boldsymbol{a}'\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{d}\leqq\boldsymbol{a}'\boldsymbol{S}_{12}\boldsymbol{S}_{22}^{-1}\boldsymbol{d}+\sqrt{D} \\ \qquad D=\dfrac{C_\alpha}{1-C_\alpha}\boldsymbol{a}'(\boldsymbol{S}_{11}-\boldsymbol{S}_{12}\boldsymbol{S}_{22}^{-1}\boldsymbol{S}_{21})\boldsymbol{a} \end{cases}$$

を得る．但し (5·32) の同時信頼係数は $\geqq1-\alpha$ であり，(5·23) では $=1-\alpha$ である．なお，(5·31) の $\boldsymbol{a}$ に制限をおくことにより得られる trancated matrices に対して，(5·32)，(5·33) 等に対応する区間が得られることは前と同じである．これで同時信頼区間を作る様子がわかったと思うので，次に以上の他に，同時信頼区間が求められている主な事柄について要約しておく．

(i) 多変数分散分析における null hypothesis からの departure に対するもの [152; 1957a, 153; 1957b, 156; 1959]

(ii) $N\left[\begin{pmatrix}\boldsymbol{\mu}_1(p\times1)\\ \boldsymbol{\mu}_2(p\times1)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\boldsymbol{\Lambda}_{11}\boldsymbol{\Lambda}_{12}\\ \boldsymbol{\Lambda}_{21}\boldsymbol{\Lambda}_{22}\end{pmatrix}\right]$ において $\boldsymbol{\Lambda}_{11}=\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\Gamma}'$, $\boldsymbol{\Lambda}_{22}=\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Sigma}'$ とした時の $\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$ に対するもの，及び $\boldsymbol{\mu}_1=\boldsymbol{D}_\gamma\boldsymbol{\mu}_2$ で定義される対角行列 $\boldsymbol{D}_\gamma$ の要素 γ_i に対するもの [155; 1958]

(iii) 5・1 節で述べた step-down method を利用し，各 step で信頼区間を考え，それら全体の信頼係数を $1-\alpha$ になるように各 step の信頼係数をきめる．この方法によるものとして，成分変数間の multiple independence の検定に関連して，step-down の回帰ベクトル，回帰行列に関する同時信頼区間 [154; 1958, 20; 1959]，分散分析における step-down の仮設からの departure に関する同時信頼区間 [137; 1958]，$N(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Lambda})$ における step-down の分散，及び $N(\boldsymbol{\mu}_1,\boldsymbol{\Lambda}_1)$，$N(\boldsymbol{\mu}_2,\boldsymbol{\Lambda}_2)$ についての step-down 分散比に関する同時信頼区間 [137; 1958] 等がある．

§6 分類の問題，判別函数

一つの個体をその測定値 $\boldsymbol{x}'=(x_1,x_2,\cdots,x_p)$ に基いて，$k(\geqq2)$ 個のグループ，あるいは，母集団 $\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_k$ のうちの何れに属するかを判定する分類の問題について考える．既に §2 の梗概の所で触れたが，一般的な形の議論は，Neyman-Pearson の fundamental lemma 及びその拡張に基き，あるいは，Wald の statistical decision function の理論に基いて，von Mises [99; 1945] C. R. Rao [一連の仕事をまとめたものとして 133; 1952] T. W. Anderson [4; 1951a] 等によりなされている．併し具体的な問題となると，種々の困難を生ずることが屢々である．今個体*) を分類する対象の母集団が，2つの正規母集団 $N(\boldsymbol{\mu}_1,\boldsymbol{\Lambda}_1)$，$N(\boldsymbol{\mu}_2,\boldsymbol{\Lambda}_2)$ の場合を考える．一般論より，Bayes procedure にしても，minimax procedure にしても，分類のための criterion は2つの密度函数 $p_1(\boldsymbol{x}),p_2(\boldsymbol{x})$ の比あるいはその対数である．

$$(6\cdot1)\qquad 2\log\frac{p_1(\boldsymbol{x})}{p_2(\boldsymbol{x})}\equiv U=\boldsymbol{x}'(\boldsymbol{\Lambda}_2^{-1}-\boldsymbol{\Lambda}_1^{-1})\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{x}'(\boldsymbol{\Lambda}_1^{-1}\boldsymbol{\mu}_1-\boldsymbol{\Lambda}_2^{-1}\boldsymbol{\mu}_2)$$
$$+\boldsymbol{\mu}_2'\boldsymbol{\Lambda}_2^{-1}\boldsymbol{\mu}_2-\boldsymbol{\mu}_1'\boldsymbol{\Lambda}_1^{-1}\boldsymbol{\mu}_1+\log\frac{|\boldsymbol{\Lambda}_2|}{|\boldsymbol{\Lambda}_1|}.$$

若し $\boldsymbol{\Lambda}_1=\boldsymbol{\Lambda}_2\equiv\boldsymbol{\Lambda}$ の時には

$$(6\cdot2)\qquad U_1=\boldsymbol{x}'\boldsymbol{\Lambda}^{-1}(\boldsymbol{\mu}_1-\boldsymbol{\mu}_2)-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\mu}_1+\boldsymbol{\mu}_2)'\boldsymbol{\Lambda}^{-1}(\boldsymbol{\mu}_1-\boldsymbol{\mu}_2)$$

若し $\boldsymbol{\mu}_1=\boldsymbol{\mu}_2\equiv\boldsymbol{\mu}$ の時には

$$(6\cdot3)\qquad U_2=(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})'(\boldsymbol{\Lambda}_1^{-1}-\boldsymbol{\Lambda}_2^{-1})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})+\log\frac{|\boldsymbol{\Lambda}_2|}{|\boldsymbol{\Lambda}_1|}$$

となる．何れの場合にも分類の手続きは，criterion がある定数 C より大きい時には $\boldsymbol{x}$ を π_1 に，C より小さい時には π_2 に属するとする．普通に取扱われているのが (6・2) であり，(6・3) は例えば一卵性双生子について分類が問題となる場合にあらわれる．母集団パラメターが既知，$\boldsymbol{x}$ が

*) 一個体でなく何れかの母集団からのグループの時はその平均値で考えればよい．

π_1, π_2 に属する事前確率がわかっている場合には，一般論より Bayes procedure は具体的にきまる．すなわち，判別の臨界値 C が定まる*)．しかし minimax procedure では，この臨界値をきめるために，U, U_1, U_2 の分布を知ることが要求される．また Bayes procedure にしろ minimax procedure にしろ，misclassification の確率あるいは分類の成功の確率を知ることは是非必要で，このためには矢張り U, U_1, U_2 の分布を知ることが要求される．母集団パラメターが既知の時 U_1 の分布はよく知られていて，$\boldsymbol{x}$ が $N(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\Lambda})$ に従う時，U_1 の分布は $N\left(\frac{1}{2}D^2, D^2\right)$, $\boldsymbol{x}$ が $N(\boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\Lambda})$ に従う時には $N\left(-\frac{1}{2}D^2, D^2\right)$ である．但し D^2 は Mahalanobis の汎距離 $D^2=(\boldsymbol{\mu}_1-\boldsymbol{\mu}_2)'\boldsymbol{\Lambda}^{-1}(\boldsymbol{\mu}_1-\boldsymbol{\mu}_2)$ である．しかし U, U_2 の二次の場合はさう簡単ではない．丘本 [113; 1961] は U_2 の分布を論じているが，独立な χ^2 変数の一次式の分布を求めることになり可成り複雑な形となる．

実際問題の多くの場合母集団パラメターは未知である．この場合各母集団からの標本に基いて分類を考えねばならない．$\boldsymbol{\Lambda}_1=\boldsymbol{\Lambda}_2$ の場合について A. Wald [169; 1944] は，U_1 のパラメターを標本からの推定量でおきかえた criterion の使用を考えた．$\bar{\boldsymbol{x}}_i (i=1,2)$ を π_i からの大さ n_i の標本の平均，$\boldsymbol{S}$ を自由度 f の $\boldsymbol{\Lambda}$ の不偏推定行列とすれば

$$(6 \cdot 4) \qquad W=\boldsymbol{x}'\boldsymbol{S}^{-1}(\bar{\boldsymbol{x}}_1-\bar{\boldsymbol{x}}_2)-\frac{1}{2}(\bar{\boldsymbol{x}}_1+\bar{\boldsymbol{x}}_2)'\boldsymbol{S}^{-1}(\bar{\boldsymbol{x}}_1-\bar{\boldsymbol{x}}_2)$$

が Wald の criterion である．彼は $n_1, n_2, f \to \infty$ の時の W の極限分布が U_1 の分布と一致することを示すとともに，その exact distribution についても論じている．併しこれは極めて複雑で，1950年代に入っても，Harter [55; 1951], T. W. Anderson [4; 1951a], Sitgreaves [167; 1952], Ogawa [111; 1956] により W の分布が研究されている．しかしそこで得られているものは，実用には未だ程遠く，且つ，未知パラメターを含んでいる．丘本 [112; 1960] は W の極限分布が U_1 の分布であることを利用し，次の asymptotic な結果を得た．

$$(6 \cdot 5) \quad \left\{\begin{aligned} &Pr\left\{W<\frac{1}{2}D^2+xD \mid \pi_1\right\}=\Phi(x)+\phi(x)\left(\frac{A_1}{n_1}+\frac{A_2}{n_2}+\frac{A_3}{f}\right)+O(n_1^{-1}, n_2^{-1}, f) \\ &\qquad \Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt, \quad \phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, \\ &\qquad A_1 =\frac{\{pD-x(p-3)-x^3\}}{2D^2}, \\ &\qquad A_2 =\frac{\{(2-p)D-x(p-3)-x(D+x)^2\}}{2D^2}, \\ &\qquad A_3 =\frac{-\{2(p-1)(D+3x)+x(D+2x)^2\}}{4}. \end{aligned}\right.$$

しかしここでも D なる未知パラメターを含んでいる．同じ考え方で丘本 [113; 1961] は，更に U_2 のパラメターを推定量でおきかえたものの分布を考察しており，特に一卵性双生子の分類への応用は興味深い．

Bayes procedure, Wald, 丘本等の estimated procedure は，未知のパラメターを含むなどのため実用化に支障をきたしているが，これを克服する試みが C. R. Rao [134; 1954] によりなされている．その考え方は仮設検定論（或いは決定函数論）において uniformly most powerful test (uniformly minimum risk の決定函数) が存在しない場合，考える test の class を unbiasedness, invariance 等の性質を付加して restricted class にしぼり，そこで optimum な test を導く方法がとられるが，この方法を classification の事情に合うように modify して問題を解いてゆこうとす

*) misclassification のコストは簡単のため既知あるいは等しいとしておく．

るものである．簡単のため2つの母集団 π_1, π_2 の場合を考え，$p_1(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta}_1)$, $p_2(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta}_2)$ をそれぞれの確率密度函数とする．但し函数形は分っているが $\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2$ は未知のパラメターである．各母集団からそれぞれ n_1, n_2 個の観測値 $(\boldsymbol{x}_1^{(1)}, \boldsymbol{x}_2^{(2)}, \cdots, \boldsymbol{x}_{n_1}^{(1)})$, $(\boldsymbol{x}_1^{(2)}, \boldsymbol{x}_2^{(2)}, \cdots, \boldsymbol{x}_{n_2}^{(2)})$ が利用し得るとし，今1個の観測 $\boldsymbol{x}$ の分類を標本の与える情報に基いてすることが問題である．$P_i(\boldsymbol{X}^{(i)}|\boldsymbol{\theta}_i)$, $(i=1,2)$ を $(\boldsymbol{x}_1^{(i)}, \boldsymbol{x}_2^{(i)}, \cdots, \boldsymbol{x}_{n_i}^{(i)})$ の同時確率密度とし，$\alpha_{i|j}(\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2)$, $(i\neq j;\ i, j=1, 2)$ で misclassification の確率すなわち $\int_{R_j} P_1(\boldsymbol{X}^{(1)}|\boldsymbol{\theta}_1)P_2(\boldsymbol{X}^{(2)}|\boldsymbol{\theta}_2)p_i(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta}_i)dv$ を表わす．R_1, R_2 は disjoint な分類の領域である．まづ Π_1, Π_2 が一致した時すなわち $\boldsymbol{\theta}_1=\boldsymbol{\theta}_2\equiv\boldsymbol{\theta}$ の時 $\alpha_{i|j}$ が定数である制限をつける．言い換えると領域 R_1, R_2 が $\boldsymbol{\theta}$ に関して標本空間に similar であることを要求する．そして $\alpha_{i|j}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta})$ の値に関しては，$\alpha_{1|2}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta})=\alpha_{2|1}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta})=0.50$ が合理的かも知れないが，もっと一般にして $\alpha_{1|2}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta})/\alpha_{2|1}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta})$*) を指定することを考える．このため共通の $\boldsymbol{\theta}$ に対する sufficient statistics の complete set**) を求め得たものとしよう．すると総ての $\boldsymbol{\theta}$ に対する similar region は Neyman's structure**) をもち，$\boldsymbol{\theta}$ のすべての値に対して $\alpha_{1|2}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta})/\alpha_{2|1}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta})$ が定数となる．さて今 T を $\boldsymbol{\theta}$ の sufficient statistic としよう．$\boldsymbol{x}$ が $\Pi_i(i=1,2)$ に属する時の観測全体の同時確率密度は，従って，

$$(6\cdot7)\qquad \begin{cases}\mathfrak{P}_i(T|\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\delta})P_i(\boldsymbol{X}^{(1)}, \boldsymbol{X}^{(2)}, \boldsymbol{x}|\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\delta}, T)\equiv\mathfrak{P}_i(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\delta})P_i(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\delta}) \\ \boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\theta}_1+\boldsymbol{\theta}_2, \qquad \boldsymbol{\delta}=\boldsymbol{\theta}_1-\boldsymbol{\theta}_2\end{cases}$$

と書くことができる．この時 fix された ρ で

$$(6\cdot7)\qquad \frac{\alpha_{12}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta})}{\alpha_{21}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta})}=\frac{1}{\rho}$$

なる条件の下で $a\alpha_{1|2}(\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2)+b\alpha_{2|1}(\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2)$ を最小にする T の曲面上の領域 R_{1T}, R_{2T} は

$$(6\cdot8)\qquad \begin{cases}R_{1T}:\ a\mathfrak{P}_1(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\delta})P_1(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\delta})+\lambda_1 P_1(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{0})\geqq b\mathfrak{P}_2(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\delta})P_1(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\delta})+\lambda_2 P_2(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{0}) \\ R_{2T}:\ a\mathfrak{P}_1(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\delta})P_1(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\delta})+\lambda_1 P_1(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{0})< b\mathfrak{P}_2(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\delta})P_1(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\delta})+\lambda_2 P_2(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{0})\end{cases}$$

と求められるのである．λ_1, λ_2 は (6・7) を充すようにきめられる．(6・8) の結果は，一般に，未知パラメター $\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\delta}$ に関係するので，$\alpha_{i|j}(\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2)$ にある条件を付して領域を制限してゆく．まづ $\alpha_{i|j}(\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2)$ を $\alpha_{i|j}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\delta})$ と書き，両母集団が一致した時すなわち $\boldsymbol{\delta}=0$ の近傍を考える．$\boldsymbol{\delta}=0$ における与えられた方向の $\alpha_{i|j}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\delta})$ の slope を $\alpha_{i|j}'(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{0})$ で表わせば，T の曲面上で条件 (6・7) を充たし $a\alpha_{1|2}'(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{0})+b\alpha_{2|1}'(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{0})$ を最小にする領域 R_{1T}, R_{2T} を求めることができる．その境界は

$$(6\cdot9)\qquad a\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\delta}}P_1(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{0})+\lambda_1 P_1(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{0})=b\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\delta}}P_2(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{0})+\lambda_2 P_2(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{0})$$

で与えられる．λ_1, λ_2 は (6・7) を充すように定められ，a, b はあらかじめ与えられる weight である．若し境界を定める (6・9) が $\boldsymbol{\eta}$ に関係する時には，更に $\boldsymbol{\eta}$ のset に対する average slope を最小にするとか，$P_i'(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{0})$ に関して $\boldsymbol{\eta}$ の similar region を求める等の方法がとられる．また与えられた方向の slope が利用できない時に対して Rao は，$\alpha_{i|j}'(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{0})=0,\ i\neq j;\ i, j=1, 2$ なる unbiasedness の制限をつけた分類の領域についても論じている．

以上の他に，misclassification の確率が適当に定義された両母集団の間の距離 Δ の函数 $\alpha_{i|j}(\Delta)$ として与えられる領域だけに制限し，その範囲内で $a\alpha_{1|2}(\Delta)+b\alpha_{2|1}(\Delta)$ を最小にするものを求める方法が考えられている．これができない場合には，前と同様に

$$a\frac{d}{d\Delta}\alpha_{1|2}(\Delta)|_{\Delta=0}+b\frac{d}{d\Delta}\alpha_{2|1}(\Delta)|_{\Delta=0}$$

---

*) この比が指定されれば $\alpha_{1|2}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta})+\alpha_{2|1}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta})=1$ と合わせて各々の値が定まる．

**) complete set, Neyman's structure 等の概念については例えば Lehmann の本 "Testing Statistical Hypotheses" の 4・3 節を参照されたい．

を最小にするように努めるのである.

検定論における invariant test と同様に, classification においても, invariance の原理を充す decision rule を考えることができる. A. Kudō [82; 1959] はこの観点から dispersion matrix が等しい2つの正規分布の場合に分類の問題を考えているが, そこで取扱っている classification criterion は likelihood ratio criterion と同等である. 彼はまた stringency の概念の分類の問題に対するほん訳を試みている [83; 1960].

ここで大切なことは, classification procedure がそれぞれの範ちゅうで optimum, best であることは発見的意味で重要であることは勿論だが, それが直ちに実際的に有用であるとはならないことである. 最終的には misclassification の確率を知ることが要求されるのである. 従って得られる criterion の分布を求める問題は依然として重要であることを注意しておく.

次に応用上重要な相関比, すなわち, 群間分散と全分散の比により分類のための判別函数を得る方法について述べる. これは R. A. Fisher 以来の考え方である. 今個体の観測ベクトル $\boldsymbol{x}$ が分類さるべき分布が $k(\geqq 2)$ 個ある場合で, $\boldsymbol{x}$ のもつ事前確率あるいはウエイトが等しいとされ且つ dispersion matrix が一致している時を考えてみよう. 若し母集団平均が一直線上にあるならば, 一つの線型判別函数により分類の問題はとかれる. $k=2$ の時は当然この場合であるが, $k\geqq 3$ の場合には一般にこの ideal situation は起こらない. しかし正確でなくても k 個の平均ベクトルによく fit した直線を見出したならば, 近似としてそれを判別函数として用いるのが実際的である. 若し十分でなければ, これに直交する第2の線型判別函数を求めることになる. 今判別函数として $y=\boldsymbol{a}'\boldsymbol{x}$ なる線型函数を考え, 係数 $\boldsymbol{a}$ を k 個の母集団をよく discriminate するようにきめようとする. このため最大相関比の考えをとるのである. $\boldsymbol{A}$ を k 個の平均ベクトルの間の $p\times p$ の群間共分散行列, $\boldsymbol{B}$ を $p\times p$ の群内共分散行列とすれば

$$(6\cdot 10)\qquad \eta=\frac{\boldsymbol{a}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}'(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{a}}\quad \text{あるいは}\quad \theta=\frac{\eta}{1-\eta}=\frac{\boldsymbol{a}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{a}}$$

を最大にするように $\boldsymbol{a}$ をきめるのである. 従って $\boldsymbol{a}$ は

$$(6\cdot 11)\qquad |\boldsymbol{A}-\eta(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})|=0\quad \text{or}\quad |\boldsymbol{A}-\theta\boldsymbol{B}|=0$$

の最大特有根 $\eta_{\max}$ or $\theta_{\max}$ に対する固有ベクトルとして与えられる.

以上はよく知られたことであるが, 斯くして得られた一本の線型判別函数だけで十分であるか, 更に判別函数を得るために, $\eta_{\max}$ or $\theta_{\max}$ の他に更に (6·11) の特有根が要求されるかどうか, 換言すれば, 得られた線型判別函数が, significance を持つかどうかの問題が, 1950 年代の前半で M. S. Bartlett [16; 1951a], E. J. Williams [175; 1952, 176; 1955] により論じられている. 更に彼等は一つの hypothetical discriminant function に対しても, その significance をみる方法を提供している. $\eta_{\max}$ or $\theta_{\max}$ に対する $\boldsymbol{a}$ を係数とする新変数 y は一つの canonical variate であるが, 一般には $\min\{p, k-1\}$ 個ある. $k-1\geqq p$ であれば, k 個の平均を p 次元空間の k 個の点として表わすのに, 一般に p 個の軸を要求し, $p\geqq k-1$ であれば, k 個の平均点は, 彼等の張る $k-1$ 次元空間で考えればよく, canonical variate も $k-1$ 個となる. (6·11) の解である固有根の恒等的に 0 でないものの個数も, これに呼応して $\min\{p, k-1\}$ 個である, 併し k 個の平均が一直線上にあれば, canonical variate 従って (6·11) の 0 でない根は唯一個, 平面上にあれば二個…… となる. 以上のことは母集団においてのことであって, 標本ではその変動のために, たとえ母集団平均が一直線上あるいは平面上にあっても, 対応する固有根以外のものが 0 になるとは限らない. 従って吾々が標本から得る情報を基とする時, 母集団において平均が一直線上にのっている, すなわち, $\theta_{\max}$ or $\eta_{\max}$ に対応する判別函数一つで十分かどうかをみるには, 残りの固有根が全体として無視できるくらい小さいかどうかを調べることが必要となる. 若し不十分ならば, 大きい2つの固有根を採用し, その十分性をこれら2つの根以外の残りの根について調べることになる. この

ように canonical variates の最小個数がきまれば，最初の p 次元の問題を低い次元に reduce し，そこで分類を行うことになる．若し判別函数が一つで十分であれば，一次元の場合の分類の問題となり，分類の臨界点，misclassification の確率等を評価することが非常に楽になる．

この最小次元への reduction の問題には，(6·11) の根の同時分布が主役を演じ，母集団特有根の仮設の検定に関係しており，特有根に関する綜合的考察の節，§7 でまとめて述べることにする．

さて今までは，分類さるべき個体の測定値あるいは観測値を，ベクトルあるいは点と考える場合についてであったが，最近 C. R. Rao [136; 1958] が growth curve の比較に関連して曲線の分類に触れている．2つの母集団あるいは群 π_1, π_2 の場合を考え，各 π_i に属す個体 α に対する曲線を，time interval $(0, 1)$ における t の連続函数 $f_\alpha^{(i)}(t)$ で表わす．π_i における $f_\alpha^{(i)}(t)$ の平均を $E_\alpha^{(i)}\{f_\alpha^{(i)}(t)\}=\mu^{(i)}(t)$ とし，両母集団における dispersion function $E_\alpha^{(i)}\{f_\alpha^{(i)}(t)f_\alpha^{(i)}(t')\}-\mu^{(i)}(t)\mu^{(i)}(t')$ は等しいと仮定し，$D(t, t')$ で表はす．discriminator として linear functional $L\{f(t)\}$ を考えるが，$f(t)$ が t の連続函数であるから $L\{f(t)\}=\int_0^1 f(t)dg(t)$ なる積分表示をもつ．相関比を最大にする前の考え方と同じように，$g(t)$ を

$$(6{\cdot}12) \qquad \iint d(t)d(t')dg(t)dg(t') \Big/ \iint D(t, t')dg(t)dg(t')$$

を最大にするようにきめるのである．ここに $d(t)=\mu^{(1)}(t)-\mu^{(2)}(t)$．この $g(\mathrm{t})$ は積分方程式

$$(6{\cdot}13) \qquad d(t)=\int D(t, t')dg(t')$$

の解として与えられる．$D(t, t')$ が与えられた時，$g(t)$ を (6·13) の解として求めるのに，$D(t, t')$ の特別の形の場合を除けば，自動計算機の助けをかりて数値的に行われることになろう．

社会的現象を取り扱う場合，測定が量的でなく質的にのみなされることが屢々ある．又量的なものと質的なものが混っていることもある．この場合の分類の問題では，質的なものに合理的な数量を与えることが重要となる．この数量化の問題に関しては，林部長の一連の研究がある．その基礎となる考え方及び文献が統計数理研究所創立十五周年記念号にまとめられている [56; 1959]．

この外 C. Mallow [97; 1953] は，測定ベクトル $\boldsymbol{x}'=(x_1, \cdots, x_p)$ の成分を sequential に考えてゆく分類について論じている．

最後に分類の今までとは異った型である selection の問題に触れておこう．今 p 個の成分をもつベクトル $\boldsymbol{x}'=(x_1, x_2, \cdots, x_p)$ と q 個の成分をもつベクトル $\boldsymbol{y}'=(y_1, y_2, \cdots, y_q)$ を考え，これらは同時密度函数 $f(y_1, y_2, \cdots, y_q, x_1, \cdots, x_p)\equiv f(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ をもつとする．例えば $\boldsymbol{x}$ は achievement tests の得点，$\boldsymbol{y}$ は admission tests の得点を表わしている．selection の問題は，$\boldsymbol{y}$ がある要求されている性質を充すように，$\boldsymbol{x}$ に基いて，間接的に，個体を select するため，$\boldsymbol{x}$ の p 次元空間における selection region R をどのように定めるかということである．取り扱われる問題を述べるため次の記号を用いる．最初の母集団を π，選択が行われた後の母集団を * を付して π^* で表わす．今まで $q=1$ の場合しか取り扱われていないので $f(y, \boldsymbol{x})$ と密度函数を書き，更に

$$(6{\cdot}13) \qquad f(y, \boldsymbol{x})=\phi(y|\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x})$$

と条件付き密度函数と $\boldsymbol{x}$ の周辺密度函数で表わす．y の $\boldsymbol{x}$ への回帰函数を $\eta(\boldsymbol{x})$，選抜後の y の母集団平均を m_y^*，分散を σ_y^{*2} で表わす．更に選択が行はれた時，選抜されたものの割合を $\alpha(R)$ で表わす．すなわち $\alpha(R)=\int_R g(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$. 結果が得られている問題を示すと

(a) $P_r\{y\leq y_0|\pi^*\}=\gamma$ で，$\alpha(R)$ を最大にする R を求めること．

(b) $m_y^*=m_0$ で，$\alpha(R)$ を最大にする R を求めること．

(c) $\alpha(R)=\alpha_0$ で，m^* を最大にする R を求めること．

(d) $\alpha(R)=\alpha_0$ で，$Pr\{y\geqq y_0|\pi^*\}$ を最大にする R を求めること．

(e) $m_y{}^* = m_0$ で，$\sigma_y{}^{*2}$ を最小にする R を求めること．

(f) $\alpha(R)=\alpha_0$, $m^*=m_0$ で，$\sigma_y{}^{*2}$ を最小にする R を求めること．

W.C. Cochran [31; 1951] は (c) について

R: $\eta(\boldsymbol{x})\geqq C$, 但し C は $\alpha(R)=\alpha_0$ を充すようにきめる．

が optimum selection を与えることを示している．特に π が正規である場合の，選抜後すなわち π^* における平均 $m_y{}^*$, 分散 $\sigma_y{}^{*2}$ 及び y と $\eta(\boldsymbol{x})$ の相関係数を π における parameter で具体的に示している．更に (c) の問題を二段階に行うことを論ずると共に，y と $\boldsymbol{x}$ の同時分布が未知のパラメターを含む場合に selection statistic を標本から如何に構成するかを論じている．Des Raj [35; 1955] は (a), (b), (d), (f) の問題を取り扱っている．結果を示すと，(a) に対して

(i) $Pr\{y\leqq y_0|\pi\}>\gamma$ の時　R: $\int_{-\infty}^{y_0}\phi(y|\boldsymbol{x})dy<\lambda$

(ii) $Pr\{y\leqq y_0|\pi\}<\gamma$ の時　R: $\int_{-\infty}^{y_0}\phi(y|\boldsymbol{x})dy>\lambda$

を得る．λ は条件 $Pr\{y\leqq y_0|\pi^*\}=\gamma$ よりきめられる．(b) に対しては，π における y の平均を m_y として

(i) $m_y>m_0$ の時，　R: $\eta(\boldsymbol{x})<\lambda$

(ii) $m_y<m_0$ の時，　R: $\eta(\boldsymbol{x})>\lambda$

を得る．λ は $m_y{}^*=m_0$ よりきめられる．

(d) に対する Raj の結果は　R: $\int_{y_0}^{\infty}\phi(y|\boldsymbol{x})dy\geqq k$

但し k は $\alpha(R)=\alpha_0$ の条件からきめられる．

(f) の問題に対しては　R: $\int_{-\infty}^{\infty}(y-m_0)^2\phi(y|\boldsymbol{x})dy\leqq\lambda_1+\lambda_2\eta(\boldsymbol{x})$

ここに λ_1 と λ_2 は，$\alpha(R)=\alpha_0$, $\int_R[\eta(\boldsymbol{x})-m_0]g(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}=0$ を充すようにきめる．

以上の optimum selection region を求めるには，Neyman-Pearson の基本定理が主要な役割を果たしている．Z. W. Birnbaum [23; 1950], 及び彼と D. G. Chapman [24; 1950] は $f(y,\boldsymbol{x})$ が $p+1$ 変数の non-singular multivariate normal distribution の場合に，selection を linear truncation で行うことを考えた．但し分布のパラメターは既知とされている．$\boldsymbol{x}$ に基いて y を選択する時の selector として一次式 $U=\boldsymbol{a}'\boldsymbol{x}$ を考え，

$U\geq\tau(U\leq\tau)$ なら選抜し，$U<\tau(U>\tau)$ ならおとすという手続きを取る．この時 $\boldsymbol{a},\tau$ を選抜後の y の分布が，要求される条件を充すようにきめるのである．Birnbaum, Chapman は (a), (b), (e) の問題を考え $\boldsymbol{a},\tau$ を決定している．併し π が正規である時，回帰函数 $\eta(\boldsymbol{x})$ が線型であることに注意すれば，彼等の後で得られた Raj の一般的な結果に含まれていることが容易に確められる．Cochran の結果も π が正規の時には optimum linear truncation である．唯 (e) の問題は，π の正規性及び linear truncation の形で行う selection の時に definite な解を持ち，$U=\eta(\boldsymbol{x})$ となり，cutting point τ は $\lambda(\tau/\sigma_u)=m_0/\rho$ できめられる．$\lambda(x)$ はいわゆる

$$\text{Mill's ratio}\quad e^{-\frac{x^2}{2}}\Big/\int_x^{\infty}e^{-\frac{u^2}{2}}du,$$

ρ は y と $\boldsymbol{x}$ の間の重相関係数である．一般的な取り扱いでは，$\alpha(R)=\alpha_0$ の条件を付した (f) の形でなされる．

問題 (c) の場合，選抜後の y の gain $G(y)$ は

$$(6\cdot 14)\qquad G(y)=\rho_{y\eta}\sigma_y\frac{G(\eta)}{\sigma_\eta},\qquad G(\eta)\text{ は }\eta\text{ の gain}$$

であるが，O. Kempthorne and A. W. Nordskog [80: 1959] は遺伝学における問題に関連して，

$$y=\boldsymbol{b}'\boldsymbol{z} \qquad (\boldsymbol{b}\text{ は既知}), \qquad \eta(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{a}'\boldsymbol{x}$$

で，$\boldsymbol{z}(m\times 1)$ が $r(<m)$ 個の独立な制限条件 $d_i=\boldsymbol{c}_i'\boldsymbol{z}$, $i=1,2,\cdots,r$ に従う場合，$\eta(\boldsymbol{x})$ による選抜の gain を最大にするように，換言すれば，y と η の相関係数 $\rho_{y\eta}$ を最大にするように $\boldsymbol{a}$ をきめることをやっている．Z. W. Birnbaum [21; 1950], Z. W. Birnbaum, E. Paulson and F. C. Andrews [22; 1950], A. C. Cohen, Jr. [32; 1957] 等は π^* のパラメターがわかっている時，これらより原の分布 π のパラメターを推定する問題を取り扱っている．

H. S. Sichel [158; 1952], A. G. Arbous and H. S. Sichel [9; 1952] は，正規分布で linear truncation の場合について，selection の効率，economy, loss 等の index を定義している．パラメターは既知とされており，$\eta(\boldsymbol{x})$ の分布は正規であるから，y と $U=\eta(\boldsymbol{x})/\sigma_\eta$ の二次元正規分布

$$f(y,U)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(y^2-2\rho yU+U^2)\right\}$$

で考えて一般性を失わない．ρ は y と U の相関係数である．selection の効率は，chance selection すなわち $\boldsymbol{x}$ と無関係に random に選択を行う時と比較して定義される．例えば，選択後の $y\geqq\beta$ (β は与えられた定数) の確率を大きくする目的で selection が行われる場合を考えると，

chance selection の時，　$P_c=P_r\{y\geqq\beta\}=\int_\beta^\infty\phi(t)dt\equiv\Phi(\beta)$,　　$\phi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}$

pre-truncation による時，　$P_t=P_r\{y\geqq\beta|U\geqq\alpha\}=[\Phi(\alpha)]^{-1}\int_\beta^\infty\int_\alpha^\infty f(y,U)dydU$

$$=[\Phi(\alpha)]^{-1}\int_\beta^\infty\Phi\left(\frac{\alpha-\rho y}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)\phi(y)dy$$

であり，pre-truncation による selection の効率は

$$H=100(P_t-P_c)\qquad(\%) \tag{6・15}$$

と定義される．cutting point α を与えた時，H を最大にする β は，$\beta_{\max}=\frac{1}{\rho}(1-\sqrt{1-\rho^2})\alpha$ となっている．

本節では組分けの問題，人員の適正配置の問題には触れなかったが最近線型計画法が取り入れられていることだけを申し添えておく．

§7. 特有根に関するもの

今まで述べてきた所からもうかがえるように，検定，判別函数の決定等多くの多変数解析に現われる統計量は，標本にもとづくある種の対称行列の特有根と密接な関係を持っている．従って恒等的に零でない特有根の同時分布が重要となってくるが，まづ $|\boldsymbol{A}-\theta(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})|=0$ なる形の方程式の根について，検定さるべき仮設が正しい null case についてみていこう．母集団の正規性を仮定したうえで，最も一般的な形で，零でない s 個の根 $0<\theta_1\leqq\theta_2\leqq\cdots\cdots\leqq\theta_s<1$ の同時分布は

$$\left\{\begin{aligned} &C(s,m,n)\prod_{i=1}^{s}\theta_i^m(1-\theta_i)^n\prod_{i>j}\theta_i-\theta_j)\\ &C(s,m,n)=\frac{\pi^{s/2}\prod_{i=1}^{s}\Gamma\left[\frac{1}{2}(2m+2n+s+i+2)\right]}{\prod_{i=1}^{s}\Gamma\left[\frac{1}{2}(2m+i+1)\right]\Gamma\left[\frac{1}{2}(2n+i+1)\right]\Gamma\left(\frac{1}{2}i\right)}\end{aligned}\right. \tag{7・1}$$

と書かれる．

$N(\boldsymbol{\mu}_1,\boldsymbol{\Lambda}_1)$, $N(\boldsymbol{\mu}_2,\boldsymbol{\Lambda}_2)$ の時 H: $\boldsymbol{\Lambda}_1=\boldsymbol{\Lambda}_2$ を検定する場合，$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ を自由度 ν_1,ν_2 の $p\times p$ 積和行列とすれば，$s=p$, $m=(1/2)(\nu_1-p-1)$, $n=(1/2)(\nu_2-p-1)$ である．母集団共分散行列が同じであ

る (n_1+1) 個の p 変数正規母集団の平均ベクトルが等しいことの検定，すなわち，多変数解析における analysis of dispersion では，$s=\min(n_1, p)$，$m=(1/2)(|n_1-p|-1)$，$n=(1/2)(n_2-p-1)$ となる．n_2 は母集団共分散行列の推定に使われた自由度で且つ $n_2 \geqq p$ である．$(p+q)$ 変数正規母集団における p 個の成分変数と q 個の成分変数の間の sample canonical correlation coefficient の同時分布に対しては，標本の大いさを N, $p<q$ として $s=p, m=(1/2)(q-p-1)$，$n=(1/2)(N-p-q-2)$ とすればよい．これら特有根を使って代表的な統計量を表わせば，§4・4，(4・33) で触れた如く，Hotelling の T_0^2 統計量は本節の記号で

$$T_0^2=n_0\sum_{i=1}^{s}\lambda_i, \qquad \lambda_i=\frac{\theta_i}{(1-\theta_i)}, \tag{7・2}$$

Wilks の統計量 Λ は

$$\Lambda=(1-\theta_1)(1-\theta_2)\cdots\cdots(1-\theta_s) \tag{7・3}$$

で表わされ，Roy の criterion は最大根 θ_s or λ_s，最小根 θ_1 or λ_1 である．K.C.S. Pillai [119; 1955] は $H=s\{\sum_{i=1}^{s}(1-\theta_i)^{-1}\}^{-1}$，$R=s\{\sum_{i=1}^{s}\theta_i^{-1}\}^{-1}$，$U=s\{\sum_{i=1}^{s}\lambda_i^{-1}\}^{-1}$ を定義しているが，あまりにも形式的で感心しない．

特有根の和 $\sum_{i=1}^{s}\lambda_i$ については，T_0^2 の分布に関連して既に §4・4 で触れた．$\sum_{i=1}^{s}\theta_i$ については Pillai [117; 1953, 118; 1954] が，近似分布として

$$Kv^{s(2m+s+1)/2-1}(1-v/s)^{s(2n+s+1)/2-1}, \qquad 0<v<s \tag{7・4}$$

なる beta distribution を与えているが，その近似はさほどよいものではない．“増山のベクトル量の相関係数” といわれるものは，結局 Hotelling の canonical correlation coefficient の自乗の和 $\sum_{i=1}^{s}r_i^2\equiv\sum_{i=1}^{s}\theta_i$ と同等で，θ_i の null case の同時分布は (7・1) の形である．小川博士 [110; 1956a] はこのことを明らかにすると共に，$\sum_{i=1}^{s}\theta_i$ の null case 及び non-null case の極限分布について論じている．特別の場合として D. N. Nanda [103; 1950] は，(7・1) の $m=0$ の場合について，$V^{(s)}=\sum_{i=1}^{s}\theta_i$ の分布を $s=2, 3, 4$ に対して求めている．一般の m に対して $V^{(s)}$ の分布を Pearsonian system で近似するため，K. C. S. Pillai [121; 1956b]，K. C. S. Pillai and T. A. Mijares [125; 1959] は $V^{(s)}$ 及び $U^{(s)}=\sum_{i=1}^{s}\theta_i/(1-\theta_i)$ の moment の導出法を研究している．

Roy の criterion である最大根あるいは最小根に関しては，具体的な分布の形を求め数表を用意することが目につく．θ_s, θ_1 及び中間の個々の根に対する cumlative distribution function は，Roy [140; 1945] が $s=2, 3, 4$，D. N. Nanda [101; 1948a] が $s=2, 3, 4, 5$ の時に具体的な形を求めていて，これに次いで K. C. S. Pillai [118; 1954] は $s=8$ まで拡げている．更に Pillai [120; 1956a] は最大根 θ_s の upper percentage point を得るための近似公式を $s=2, 3, 4, 5$ に対して示すと共に，上方 5％，1％ 点の表を作っている [122; 1957]．更に彼と C.G. Bantegui [124; 1959] は $s=6$ に上の事柄を拡げている．F. G. Foster and D. H. Rees [43; 1957]，Foster [44; 1957, 45; 1958] は $s=2, 3, 4$ の時の上方 1％，5％，10％，15％，20％ 点を直接 (7・1) を積分することにより求め，可成り詳しい表を与えた．ごく最近 D. L. Heck [57; 1960] は，$s=2, 3, 4, 5$ の時の 1％，2.5％，5％ 点の chart を $m=-\frac{1}{2}$, 0(1)10，$n=5\sim1000$ に対して作っている．

最小根に対しては $1-\theta_i, i=1, \cdots, s$ で考えればよいので，別に説明するまでもない．

さて次に Wilks の Λ 統計量 (7・3) に関連しながら，§6 で残された判別函数の significance を見ることに議論を移そう．共分散行列が等しい k 個の分布を，平均ベクトルに基いて判別するた

めの linear function すなわち canonical variate を (6・11) の根に基いて選ぶ時，幾つとらねばならぬかあるいは選ばれた discriminant function が十分な significance を持つかは，結局，(6・11) の根の零でないものが何個あるかを調べることになる．まづこれに関して Bartlett [11; 1938, 12; 1939, 14; 1947b, 16; 1951a] が繰り返し述べている近似法についてみよう．最初に全体として k 個の母集団の間に significant な variation があるかを問うことが必要である．Bartlett はこの over-all test に Λ 統計量（母集団は正規）

$$\frac{|\boldsymbol{B}|}{|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|}=\Lambda=(1-\theta_1)(1-\theta_2)\cdots\cdots(1-\theta_s), \qquad s=\min(p, k-1) \tag{7・5}$$

を使う．$p=1,2$ あるいは $k=2,3$ の時には exact test が知られているが，その他の場合には，既に §4・3 で触れたが，

$$\chi^2=-\left\{n-\frac{1}{2}(p+k)\right\}\log\Lambda \tag{7・6}$$

近似的に自由度 $p(k-1)$ の χ^2 分布に従うという χ^2 近似を使う．但しここの n は total covariance matrix $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})$ の自由度である．この test の結果有意な変動ありと判断されたならば，Λ を

$$\Lambda=(1-\theta_s)\Lambda', \qquad \Lambda'=\frac{\Lambda}{(1-\theta_s)}=(1-\theta_1)(1-\theta_2)\cdots\cdots(1-\theta_{s-1}) \tag{7・7}$$

と分け，Λ' の有意性を調べるのである．若し k 個の平均ベクトルが一つの直線上にあり，それが標本における最大根により表わされるとすれば，θ_s に対応する判別函数 $\boldsymbol{a}_s'\boldsymbol{x}$ で平均ベクトル間の変動を全部表わす筈であるから，回帰論の考えで，原の変量から $\boldsymbol{a}_s'\boldsymbol{x}$ の影響を取り除けば，その後に残るものは random fluctuation だけとなる．この考え方で Bartlett は，Λ' の時にも Λ と同様の χ^2 近似を適用し

$$\chi'^2=-\left\{n-\frac{1}{2}(p+k)\right\}\log\Lambda'=-\left\{n-\frac{1}{2}(p+k)\right\}\log\left\{\frac{\Lambda}{(1-\theta_s)}\right\} \tag{7・8}$$

が近似的に自由度 $(p-1)(k-2)$ の χ^2 分布するとした．そして近似 χ^2 解析として (colinearity の test) 右に示す分解を考えている．

	自由度	χ^2
θ_s	……… $p+k-2$	$-\left\{n-\frac{1}{2}(p+k)\right\}\log(1-\theta_s)$
残り	……… $(p-1)(k-2)$	$-\left\{n-\frac{1}{2}(p+k)\right\}\log\left\{\frac{\Lambda}{(1-\theta_s)}\right\}$
全体	……… $p(k-1)$	$-\left\{n-\frac{1}{2}(p+k)\right\}\log\Lambda$

一般的には，若し

$\theta_s, \theta_{s-1}, \cdots, \theta_{s-r+1}$

の最後の r 個が除かれるならば，

$$\Lambda=\Lambda_1\Lambda_2=\prod_{i=1}^{s-r}(1-\theta_i)\prod_{j=s-r+1}^{s}(1-\theta_j) \tag{7・9}$$

の $\Lambda_1=\prod_{i=1}^{s-r}(1-\theta_i)$ に対して，$-\left\{n-\frac{1}{2}(p+k)\right\}\log\Lambda_1$ が近似的に自由度 $(p-r)(k-r-1)$ の χ^2 分布するとされ，over-all な χ^2 分解では，$-\left\{n-\frac{1}{2}(p+k)\right\}\log(1-\theta_{s-i})$, $i=0, 1, \cdots(r-1)$ がそれぞれ近似的に自由度 $p+k-2(i+1)$ の χ^2 分布に従うとされるのである．

$-\left\{n-\frac{1}{2}(p+k)\right\}\log\Lambda'$, $-\left\{n-\frac{1}{2}(p+k)\right\}\log\Lambda_1$ の自由度が $p(k-1)$ からそれぞれ $(p-1)(k-2)$, $(p-r)(k-r-1)$ とおちるのは，本質的には，remove された non-zero の母集団特有根の存在に依存していること，更に θ_s が対応する母集団の特有根に対する sufficient statistic ではないことなどのため，χ^2 分解における各成分間の独立性に関する近似がどの程度充たされているか，Λ', Λ_1 に対する χ^2 近似がどこまで有効か等を exact に調べることは非常に困難である．これは $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_s$ の non-null case における同時分布が，現在のところ，実際の解析で取り扱い得る形

に求められていないためである．

D. N. Lawley [95; 1959] は，(7・9) の Λ_1 すなわち $\prod_{i=1}^{s-r}(1-\theta_i)$ に対して，

$$\chi^2 = -\mathrm{B}\cdot\log\prod_{i=1}^{s-r}(1-\theta_i) \tag{7·10}$$

が近似的に自由度 $(p-r)(q-r)$ $(q=k-1)$ の χ^2 分布に従うとされるときの B の検討を大標本について行っている．しかし彼は一般の canonical correlation の問題として取り扱っており，また正確な議論の時におこる困難をさけるため，標本における根と母集団における根との対応が殆んど確実である程 n が大きいと仮定する．そして小さい方の $(s-r)$ 個の母集団の根が 0 であるという仮設の下で，$-\log\prod_{i=1}^{s-r}(1-\theta_i)$ の平均を評価することにより，B の漸近的な値を得ている．P 変数の組と q 変数の組の間の canonical correlation の場合として

$$B = n-r-\frac{1}{2}(p+q+1)+\sum_{j=s-r+1}^{s}\left(\frac{1}{\lambda_j}\right)+0(n^{-2})^{*)} \tag{7·11}$$

を得る．ここに $\lambda_j(j=s-r+1, \cdots, s)$ は 0 でない母集団の根である．$\lambda_j\approx 1, (j=s-r+1, \cdots, s)$ であるときには $B\approx n-\frac{1}{2}(p+q+1)$ となり，これは分類の時の $q=k-1$ とした時のものである．若しそうでなければ，λ_j を θ_j でおきかえて評価することになろう．

次に一つの hypothetical discriminant function $\eta=\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{x}=\alpha_1x_1+\boldsymbol{\alpha}_2x_2+\cdots\cdots+\alpha_px_p$ 充分性を test する問題に簡単にふれておこう．Bartlett [16; 1951a] はこれに対しても前と同様の χ^2 による近似法を与えている．以下簡単のために $p\leqq k-1$ とし，従って $s=p$ で考えてゆく．今 ϕ を η についての平均間の積和行列（自由度 $k-1$）と全体の積和行列（自由度 n）の比すなわち

$$\phi=\frac{\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\alpha}'(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{\alpha}}$$

とする．そして η の充分性をみるための統計量として

$$\Lambda^*=\frac{\Lambda}{1-\phi}=\frac{\prod_{i=1}^{p}(1-\theta_i)}{1-\phi} \tag{7·12}$$

を考える．この場合の検定さるべき仮設は，

$$H:\begin{cases}k\text{ 個の母集団平均ベクトルが一直線上に在って（零でない母集団特有根}\\ \text{は 1 個であること），その直線を表わす判別函数が } \eta=\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{x} \text{ である，}\end{cases}$$

ということである．この仮設の下で Λ^* は Λ と同じように分布する．但し n は $n-1$ に，p は $p-1$ になる．検定さるべき仮設 H の下で，η は母集団判別函数であり，従って，$\phi=\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}/\boldsymbol{\alpha}'(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{\alpha}$ が母集団における対応する比，即ち，零でない母集団特有根の sufficient statistic であることが Bartlett [14; 1947b, 16; 1951a] により証明されている．従って ϕ を与えた時の $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_p$ の条件付き同時分布は，未知パラメター（零でない母集団特有根）に無関係となる．換言すれば，η の影響を除いた後の標本特有根 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{p-1}$ の分布は null case のものとなるのである．斯くして仮設 H の下で，

$$-\left\{n-1-\frac{1}{2}(p-1+k)\right\}\log\Lambda^* \tag{7·13}$$

が近似的に自由度 $(p-1)(k-1)$ の χ^2 分布に従うとされるのである．若し予め判別函数が 1 つだけで十分であることがわかっているときには

$$\Lambda^*=\left\{\frac{1-\theta}{1-\phi}\right\}\prod_{i=1}^{p-1}(1-\theta_i) \tag{7·14}$$

---

*) q 変数の組が分布をもつときも fixed set の時も同一の結果を得る．

と考え下のように χ^2 分解を得る．但しこの時は加法性が成立しない．

	自由度	χ^2
仮設と標本の差	$p-1$	$-\left\{n-1-\frac{1}{2}(p-1+k)\right\}\log\frac{1-\theta_s}{1-\phi}$
線型からのはずれ	$(p-1)(k-2)$	$-\left\{n-\frac{1}{2}(p+k)\right\}\log\prod_{i=1}^{s-1}(1-\theta_i)$
全　体	$(p-1)(k-1)$	$-\left\{n-1-\frac{1}{2}(p-1+k)\right\}\log\Lambda^*$

以上は $\eta=\boldsymbol{a}'\boldsymbol{x}$ なる hypothetical discriminant function の充分性を近似的にみるものである．しかし仮設 H が棄却される場合，hypothetical discriminant function が適当なものでなかったのか，判別函数が一つだけで不十分であったのか，あるいは両者が共に影響したためか判然とさせる必要がある．このため Λ^* の分解を考えなければならない．(7·14) もその一つであるが，しかし，ϕ が θ_s に対応するとするのは近似的であるに過ぎない．Bartlett [16; 1951a], E. J. Williams [175; 1952, 176; 1955] は，上に述べたような意味の Λ^* の分解を考えている．

$$\Lambda^*=\frac{\prod_{i=1}^{p}(1-\theta_i)}{1-\phi}=\left[\frac{1-\sum_{i=1}^{p}\alpha_i^{*2}\theta_i^2/\phi}{1-\phi}\right]\left[\frac{\prod_{i=1}^{p}(1-\theta_i)}{1-\sum_{i=1}^{s}\alpha_i^{*2}\theta_i^2/\phi}\right] \tag{7·15}$$

$$=\left[\frac{\phi}{(1-\phi)\sum_{j=1}^{p}\alpha_j^{*2}\theta_j/(1-\theta_j)}\right]\left[\frac{\prod_{i=1}^{p}(1-\theta_i)}{\phi}\sum_{i=1}^{p}\frac{\alpha_j^{*2}\theta_j}{1-\theta_j}\right] \tag{7·16}$$

但し hypothetical discriminant function は，標本の canonical variate vector $\boldsymbol{Z}'=(Z_1, Z_2, \cdots, Z_p)$ (Z_i は θ_i に対応する) 及び $\boldsymbol{a}^{*\prime}\boldsymbol{a}^*=1$ なる $\boldsymbol{a}^*$ で $\eta=\boldsymbol{a}^{*\prime}\boldsymbol{Z}$ と表わした上で考える．こうしても一般性を失わないことは容易にわかる．(7·15), (7·16) の第1因子が η と data との一致性をみるもので，第2因子が colinearlity からの距りをはかるものである．$p=2$ の場合には，(7·15), (7·16) それぞれ

$$\Lambda^*=\left[1-\frac{(\phi-\theta_1)(\theta_2-\phi)}{\phi(1-\phi)}\right]\left[1+\frac{\theta_1\theta_2/\phi}{(1-\theta_1)(1-\theta_2)/(1-\phi)}\right]^{-1} \tag{7·17}$$

$$=\left[\frac{1-\theta_1\theta_2/\phi}{(1-\theta_1)(1-\theta_2)/(1-\phi)}\right]^{-1}\left[1-\frac{\theta_1\theta_2}{\phi}\right] \tag{7·18}$$

となるが，何れの第1因子も近似的には $(1-\theta_2)/(1-\phi)$ に，何れの第2因子も近似的には $(1-\theta_1)$ に主として依存し，(7·14) の近似的分解に対応する．E. J. Williams は (7·15), (7·16) を η の影響を回帰を利用して除いた後の特有根 $\lambda_1\leqq\lambda_2\leqq\cdots\leqq\lambda_{p-1}$ を用いて表わしているが，これの方が意味がはっきりするかも知れない．

$$\Lambda^*=\frac{\prod_{i=1}^{p}(1-\theta_i)}{(1-\phi)}=\prod_{i=1}^{p-1}(1-\lambda_i) \tag{7·19}$$

$$=\left[\frac{\sum_i\theta_i-\sum_j\lambda_j}{\phi}\right]\left[\frac{\phi\prod_j(1-\lambda_j)}{\sum_i\theta_i-\sum_j\lambda_j}\right] \tag{7·15$'$}$$

$$=\left[\frac{\sum_i\Theta_i-\sum_j\Lambda_j}{\Phi}\right]^{-1}\left[\frac{\Phi\prod_j(1+\Phi_j)}{\sum_i\Theta_i-\sum_j\Lambda_j}\right]^{-1} \tag{7·16$'$}$$

但し $\Theta_i=\theta_i/(1-\theta_i)$, $\Lambda_j=\lambda_j/(1-\lambda_j)$, $\Phi=\phi/(1-\phi)$ である．θ_i と λ_j は，

$$\sum_i\frac{\alpha_i^{*2}(1-\theta_i)}{\theta_i-\lambda_j}=0,\qquad (j=1, 2, \cdots, p-1)$$

なる関係をもっている． Bartlett は (7·15), (7·16) の exact factorization に対して，近似 χ^2 解析を適用している．

	自由度	χ^2.
(a) η と data との距り	$p-1$	$-\left\{(n-1)-\frac{1}{2}[(p-1)+2]\right\}\log\frac{1-\sum\alpha_i^{*2}\theta_i/\phi}{1-\phi}$
(b) colinearlity からの距り	$(p-1)(k-2)$	$-\left\{(n-2)-\frac{1}{2}[(p-1)+(k-1)]\right\}\log\frac{\Pi(1-\theta_i)}{1-\sum\alpha_i^{*2}\theta_i/\phi}$
(a)′ η と data との距り	$p-1$	$-\left\{(n-k+1)-\frac{1}{2}[(p-1)+2]\right\}\log\frac{\phi}{(1-\phi)\sum\alpha_j^{*2}\theta_j/(1-\theta_j)}$
(b)′ colinearlity からの距り	$(p-1)(k-2)$	$-\left\{(n-1)-\frac{1}{2}[(p-1)+(k-1)]\right\}\log\frac{\Pi(1-\theta_i)}{\phi}\sum\frac{\alpha_j^{*2}\theta_j}{1-\theta_j}$

Williams [175; 1952] は，$s=2$ の場合について特に詳しく論じている．例えば $p=2(<k)$ の時，ϕ をとめた条件の下で θ_1, θ_2 の同時分布は

$$(720)\qquad K\frac{(\theta_1\theta_2)^{\frac{1}{2}(k-4)}\{(1-\theta_1)(1-\theta_2)\}^{\frac{1}{2}(n-k-2)}(\theta_2-\theta_1)}{\phi^{\frac{1}{2}(k-3)}(1-\phi)^{\frac{1}{2}(n-k-1)}\sqrt{(\phi-\theta_1)(\theta_2-\phi)}}d\theta_1 d\theta_2$$

と求められており，従って

$$(7\cdot21)\qquad v_1=\frac{(\phi-\theta_1)(\theta_2-\phi)}{(1-\phi)(\phi-\theta_1\theta_2)},\qquad v_2=\frac{\theta_1\theta_2}{\phi}$$

の同時分布は

$$(7\cdot22)\qquad K'v_1^{-\frac{1}{2}}(1-v_1)^{\frac{1}{2}(n-k-2)}dv_1\cdot v_2^{\frac{1}{2}(k-4)}(1-v_2)^{\frac{1}{2}(n-k-1)}dv_2$$

となる．これは ϕ を含んでいないから，条件に無関係に v_1 と v_2 は独立である．更にこれより

$$(7\cdot23)\qquad F_1=\frac{(n-k)v_1}{(1-v_1)},\qquad F_2=\frac{(n-k+1)v_2}{(k-2)(1-v_2)}$$

がそれぞれ自由度 $(1, n-k)$, $(k-2, n-k+1)$ の F 分布に従うことがわかり，しかも両者は独立である． Williams [176; 1955] は更に同様の考え方を，与えられた一つの linear functional relationship とデータとの一致性をみることに用いている．

またいくつかの特有根を除いた残りの有意性を調べることは，principal component analysis, factor analysis に対しても同様の方法で行われている．$\boldsymbol{x}'(1\times p)=(x_1, x_2, \cdots, x_p)$ を共分散行列 $\boldsymbol{\Lambda}$ を持つ p 変数正規分布に従うベクトルとする．$\boldsymbol{L}$ を自由度 n を持つ標本共分散行列とし，これの特有根を $l_1\geqq l_2\geqq\cdots\geqq l_p$*) とする時，$\boldsymbol{\Lambda}$ の特有根 $\lambda_1\geqq\lambda_2\geqq\cdots\geqq\lambda_p$*) に関する次の仮設を検定することが問題とされる．

(◉) H: $\begin{cases}\lambda_1>\lambda_2>\cdots>\lambda_k \text{ を仮定し，これらの大きい } k \text{ 個の根の影響を除いた残} \\ \text{りの } p-k \text{ 個の根が等しい，すなわち，} \lambda_{k+1}=\lambda_{k+2}=\cdots=\lambda_p \text{ である．}\end{cases}$

D. N. Lawley [94; 1956] は，l_i の最初の k 個の set と，λ_i の最初の k 個の set との対応が確かと思われる程 n が大きい場合を取り扱い，Bartlett の結果を拡張している．今仮設における共通の値を $\lambda(>0)$ として結果を示すと，

(a) λ が既知の場合には，

$$(7\cdot24)\qquad -B\left\{\log\left(\frac{l_{k+1}l_{k+2}\cdots l_p}{\lambda^{p-k}}\right)+(p-k)-\frac{(l_{k+1}+l_{k+2}+\cdots+l_p)}{\lambda}\right\}$$

が近似的に自由度 $\frac{1}{2}(p-k)(p-k+1)$ の χ^2 分布に従うことを利用する．ここに常数 B は$q=p-k$ として

*) $l_i, \lambda_j (i=1, \cdots, p)$ はそれぞれ標本，母集団における i 番目の principal component の分散でもある．

(7·25) $$B=(n-k)-\frac{1}{6}\left(2q+1-\frac{2}{q+1}\right)-\frac{1}{q+1}C+D$$

である．但し $C=\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{\lambda_i}{\lambda_i-\lambda}\right)^2$，$D=\lambda^2\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{(\lambda_i-\lambda)^2}$ で，若し $\lambda_1,\cdots,\lambda_k$ が λ に比し大きければ，$D\doteqdot 0$，$C\doteqdot k^2$ とされるし，そうでなければ推定量 $l_i(i=1,\cdots,k)$ を用いて評価される．

（b） λ が未知の時には使用される統計量は

(7·26) $$-B'\left[\log(l_{k+1}l_{k+2}\cdots l_p)-(p-k)\log\left\{\frac{(l_{k+1}+l_{k+2}+\cdots+l_p)}{(p-k)}\right\}\right]$$

で，これが近似的に自由度 $\frac{1}{2}(p-k-1)(p-k+2)$ の χ^2 分布に従う．B' は

(7·27) $$B'=(n-k)-\frac{1}{6}\left(2q+1+\frac{2}{q}\right)+\lambda^2\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{(\lambda_i-\lambda)^2}$$

で，λ が $\lambda_1,\cdots,\lambda_k$ に比して小さいならば最後の項は無視されるが，そうでない場合には，λ_i の代りに l_i を，λ の代りに $(l_{k+1}+l_{k+2}+\cdots+l_p)/(p-k)$ を用いて評価される．

相関行列 $\boldsymbol{R}$ にたいして上の同様の考察が行われる時には（最初の変数を標本分散を使って標準化し後に主成分を求める場合である），overall な仮設 $\boldsymbol{P}$ 母集団相関行列)$=\boldsymbol{I}$ の近似 χ^2 検定は，§4・3 の (4·27) を使ってなされるが，最初の k 個の principal components の影響が除かれた後（最初の k 個の $\boldsymbol{P}$ の根が distinct である時その影響を除いた後），残りの変量の均一性を見る時に使用される統計量は（Bartlett [15; 1950, 19; 1954]）

(7·28) $$\begin{cases}\chi^2 = -\left\{n-\frac{1}{6}(2p+5)-\frac{2}{3}k\right\}\log R_{p-k}\\ R_{p-k}=|\boldsymbol{R}|\Big/\left\{r_1r_2\cdots r_k\left[\frac{p-r_1-r_2-\cdots-r_k}{p-k}\right]^{p-k}\right\}\end{cases}$$

である．但し $r_1,\cdots,r_k$ は $\boldsymbol{R}$ の最初の k 個の根である．これが近似的に χ^2 分布に従うとされるのであるが，これに当てられる自由度は，各変数から k 個の主成分により取り除かれる分散の量に依存するのである．そしてその最大値は $\frac{1}{2}(p-k-1)(p-k+2)$ であることが示されており*)，これに関し Lawley [94; 1956] が近似的な考察を行っている（後出）．しかし普通には，他の case と同様に，overall の (7·28) に対する自由度 $\frac{1}{2}p(p-1)$ の p を k だけおとした $\frac{1}{2}(p-k)(p-k-1)$ が用いられるようである．

さて最後に標本特有根の non-null case の同時分布について最近の結果をまとめておこう．正確な分布を求める際の，標本における根と母集団における根との対応に関する困難をさけた大標本の場合からみていく．遠く Hotelling [61; 1936] Hsu [66; 1941b] の canonical correlation の大標本理論より可成り長い間，この方面の仕事はなされなかったが，最近 Lawley [94; 1956, 95; 1959] が，既述の近似 χ^2 解析における multiplying factor を求めることに関連して次の漸近公式を得ている．一組の変数の internal analysis の場合，すなわち，一つの共分散行列の場合，母集団特有根が (◉) の H の関係にあるものとすると（l_i は標本特有根，λ_i は母集団特有根），

(7·29) $$E(l_\alpha)=\lambda_\alpha+\frac{\lambda_\alpha}{n}\sum_{i=1}^{p}{}'\frac{\lambda_i}{\lambda_\alpha-\lambda_i}+0\left(\frac{1}{n^2}\right),\quad \alpha=1,2,\cdots,k$$

(7·30) $$\mathrm{var}(l_\alpha)=\frac{2\lambda_\alpha{}^2}{n}\left\{1-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p}{}'\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_\alpha-\lambda_i}\right)^2+0\left(\frac{1}{n^3}\right),\quad \alpha=1,2,\cdots,k\right.$$

を得る．ここに $\sum'$ は α を除いた和の記号である．これより l_α より bias の小さい λ_α の推定量

---

*) 母集団特有根の残りの $(p-k)$ の共通の値が0に近づき $\boldsymbol{P}$ のすべての要素が1に近づく時に相当している．

として

$$(7\cdot31)\qquad \hat{\lambda}_\alpha=l_\alpha\left\{1-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}{}'\frac{l_i}{l_\alpha-l_i}-\frac{p-k}{n}\frac{\lambda}{l_\alpha-\lambda}\right\}\qquad \alpha=1,2,\cdots,k$$

を得る．これの bias は $O(1/n^2)$ である．λ は，必要なら，本標からの推定量でおきかえられる．$\hat{\lambda}_\alpha$ の分散は

$$(7\cdot32)\qquad \mathrm{var}(\hat{\lambda}_\alpha)=\frac{2\lambda_\alpha^2}{n}\left\{1+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p}{}'\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_\alpha-\lambda_i}\right)^2\right\}+O\left(\frac{1}{n^3}\right),\qquad \alpha=1,2,\cdots,k$$

である．

変数の p—set と q—set の間の canonical correlation を，母集団では ρ_i，標本では $r_i, i=1,2,\cdots,s$，$s=\min(p,q)$ と表わす．(7·10) 及び (7·11) の θ_i,λ_i は $\theta_i=r_i^2,\lambda_i=\rho_i^2$ である．

$$(7\cdot33)\qquad \begin{cases} E(r_\alpha)\ =\rho_\alpha+\dfrac{1-\rho_\alpha^2}{2\rho_\alpha}\left\{p+q-2-\rho_\alpha^2+2(1-\rho_\alpha^2)\displaystyle\sum_i{}'\frac{\rho_i^2}{\rho_\alpha^2-\rho_i^2}\right\}\Big/n+O(n^{-2})\\ \mathrm{var}(r_\alpha)=(1-\rho_\alpha^2)^2/n+O(n^{-2})\\ \kappa_3(r_\alpha)\ =-6\rho_\alpha(1-\rho_\alpha^2)^3/n^2+O(n^{-3})\\ \kappa_4(r_\alpha)\ =-6(1-\rho_\alpha^2)^4(1-12\rho_\alpha^2)/n^3+O(n^{-4}) \end{cases}$$

$\kappa_3(r_\alpha),\kappa_4(r_\alpha)$ は r_α の第 3，第 4 次の cumulant である．r_α の分散は ρ_α 及び $\rho_\alpha^2-\rho_i^2$ に可成り depend しているが，n^{-2} の項が非常に複雑であり省略されている．特別の場合として，$\rho_s\equiv\rho,\rho_1=\cdots=\rho_{s-1}=0$ の時には

$$(7\cdot34)\qquad E(r_s)=\rho+(1-\rho^2)(p+q-2-\rho^2)/2\rho+O(n^{-2})$$

極限分布に関しては，T. W. Anderson [5; 1951b] が回帰論に関連して可成り詳しい議論を展開している．併し結局は Hsu の極限分布の導出を精密にしたものと言える．唯ここで特有ベクトルの分布が取り扱われているのは注目してよいだろう．

さて今まで時々困難を訴えてきた特有根の，non-null case における exact sampling distribution の導出であるが，これは Roy [139; 1942], Bartlett [13; 1947a] の仕事以来最近に至るまで殆んど進歩がみられず，現在でも，少くとも実用的になるには未だ程遠いと言える．多変数解析における多くの検定では，統計量が，(7·1) なる同時分布をもつ特有根の symmetric function となる．しかし検定の power，其の他の性質を調べる時になると，統計量を構成する特有根の non-null case 分布がどうしても必要となるだろう．しかもこの分布は問題とする仮設により異なってくる．この問題の exact な解析が実際に取扱い得ない複雑なものとしても，それを土台として，取り扱いに耐える近似（極限におけるものではない）を求めることは，極めて重要なことである．

さて p 個の変数の組と q 個の変数の組の間における，canonical correlation coefficients の non-null case の分布についてみよう．$q\geqq p$ とし，標本の大いさを $n+1(>p+q)$ とする．Bartlett [13; 1947a] は，Fisher [40; 1928] が重相関係数の一般の標本分布を求めた時の方法を用いて次の結果を得た．両方の変数の組とも正規分布に従う場合を考える．$\rho_1,\rho_2,\cdots,\rho_p$; $r_1,r_2,\cdots,r_p$ をそれぞれ母集団，標本における canonical correlations とし，$s_1,s_2,\cdots,s_p$ で母集団の canonical variates $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_p)$; $(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_q)$ の対応する成分 $\xi_i,\eta_i(i=1,2,\cdots,p)$ の間の標本相関係数（普通の意味のもの）とするとき，$r_1,r_2,\cdots,r_p$ の同時分布が

$$(7\cdot35)\qquad \begin{aligned} &\phi(r_1,\cdots,r_p|\rho_1=0,\cdots,\rho_p=0)\times\\ &\times\int_{(s_1,\cdots,s_p)}\cdots\int\prod_{i=1}^{p}\{(1-\rho_i^2)^{n/2}{}_2F_1(n/2,n/2;1/2;\ \rho_i^2s_i^2)\}\times\\ &\times p(s_1,\cdots,s_p|r_1,\cdots,r_p;\rho_1=0,\cdots,\rho_p=0)ds_1ds_2\cdots ds_p \end{aligned}$$

に依って得られる．従って任意の正の整数の組 $(t_1,t_2,\cdots,t_p)$ に対して，条件付きのモーメント

$$(7\cdot36)\qquad \mu(t_1,t_2,\cdots,t_p)\equiv E\{(s_1^2)^{t_1}(s_2^2)^{t_2}\cdots(s_p^2)^{t_p}|r_1,\cdots,r_p\}$$

$$= \int_{(s_1,\cdots,s_p)} \cdots \int (s_1^2)^{t_1}(s_2^2)^{t_2}\cdots(s_p^2)^{t_p} p(s_1,\cdots,s_p|r_1,\cdots,r_p;\ \rho_1=0,\cdots,\rho_p=0)ds_1\cdots ds_p$$

を計算できればよい．(7·35) における $\phi(r_1,\cdots,r_p|\rho_1=0,\cdots,\rho_p=0)$ は，null case における $r_1,\cdots,r_p$ の同時分布，すなわち，

$$\phi(r_1,\cdots,r_p|\rho_1=0,\cdots,\rho_p=0)=C\prod_{i=1}^{p}\{(r_i^2)^{(q-p-1)/2}(1-r_i^2)^{(n-q-p-1)/2}\}\prod_{i<j}(r_i^2-r_j^2)\prod_{i=1}^{p}dr_i^2 \tag{7·37}$$

である．但し r_i は descending order で表わし，

$$C=\pi^{p/2}\prod_{i=0}^{p-1}\left\{\Gamma\left(\frac{n-i}{2}\right)\Big/\Gamma\left(\frac{p-i}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q-i}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-q-i}{2}\right)\right\} \tag{7·38}$$

である．Bartlett は零でない根が唯一つの場合の exact distribution を求めると共に，$\mu(1,1)$, $\mu(2,1)$, $\mu(2,2)$, $\mu(3,1)$ 及び $\mu(1,1,1)$ を与えている．

最近 A. G. Constantine and A. T. James [74; 1958] は注目に値する導出法を与えている．まづ原の正規分布を canonical form として出発し，これの n 個の観測についての同時分布を考える．すなわち

$$\prod_{i=1}^{p}\{(2\pi)^{-n}(1-\rho_i^2)^{-n/2}\exp[-(\boldsymbol{\xi}_i'\boldsymbol{\xi}_i-2\rho_i\boldsymbol{\xi}_i'\boldsymbol{\eta}_i+\boldsymbol{\eta}_i'\boldsymbol{\eta}_i)/2(1-\rho_i^2)]\prod_{\alpha=1}^{n}d\xi_{i\alpha}d\eta_{i\alpha}\}\times \tag{7·39}$$
$$\times\prod_{j=p+1}^{q}\{(2\pi)^{-n/2}\exp[-\boldsymbol{\eta}_j'\boldsymbol{\eta}_j/2]\prod_{\alpha=1}^{n}d\eta_{j\alpha}\}$$

ここに $\boldsymbol{\xi}_i'=(\xi_{i1},\xi_{i2},\cdots,\xi_{in})$, $i=1,2,\cdots,p$; $\boldsymbol{\eta}_j'=(\eta_{j1},\eta_{j2},\cdots,\eta_{jn})$, $j=1,2,\cdots,q$ は，canonical veriates ξ_i,η_j の標本の自由度 n に対応するものである．(7·39) を $r_1,\cdots,r_p$ と他の変数に変換し，$r_1,\cdots,r_p$ 以外の変数を積分して消去しようというのが方針である．$\boldsymbol{\tau}_i,\boldsymbol{\sigma}_j$ をそれぞれ $\boldsymbol{\xi}_i,\boldsymbol{\eta}_j$ に沿った unit vectors, w_i, z_j をそれらの長さとし

$$\boldsymbol{\xi}_i=w_i\boldsymbol{\tau}_i,\ i=1,2,\cdots,p;\ \boldsymbol{\eta}_j=z_j\boldsymbol{\sigma}_j,\ \ j=1,2,\cdots,q \tag{7·40}$$

なる変換を施し，w_i, z_j を積分により消去すれば

$$\prod_{i=1}^{p}\{(1-\rho_i^2)^{n/2}{}_2F_1(n/2,n/2;\ 1/2;\ \rho_i^2s_i^2)+\text{odd function of } s_i\}\times \tag{7·41}$$
$$\times\prod_{i=1}^{p}\{\Gamma(n/2)/2\pi^{n/2}\}dS(\boldsymbol{\tau}_i)\prod_{j=1}^{q}\{\Gamma(n/2)/2\pi^{n/2}\}dS(\boldsymbol{\sigma}_j)$$

となる．ここに ${}_2F_1$ は超幾何函数，$dS(\boldsymbol{\tau}_i), dS(\boldsymbol{\sigma}_j)$ は n-space における unit sphere の上の面積要素である．さて $\boldsymbol{\tau}_i, i=1,2,\cdots,p$; $\boldsymbol{\sigma}_j, j=1,2,\cdots,q$ を r_i で表現しなければならない．今 n-space において $\boldsymbol{\tau}_1,\boldsymbol{\tau}_2,\cdots,\boldsymbol{\tau}_p$ によって張られる p-plane を $\mathfrak{p}$, $\boldsymbol{\sigma}_1,\boldsymbol{\sigma}_2,\cdots,\boldsymbol{\sigma}_q$ によって張られる q-plane を $\mathfrak{q}$ で表わせば，この 2 つの plane は確率 1 で $\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{y}_i=r_i$, $\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{y}_j=0$, $(i\neq j)$ なる orthonormal な $\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{y}_i$ $(i=1,2,\cdots,p)$ を決定する．$\mathfrak{q}$ を張る orthonormal set を完成するように $\boldsymbol{y}_{p+1},\cdots,\boldsymbol{y}_q$ を定義すると，これら $\boldsymbol{x}_i, i=1,\cdots,p$; $\boldsymbol{y}_j, j=1,\cdots,q$ は取りもなおさず標本の canonical variates である．

$$\boldsymbol{T}=(\boldsymbol{\tau}_1,\cdots,\boldsymbol{\tau}_p);\ \boldsymbol{\Sigma}=(\boldsymbol{\sigma}_1,\cdots,\boldsymbol{\sigma}_q);\ \boldsymbol{X}=(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_p),\ \ \boldsymbol{Y}=(\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_q)$$

とすれば

$$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{X}\boldsymbol{A},\qquad \boldsymbol{\Sigma}=\boldsymbol{Y}\boldsymbol{B} \tag{7·42}$$

なる変換が存在する．ここに $\boldsymbol{A}(p\times p)=(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_p)$, $\boldsymbol{B}=(q\times q)=(\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_q)$ は $\boldsymbol{T}'\boldsymbol{T}=\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{\Sigma}'\boldsymbol{\Sigma}=\boldsymbol{B}'\boldsymbol{B}$ であることから，$\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{b}_j$ が unit vector であるような行列である．この変換により

$$\prod_{i=1}^{p}ds(\boldsymbol{\tau}_i)\cdot\prod_{j=1}^{q}ds(\boldsymbol{\sigma}_j)=|\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}|^{(n-p)/2}\prod_{i=1}^{p}dS(\boldsymbol{a}_i)\cdot|\boldsymbol{B}'\boldsymbol{B}|^{(n-q)/2}\prod_{j=1}^{q}dS(\boldsymbol{b}_j)\cdot d\mathfrak{p}\,d\mathfrak{q} \tag{7·43}$$

と計算される．ここに $dS(\boldsymbol{a}_i), dS(\boldsymbol{b}_j)$ は p-space における unit sphere の上の面積要素であり，$d\mathfrak{p}, d\mathfrak{q}$ はそれぞれ n-space における p-planes, q-planes の作る Grassmann manifold の上の invariant measure を表わす differential form である．更に $d\mathfrak{p}d\mathfrak{q}$ を r_i と他の変数によって表わし，

後者を積分により消去すれば，$K_pK_q\phi(r_1, r_2, \cdots, r_p|\rho_1=0, \cdots, \rho_p=0)$ となり，斯くして，(7·41), (7·43) より $r_1, \cdots, r_p$ の同時分布は

$$(7\cdot44)\qquad \phi(r_1, \cdots, r_p|\rho_1=0, \cdots, \rho_p=0)\int_A\int_B \prod_{i=1}^{p}\{(1-\rho_i^2)^{n/2}{}_2F_1(n/2, n/2;\ 1/2;\ \rho_i^2 s_i^2)\}\times$$
$$\times k_p|\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}|^{(n-p)/2}\prod_{i=1}^{p} dS(\boldsymbol{a}_i)\cdot k_q|\boldsymbol{B}'\boldsymbol{B}|^{(n-q)/2}\prod_{j=1}^{q} dS(\boldsymbol{b}_j)$$

ここに $k_v=\prod_{i=1}^{v} G(n-i+1)/G(n)G(i),$, $v=p, q$; $G(i)=2\pi^{i/2}/\Gamma(i/2)$. (7·41) における s_i の odd function の項は，積分をとると 0 になってしまう．すなわち，s_i の任意の odd function は平均 0 となるのである．かくして $r_i, i=1, \cdots, p$ の同時分布の最終の形としては，$\mu(t_1, t_2, \cdots, t_p)=E((s_1^2)^t(s_2^2)^t\cdots(s_p^2)^t)$ を求めることが要求されるが，これは Bartlett の結果と同等である．しかし James の導出では平均操作が

$$(7\cdot45)\qquad k_p|\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}|^{(n-p)/2}dS(\boldsymbol{a}_1)\cdots dS(\boldsymbol{a}_p);\ k_q|\boldsymbol{B}'\boldsymbol{B}|^{(n-q)/2}dS(\boldsymbol{b}_1)\cdots dS(\boldsymbol{b}_q)$$

なる分布に関してなされることがはっきりさせられている．且つ容易に分る如く

$$(7\cdot46)\qquad s_i=\boldsymbol{\tau}_i'\boldsymbol{\sigma}_i=\boldsymbol{a}_i'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y}\boldsymbol{b}_i=a_{i1}b_{i1}r_1+a_{i2}b_{i2}r_2+\cdots+a_{ip}b_{ip}r_p$$

であるから，$s_i^2, i=1, 2, \cdots, p$ の monomial の平均である $\mu(t_1, \cdots, t_p)$ を求めることは，$a_{ij}b_{ij}$ についての monomial $m(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ の $r_i, i=1, \cdots, p$ をとめた時の平均 $E\{m(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})\}$ が求めればよい．$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ と $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ が独立に分布することより，$E\{m(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})\}=E\{m(\boldsymbol{A})\}E\{m(\boldsymbol{B})\}$ であり，従って，$E\{m(\boldsymbol{A})\}$ を求めればよい．(7·45) からわかる如く $E\{m(\boldsymbol{B})\}$ は $E\{m(\boldsymbol{A})\}$ の p を q にかえればよいからである．James and Constantine はまず orthogonal group の上で monomial $m(\boldsymbol{A})$ の平均を取ることにより，問題を簡単にして $E\{m(\boldsymbol{A})\}$ を計算する方法を示すと共に，$\mu(2, 1, 1)$, $\mu(1, 1, 1, 1)$ を計算するに必要な項の表を与え，Bartlett の仕事と合わせて $t_1+t_2+\cdots+t_p=4$ までのモーメントを完成させている．James and Constantine は同じ論文で，q 個の変数の組が fixed variate である場合を同様の方法で取り扱っている．この場合には Stiefel manifold の上の invariant measure が使われる．

以上大筋を説明した導出法においては，Grassmann manifold, Stiefel manifold の上の invariant measure を表わはす微分形式が基本的役割を果たしている．A. T. James [71; 1954] はこれら微分幾何における概念が正規多変数解析に有力な武器となることを認め，統計解析に適した形で必要な部分を要約し，更に，null-case の canonical correlation coefficients の分布の導出，及び多変数正規標本を分解することえの応用を可成り詳しく論じている．

先に $\mu(t_1, t_2\cdots t_p)$ を求める際の monomial の平均 $E\{m(\boldsymbol{A})\}, E\{m(\boldsymbol{B})\}$ の計算のために orthogonal group の上で $m(\boldsymbol{A})$ を平均した．これは (7·45) の分布が

$$\boldsymbol{A}\rightarrow\boldsymbol{H}\boldsymbol{A}\qquad \boldsymbol{H}\text{: 直交変換}$$

なる変換の下に invariant であるから $E\{m(\boldsymbol{A})\}=E\{m(\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{A})\}$ であり，従って，orthogonal group $\mathfrak{Y}$ の上の invariant measure を $V(\boldsymbol{H})$ とすれば，(但し $V(\mathfrak{Y})=1$)

$$(7\cdot47)\qquad E\{m(\boldsymbol{A})\}=\int_{\mathfrak{Y}}E\{m(\boldsymbol{A})\}dV(\boldsymbol{H})=\int_{\mathfrak{Y}}E\{m(\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{A})\}dV(\boldsymbol{H})$$
$$=E\int_{\mathfrak{Y}}m(\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{A})dV(\boldsymbol{H})$$
$$=E\{\mathfrak{M}\,m(\boldsymbol{A})\},\qquad \mathfrak{M}\,m(\boldsymbol{A})=\int_{\mathfrak{Y}}m(\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{A})dV(\boldsymbol{H}),$$

となる．ここに $\mathfrak{M}$ は group の上で平均をとる線型作用素である．これに関して A. T. James [72; 1955a] は一般的な形

$$(7\cdot48)\qquad \psi(\boldsymbol{Z})=\int_{\mathfrak{Y}}\exp\{\mathrm{tr}(\boldsymbol{H}'\boldsymbol{Z})\}dV(\boldsymbol{H})$$

を評価する問題を取り扱っている．これは James [73; 1955b] が，非心 Wishart distribution を求めるために評価すべく提起した積分である．$\psi(\boldsymbol{Z})$ は次の性質を持っている．

(a) $\psi(\boldsymbol{Z})$ は $\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z}$ の特有根の対称函数である．

(b) $\psi(\boldsymbol{Z})$ は上の特有根のすべての値に対して収斂する多重冪級数に展開し得る．

(c) $\Delta\psi=\psi,\qquad \Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial Z_{11}{}^2}+\cdots\cdots+\dfrac{\partial^2}{\partial Z_{n1}{}^2}$

今 (7·48) において $\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{AC}'$ とおけば ($\boldsymbol{Z}:p\times p$, $\boldsymbol{A}:p\times p$, $\boldsymbol{C}:p\times p$)

$$\psi(\boldsymbol{AC}')=\int_{\mathfrak{Y}}\exp\{\mathrm{tr}(\boldsymbol{H}'\boldsymbol{AC}')\}dV(\boldsymbol{H})=\int_{\mathfrak{Y}}\exp\{\mathrm{tr}(\boldsymbol{C}'\boldsymbol{H}'\boldsymbol{A})\}dV(\boldsymbol{H})$$

故に

$$(7\cdot49)\qquad \mathfrak{M}\exp\{\mathrm{tr}(\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A})\}=\int_{\mathfrak{Y}}\exp\{\mathrm{tr}(\boldsymbol{C}'\boldsymbol{H}'\boldsymbol{A})\}dV(\boldsymbol{H})$$

右辺の $\exp\{\mathrm{tr}(\boldsymbol{C}'\boldsymbol{H}'\boldsymbol{A})\}$ を展開すれば，$(\boldsymbol{H}'\boldsymbol{A})$ の要素についての monomial $m(\boldsymbol{H}'\boldsymbol{A})$ に，$\boldsymbol{C}$ の対応する要素の monomial $m(\boldsymbol{C})$ かけた形の総べての項が現われる．一方左辺は性質 (a), (b) により，$\boldsymbol{C}'\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}$ の特有根 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_p$ の elementary symmetric functions $r_1=\sum_i\lambda_i$, $r_2=\sum_{i<j}\lambda_i\lambda_j$, $\cdots$, $r_n=\lambda_1\lambda_2,\cdots,\lambda_p$ の 多重冪級数に explicit に展開される．かくしてこれら両辺の展開で，$m(\boldsymbol{C})$ の係数を等しいとおくことにより $\mathfrak{M}m(\boldsymbol{A})$ を求めることが出来るのである．$\mathfrak{M}m(\boldsymbol{A})$ を求める所以は，これが任意の直交変換の下で不変であることにある．

最後に一つの標本共分散行列 $\boldsymbol{S}(p\times p)$ の特有根の general distribution にふれておく．母集団は p 変数正規分布であり，$\boldsymbol{S}$ のもつ自由度を n とする．すると $\boldsymbol{S}$ は

$$(7\cdot50)\qquad (2\pi)^{-\frac{1}{2}np}\left\{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{XX}')\right\}|\boldsymbol{A}|^{-\frac{n}{2}}\prod_{i,j}dx_{ij}$$

なる分布に従う $p\times n$ 行列 $\boldsymbol{X}$ により，$n\boldsymbol{S}=\boldsymbol{A}\equiv\boldsymbol{XX}'$ と表わされる．$\boldsymbol{XX}'$ の特有根を $r_1\geqq r_2\geqq\cdots\geqq r_p$ とすれば，$\boldsymbol{A}=\sigma^2\boldsymbol{I}_p$ なる null case の $r_1,r_2,\cdots,r_p$ の同時分布は

$$(7\cdot51)\qquad \begin{cases}\phi(r_1,\cdots,r_p|\sigma^2\boldsymbol{I}_p)=K_{np}(2\pi)^{-\frac{1}{2}np}(\sigma^2)^{-\frac{1}{2}np}\exp\left(-\dfrac{1}{2\sigma^2}\displaystyle\sum_{i=1}^{p}r_i\right)\prod_{i=1}^{p}r_i^{\frac{1}{2}(n-p-1)}\prod_{i<j}^{p}(r_i-r_j)\\[2ex] \qquad\qquad K_{np}{}^{-1}=\pi^{-\frac{1}{2}(n+1)p}\displaystyle\prod_{i=1}^{p}\Gamma\left(\frac{1}{2}i\right)\Gamma\left[\frac{1}{2}(n-i+1)\right]\end{cases}$$

であることはよく知られている．一般の $\boldsymbol{A}$ の時に対して A. T. James [75; 1960] は，再び orthogonal group $\mathfrak{Y}$ の上の normalized invariant measure $d(\boldsymbol{H})$ に関して平均する方法を適用し

$$(7\cdot52)\qquad \phi(r_1,\cdots,r_p|\boldsymbol{A})=(2\pi)^{-\frac{1}{2}np}|\boldsymbol{A}|^{-\frac{1}{2}n}K_{np}\int_{\mathfrak{Y}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{HAH}')\right\}d(\boldsymbol{H})\times\prod_{i=1}^{p}r_i^{\frac{1}{2}(n-p-1)}\prod_{i<j}^{p}(r_i-r_j)$$

なる結果を示すと共に，中に含まれる積分を評価する方法を与えている．すなわち $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ を $p\times p$ の symmetric な行列とする時

$$(7\cdot53)\qquad \int_{\mathfrak{Y}}\exp\left\{\mathrm{tr}(\boldsymbol{BHAH}')\right\}d(\boldsymbol{H})=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!\,1\cdot3\cdot5\cdots(2\nu-1)}\sum_{e\in\mathfrak{E}(\nu,p)}\frac{C(e)}{Z_e(\boldsymbol{I})}Z_e(\boldsymbol{B})Z_e(\boldsymbol{A})$$

となる．ここに $\mathfrak{E}(\nu,p)$ は ν の p 個より多くない部分への分割 $(\nu_1,\nu_2,\cdots)\equiv e$ の集合である．例えば $\nu=4$ の時には，$e_4=(4)$, $(3,1)$, (2^2), $(2,1^2)$, (1^4) である．$Z_e(\boldsymbol{A})$ は e に対応する zonal polynomial と言われるもので，$\boldsymbol{A}$ の特有根 $r_1,r_2,\cdots,r_p$ の power sum $w_j=\sum_{\alpha=1}^{p}r_\alpha{}^j$ についての多項式の形に表わされる．$C(e)$ は e に対して定まる常数である．

(7·53) を (7·52) に適用すれば $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{XX}'$ の特有根 r_i, $i=1,\cdots,p$ の，従って標本共分散行列 $\boldsymbol{S}$

の特有根 $l_i=r_i/n,\ i=1,\cdots,p$ の general distribution が得られる．級数の収斂を早めるために，常数 σ^2 を用い

$$(7\cdot54)\quad \begin{cases}\exp\left\{-\dfrac{1}{2}\operatorname{tr}(\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{HAH}')\right\}=\exp\left(-\dfrac{1}{2}\operatorname{tr}\dfrac{\boldsymbol{A}}{\sigma^2}\right)\exp\{\operatorname{tr}(\boldsymbol{BHAH}')\}\\ \boldsymbol{B}=\left(\dfrac{1}{2\sigma^2}\right)\boldsymbol{I}-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\end{cases}$$

として (7·53) を使う．σ^2 は級数の optimum convergence を得るために選ばれる．かくして $l_1, l_2,\cdots,l_p$ の同時分布として

$$(7\cdot55)\quad \left(\frac{n}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}np}\left(\prod_{i=1}^{p}\lambda_i^2\right)^{-\frac{1}{2}n}K_{np}\exp\left(-\frac{n}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{p}l_i\right)\cdot\prod_{i=1}^{p}l_i^{\frac{1}{2}(n-p-1)}\prod_{i<j}^{p}(l_i-l_j)\cdot$$
$$\times\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!\,1\cdot3\cdot5\cdots(2\nu-1)}\sum_{e\in\mathfrak{E}(\nu,p)}\frac{C(e)}{Z_e(\boldsymbol{I})}Z_e(\beta_1,\cdots,\beta_p)Z_e(l_1,\cdots,l_p)$$

なる形を得る．$\lambda_i^2, i=1,2,\cdots,p$ は $\boldsymbol{\Lambda}$ の特有根，

$$\beta_i=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma^2}-\frac{1}{\lambda_i^2}\right),\quad i=1,2,\cdots,p,$$

$Z_e(\beta_1,\cdots,\beta_p)$, $Z_e(l_1,\cdots,l_p)$は zonal polynomial で，$u_j=\sum_{\alpha=1}^{p}\beta_\alpha{}^j$, $w_j=\sum_{\alpha=1}^{p}l_\alpha{}^j$ の多項式として表わされ得る．James は $\nu=4$ までの分割 $e, Z_e(l_1,\cdots,l_p)$, $C(e)$, $Z_e(\boldsymbol{I})$ の表を与えている．

§8. そ の 他

今まで本論文の最初に設定した中心項目について述べてきたが，本節にそこで漏れた主な項目と分献を少しばかりまとめて，この綜合報告を終ることにしよう．勿論ここでも最近の 10 年間が対象である．

8・a　二つの母集団 π_1,π_2 の間の距離として H. Jeffrey [77; 1946, 78; 1948] が定義した

$$(8\cdot1)\qquad I_m=\int|f_1{}^{1/m}-f_2{}^{1/m}|^m\,dx,\qquad m \text{ は正の整数}$$

$$(8\cdot2)\qquad J=\int(f_1-f_2)\log\frac{f_1}{f_2}\,dx,$$

及び Kullback-Leibler の mean information-statistic として知られている

$$(8\cdot3)\qquad I(1:2)=\int f_1\log\frac{f_1}{f_2}\,dx$$

を取り扱ったものが可成りある．多変数解析に関係のある文献として

S. Kullback and R. A. Leibler [84; 1951], S. Kullback [85; 1952, 86; 1954, 87; 1956, 88; 1958], 渡辺寿夫 [170; 1952], V. S. Huzurbazar [68; 1955], S. W. Greenhouse [50; 1955], M. Kupperman [89; 1956, 90; 1958], S. R. Adke [1; 1958]

等がある．特に Kullback and Leibler は，(8・2) 及び (8・3) の定義を一般化すると共にそれ等の性質を論じており，Kullback は更に標本から $I(1:2)$, J を estimate する問題を取り扱った．そして多変数解析へ応用し，多くの重要な概念，統計量を統一的に取り扱い得ることを示している．Kupperman は標本から推定された $I(1:2)$, J の極限分布を求めている．以上の大部分のものは，Kullback の著書 [88; 1958] に系統的にまとめられているから，興味のある方は読まれるとよい．

8・b　ベクトル変量の観測において，missing observations が含まれている場合を取り扱っているものに，

G. L. Edgett [36; 1956], C. R. Rao [135; 1956], T. W. Anderson [7; 1957], G. E. Nicholson, Jr. [105; 1957]

がある.

8・c　二次形式に関する仕事は可成りある.

J. Ogawa [106; 1949], K. Matusita [98; 1949], H. Sakamoto [157; 1949], Y. Kawata [79; 1950]

は二次形式の独立性に関するもので，分散分析更に回帰論において分割された積和行列間の独立性をみるの重要なものである.

二次形式の標本分布に関するものには

S. Ceisser [28; 1957], J. Gurland [51; 1953, 52; 1955, 53; 1956], A. Grad and H. Solomon [49; 1955], A. G. Laurent [92; 1956], J. Pachres [115; 1955]

がある. 二次形式の分布は serial correlation の分布，二次判別函数の研究に重要なものである.

8・d　多変数解析と言っても，分布に関する議論の時には，殆んど正規分布に基礎をおいたものであったが，non-parametric なものも少しばかりある.

まづ Tchebycheff 型不等式の多変数への拡張であるが，これについては既に，石井恵一氏 [69; 1959] のすぐれた綜合報告の中に含まれているのでここでは省略する.

I. Blumen [25; 1958], J. L. Hodges, Jr. [58; 1955]

は二変数の sign test について研究しており，前者は母集団中央値が (ν, μ) であるかどうかを問題とし，後者は二つの母集団が異ったものかどうかを検定するのが問題とされている.

D. R. Whitney [171; 1951] は rank に基く二つの U-統計量 U_1, U_2 の同時分布の4次までのモーメントを与え，更に極限分布が正規であることを示している. D. A. S. Fraser and I. Guttan [46; 1956] は tolerance region の三つの型を定義すると共に，この領域の特性函数に対する解析的条件を導いている.

S. N. Roy and S. K. Mitra [150; 1956], S. N. Roy and M. A. Kastenbaum [151; 1956], S. N. Roy [152; 1957a]

は multi-way contingency table を取り扱ったものである. 但しここでは周辺和は固定されず，全体の標本の大きさだけが固定される. すなわち分散分析の場合の周辺平均が固定されないのに対応しているところから，non-parametric な分散分析の一般化などと呼んでいる. そしていろいろの独立性の test-statistics が定義され，それ等の極限分布が χ^2 の言葉で行われている.

以上の他に non-parametric なものとして

A. J. Harris [54; 1957], H. O. Lancaster [91; 1958], J. H. Chung and D. A. S. Fraser [29; 1958], I. Olkin [114; 1958], T. W. Anderson [6; 1955]

をつけ加えておく.

本報告を書くようにすすめられたのは 1959 年のことであったが，多忙にかこつけて意外に遅れてしまった. 筆者のわがままをききいれていただくと共に，種々の便宜を与えられた統計数理研究所第二研究部長林知己夫氏に，お詫びとともに感謝の意を表します. また文献の整理に多大の労をわづらわした統計数理研究所吉田薫氏にたいしても厚くお礼を申します.　統計数理研究所

Reffereces

[1] Adke, S. R. (1958) "A note on distances between two populations," *Sankhyā*, Vol. 19, pp. 195-200.

[2] Anderson, T. W. (1946) "The non-central Wishart distribution and certain problems of multivariate statistics," *Ann. Math. Stat.*, Vol. 17, pp. 409-431.

[3] Anderson, T. W. (1948) "The asymptotic distributions of the roots of certain determinantal equations," *J. Roy. Stat. Soc.*, B, Vol. 10, pp. 132-139.

[4] Anderson, T. W. (1951a), "Classification by multivariate analysis," *Psychometrika*, Vol. 16, pp. 31–50.

[5] Anderson, T. W. (1951b), "The asymptotic distribution of certain characteristic roots and vectors," *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, University of California Press, Berkeley and Los Angeles, pp. 103–130.

[6] Anderson, T. W. (1955), "A method of constructing non-parametric multivariate tests," (abstract) *Ann. Math. Stat.*, Vol. 26, p. 773.

[7] Anderson, T. W. (1957), "Maximum likelihood estimates for a multivariate normal distribution when some obserfations are missing," (abstract) *Jour. Amer. Stat. Asso.*, Vol. 52, pp. 200–203.

[8] Anderson, T. W. (1958), *Introduction to Multivariate Statistical Analysis*, New York, John Wiley and Sons.

[9] Arbous, A. G. and Sichel, H. S. (1952), "On the economics of a pre-screening technique for aptitude test batteries," *Psychometrika*, Vol. 17, pp. 331–346.

[10] Bartlett, M. S. (1933), "On the theory of statistical regression," *Proc. Roy. Soc. Edinb.*, Vol. 53, pp. 260–283.

[11] Bartlett, M. S. (1938), "Further aspects of the theory of multiple regression," *Proc. Camb. Phil. Soc.*, Vol. 34, pp. 30–40.

[12] Bartlett, M. S. (1939), "A note on tests of significance in multivariate analysis," *Proc. Camb. Phil. Soc.* Vol. 35, pp. 180–185.

[13] Bartlett, M. S. (1947a), "The general canonical correlation distribution," *Ann. Math. Stat.*, Vol. 18, pp. 1–17.

[14] Bartlett, M. S. (1947b), "Multivariate analysis," *J. Roy. Stat. Soc., Supple.*, Vol. 9, pp. 176–197.

[15] Bartlett, M. S. (1950), "Tests of significance in factor analysis," *Brit. J. Psych.* (Stat. Sec.), Vol. 3, pp. 77–85.

[16] Bartlett, M. S. (1951a), "The goodness of fit of a single hypothetical discriminant function in the case of several groups," *Ann. Eugen.*, Vol. 16, 199–214.

[17] Bartlett, M.S. (1951b), "The effect of standardization on a χ^2-approximation in factor analysis," *Biometrika*, Vol. 38, pp. 337–344.

[18] Bartlett, M. S. (1951c), "A further note on tests of significance in factor analysis," *Brit. J. Psych.* (Stat. Sec.), Vol. 4, pp. 1–2.

[19] Bartlett, M. S. (1954), "A note on multiplying factors for various χ^2-approximations," *J. Roy. Stat. Soc.*, B, Vol. 16, pp. 296–298.

[20] Bhapkar, V.P. (1959), "A note on multiple independence under multivariate normal linear models," *Ann. Math. Stat.*, Vol. 30, pp. 1248–1251.

[21] Birnbaum, Z. W. (1950), "On the effect of the cutting score when selection is performed against a dichotomized criterion," *Psychometrika*, Vol. 15, pp. 385–389.

[22] Birnbaum, Z.W., Paulson, E. and Andrews, F.C. (1950), "On the effect of selection performed on some coordinates of a multidimensional population," *Psychometrika*, Vol. 15, pp. 191–204.

[23] Birnbaum, Z. W. (1950), "Effect of linear truncation on a multinormal population," *Ann. Math. Stat.*, Vol. 21, pp. 272–279.

[24] Birnbaum, Z. W. and Chapman, D. G. (1950), "On Optimum selection from multinormal populations," *Ann. Math. Stat.*, Vol. 21, pp. 443–447.

[25] Blumen, I. (1958), "A new bivariate sign test," *Jour. Amer. Stat. Asso.*, Vol. 53, pp. 448–456.

[26] Bose, P. K. (1947), "Parametric relations in multivariate distributions," *Sankhyā*, Vol. 8, pp. 167–171.

[27] Box, G.E.P. (1949), "A general distribution theory for a class of likelihood criteria," *Biometrika*,

Vol. 36, pp. 317-346.

[28] Ceisser, S. (1957) "The distribution of the ratios of certain quadratic forms in time series," *Ann. Math. Stat.*, Vol. 28, pp. 724-730.

[29] Chung, J. H. and Fraser, D. A. S. (1958) "Randomization test for a multivariate two-sample problem," *Jour. Amer. Stat. Asso.*, Vol. 53, pp. 729-735.

[30] Cochran, W. G. and Bliss, C. I. (1948), "Discriminant functions with covariance," *Ann. Math. Stat.*, Vol. 19, pp. 151-176.

[31] Cochran, W. G. (1951), "Improvement by means of selection," *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, University of California Press, Los Angeles and Berkeley, pp. 449-470.

[32] Cohen, A. C., Jr. (1957), "Restriction and selection in multinormal distributions," *Ann. Math. Stat.*, Vol. 28, pp. 731-741.

[33] Cramér, H. (1946), *Mathematical Methods of Statistics*, Princeton, Princeton University Press.

[34] Deemer, W. L. and Olkin, I. (1951), "The Jacobians of certain matrix transformations useful in multivariate analysis. Based on lectures of P. L. Hsu at the University of North Carolina, 1947," *Biometrika*, Vol. 38, pp. 345-367.

[35] Des Raj (1955), "On optimum selections from multivariate populations," *Sankhyā*, Vol. 14, pp. 363-366.

[36] Edgett, G. L. (1956), "Multiple regression with missing observations among the independent variables," *Jour. Amer. Stat. Asso.*, Vol. 51, pp. 122-131.

[37] Elfving, G. (1947), "A simple method of deducing certain distributions connected with multivariate sampling," *Skand. Aktuarietidskr.*, Vol. 30, pp. 56-74.

[38] Fisher, R. A. (1915), "Frequency distribution of the value of the correlation coefficient in samples from an infinitely large population," *Biometrika*, Vol. 10, pp. 507-521.

[39] Fisher, R. A. (1924), "The distribution of the partial correlation coefficient," *Metron*, Vol. 3, pp. 329-332.

[40] Fisher, R. A. (1928), "The general sampling distribution of the multiple correlation coefficient," *Proc. Roy. Soc.* Lonbon, A, Vol. 121, pp. 654-674.

[41] Fisher, R. A. (1936), "The use of multiple measurements in taxonomic problems," *Ann. Eugen.*, Vol. 7, pp. 179-188.

[42] Fisher, R. A. (1939), "The sampling distribution of some statistics obtained from non-linear equations," *Ann. Eugen.*, Vol. 9, pp. 238-249.

[43] Foster, F. G., and Rees, D. H. (1957), "Upper percentage points of the generalized beta distribution. I," *Biometrika*, Vol. 44, pp. 237-247.

[44] Foster, F. G. (1957), "Upper percentage points of the generalized beta-distribution, II," *Biometrika*, Vol. 44, pp. 441-453.

[45] Foster, F. G. (1958), "Upper percentade points of the generalized beta-distribution, III," *Biometrika*, Vol. 45, pp. 492-503.

[46] Fraser, D. A. S. and Guttman, I. (1956), "Tolerance regions," *Ann. Math. Stat.*, Vol. 27, pp. 162-179.

[47] Girshick, M. A. (1939), "On the sampling theory of roots of determinantal equations," *Ann. Math. Stat.*, Vol. 10, pp. 203-224.

[48] Gnanadesikan, R. (1959), "Equality of more than two variances and of more than two dispersion matrices against certain alternatives," *Ann. Math. Stat.*, Vol. 30, pp. 177-184.

[49] Grad, A. and Solomon, H. (1955), "Distribution of quadratic forms and some applications," *Ann. Math. Stat.*, Vol. 26, pp. 464-477.

[50] Greenhouse, S. W. (1955), "Information and distance applied to discriminant analysis between

two normal populations," *Biometrics*, Vol. 11, p. 240 (abstract).

[51] Gurland, J. (1953), "Distribution of quadratic forms and ratio of quadratic forms," *Ann. Math. Stat.*, Vol. 24, pp. 416-427.

[52] Gurland, J. (1955), "Distribution of definite and of indefinite quadratic forms," *Ann. Math. Stat.*, Vol. 26, pp. 122-127.

[53] Gurland, J. (1956), "Quadratic forms in normally distributed random variables," *Sankhyā*, Vol. 17, pp. 37-50.

[54] Harris, A. J. (1957), "A maximum-minimum problem related to statistical distributions in two dimensions," *Biometrika*, Vol. 44, pp. 384-398.

[55] Harter, H. L. (1951), "On the distribution of Wald's classification statistic," *Ann. Math. Stat.*, Vol. 22, pp. 58-67.

[56] 林知己夫 (1959), "数量化と予測に関する根本概念," 統数研彙報, 第 7 巻, 43 頁-64 頁.

[57] Heck, D. L. (1960), "Charts of some upper percentage points of the distribution of the largest characteristic root," *Ann. Math. Stat.*, Vol. 31, pp. 625-642.

[58] Hodges, J. L., Jr., (1955), "A bivariate sign test," *Ann. Math. Stat.*, Vol. 26, pp. 523-527.

[59] Hotelling, H. (1931), "The generalization of Student's ratio," *Ann. Math. Stat.*, Vol. 2, pp. 360-378.

[60] Hotelling, H. (1933), "Analysis of a complex of statistical variables into principal components," *J. Educ. Psych.*, Vol. 24, pp. 417-441, pp. 498-520.

[61] Hotelling, H. (1936), "Relations between two sets of variates," *Biometrika*, Vol. 28, pp. 321-377.

[62] Hotelling, H. (1947), "Multivariate quality control, illustrated by the air testing of sample bombsights," *Selected Techniques of Statistical Analysis*, (editors, Eisenhart, Hastay and Wallis) Chap. 3, McGraw-Hill, New York.

[63] Hotelling, H. (1951), "A generalized T test and measure of multivariate dispersion," *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, University of California press, Los Angeles and Berkeley, pp. 23-42.

[64] Hsu, P. L. (1939), "On the distribution of the roots of certain determinantal equations," *Ann. Eugen.*, Vol. 9, pp. 250-258.

[65] Hsu, P. L. (1941a), "On the limiting distribution of roots of a determinantal equation," *J. London Math. Soc.*, Vol. 16, pp. 183-194.

[66] Hsu, P. L. (1941b), "On the limiting distribution of the canonical correlations," *Biometrika*, Vol. 32, pp. 38-45.

[67] Hsu, P. L. (1945), "On the power functions for the E^2-test and the T^2-test," *Ann. Math. Stat.*, Vol. 16, pp. 278-286.

[68] Huzurbazar, V. S. (1955), "Exact forms of some invariants for distributions admitting sufficient statistics," *Biometrika*, Vol. 42, pp. 533-537.

[69] 石井恵一 (1959), "チェビシェフ型不等式について," 統数研彙報, 第 7 巻, 123 頁-143 頁.

[70] Ito, K. (1956), "Asymptotic formulae for the distribution of Hotelling's generalized T_0^2-statistic," *Ann. Math. Stat.*, Vol. 27, pp. 1091-1105.

[71] James, A. T. (1954), "Normal multivariate analysis and the orthogonal group," *Ann. Math. Stat.*, Vol. 25, pp. 40-75.

[72] James, A. T. (1955a), "A generating function for averages over the orthogonal group," *Proc. Roy. Soc.* London, Ser. A, Vol. 229, pp. 367-375.

[73] James, A. T. (1955b), "The noncentral Wishart distribution," *Proc. Roy. Soc.* London, Ser. A, Vol. 229, pp. 364-366.

[74] James, A. T. and Constantine, A. G. (1958), "On the general canonical correlation distribution," *Ann. Math. Stat.*, Vol. 29, pp. 1146-1161.

[75] James, A. T. (1960), "The distribution of the latent roots of the covariance matrix," *Ann. Math. Stat.*, Vol. 31, pp. 151-158.

[76] James, G. S. (1954), "Tests of linear hypotheses in univariate and multivariate analysis when the ratios of the population variances are unknown," *Biometrika*, Vol. 41, pp. 19-43.

[77] Jeffreys, H. (1946), "An invariant form for the prior probability in estimation problems," *Proc. Roy. Soc.* London, Ser. A, Vol. 186, pp. 453-461.

[78] Jeffreys, H. (1948), *Theory of Probability*, Oxford University Press.

[79] Kawata, Y. (1950), "Independence of quadratic forms in normally correlated variables," *Ann. Math. Stat.*, Vol. 21, pp. 614-615.

[80] Kempthorne, O. and Nordskog, A. W. (1959), "Restricted selection indices," *Biometrics*, Vol. 15, pp. 10-19.

[81] Kshirsagar, A. M. (1959), "Bartlett decomposition and Wishart distribution," *Ann. Math. Stat.*, Vol. 30, pp. 239-241.

[82] Kudo, A. (1959), "The classificatory problem viewed as a twodecision problem," *Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ.* Ser. A., Vol. 13, pp. 96-125.

[83] Kudo, A. (1960), "The classificatory problem viewed as a twodecision problem, II," *Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ.* Ser. A., Vol. 14, pp. 63-83.

[84] Kullback, S. and Leibler, R. A. (1951), "On information and sufficiency," *Ann. Math. Stat.*, Vol. 22, pp. 79-86.

[85] Kullback, S. (1952), "An application of information theory to multivariate analysis," *Ann. Math. Stat.*, Vol. 23, pp. 88-102.

[86] Kullback, S. (1954), "Certain inequalities in information theory and the Cramér-Rao inequality," *Ann. Math. Stat.*, Vol. 25, pp. 745-751.

[87] Kullback, S. (1956), "An application of information theory to multivariate analysis, II," *Ann. Math. Stat.*, Vol. 27, pp. 122-146.

[88] Kullback, S. (1958), *Information Theory and Statistics*, John Wiley and Sons, New York.

[89] Kupperman, M. (1956), "Further applications of information theory to multivariate analysis and statistical inference," (abstract), *Ann. Math. Stat.*, Vol. 27, p. 1184.

[90] Kupperman, M. (1958), "Probabilities of hypotheses and information statistics in sampling from exponential-class population," *Ann. Math. Stat.*, Vol. 29, pp. 571-575.

[91] Lancaster, H. O. (1958), "The structure of bivariate distributions," *Ann. Math. Stat.*, Vol. 29, pp. 719-736.

[92] Laurent, A. G. (1956), "Definite quadratic forms and discontinuous factor," *Ann. Math. Stat.*, Vol. 27, pp. 865-866.

[93] Lawley, D. N. (1938), "A generalization of Fisher's z test," *Biometrika*, Vol. 30, pp. 180-187.

[94] Lawley, D. N. (1956), "Tests of significance for the latent roots of covariance and correlation matrices," *Biometrika*, Vol. 43, pp. 128-136.

[95] Lawley, D. N. (1959), "Tests of significance in canonical analysis," *Biometrika*, Vol. 46, pp. 59-66.

[96] Mahalanobis, P. C. (1930), "On tests and measures of group divergence," *J. Asiat. Soc. Beng.*, Vol. 26, pp. 541-588.

[97] Mallow, C. (1953), "Sequential discrimination," *Sankhyā*, Vol. 12, pp. 321-338.

[98] Matusita, K. (1949), "Note on the independence of certain statistics," *Ann. Inst. Stat. Math.*, Vol. 1, pp. 79-82.

[99] Mises, R. von (1945), "On the classification of observation data into distinct groups," *Ann. Math. Stat.*, Vol. 16, pp. 68-73.

[100] 鍋谷清治 (1948), "重相関係数の標本分布について," 統数研, 講究録, 第4巻, 381 頁-385 頁.

[101] Nanda, D. N. (1948a), "Distribution of a root of a determinantal equation," *Ann. Math. Stat.*, Vol. 19, pp. 47-57.

[102] Nanda, D. N. (1948b), "Limiting distribution of a root of a determinantal equation," *Ann. Math. Stat.*, Vol. 19, pp. 340-350.

[103] Nanda, D. N. (1950), "Distribution of the sum of roots of a determinantal equation under a certain condition," *Ann. Math. Stat.*, Vol. 21, pp. 432-439.

[104] Narain, R. D. (1948), "A new approach to sampling distributions of the multivariate normal theory, I," *Jour. Indian Soc. Agric. Stat.*, Vol. 1, pp. 59-69.

[105] Nicholson, G. E., Jr. (1957), "Estimation of parameters from incomplete multivariate samples," *Jour. Amer. Stat. Asso.*, Vol. 52, pp. 523-526.

[106] Ogawa, J. (1949), "On the independence of bilinear and quadratic forms of a random sample from a normal population," *Ann. Inst. Stat. Math.*, Vol. 1, pp. 83-108.

[107] 小川潤次郎 (1952a), "Wishart 分布の derivation について," 統数研, 講究録, 第 8 巻, 149 頁-152 頁.

[108] 小川潤次郎 (1952b), "重相関係数の標本分布について," 統数研, 講究録, 第 8 巻, 153 頁-158 頁.

[109] Ogawa, J. (1953), "On the sampling distributions of classical statistics in multivariate analysis," *Osaka Math. Jour.*, Vol. 5, pp. 13-52.

[110] 小川潤次郎 (1956a), "ベクトル量の相関論に対する増山の相関係数について," 統数研彙報, 第 4 巻, 53 頁-60 頁.

[111] Ogawa, J. (1959b), "A remark to Wald's paper: 'On a statistical problem arising in the classification of an individual into one of two groups'," (abstract), *Ann. Math. Stat.*, Vol. 27, p. 208.

[112] 丘本 正 (1960), "線型判別函数の漸近分布," 日本数学会統計数学分科会にて講演.

[113] Okamoto, M. (1961), "Discrimination for variance matrices," *Osaka Math. Jour.*, Vol. 13, pp. 1-39.

[114] Olkin, I. (1958), "Multivariate ratio estimation for finite populations," *Biometrika*, Vol. 45, pp. 154-165.

[115] Pachres, J. (1955), "Note on the distribution of a definite quadratic form," *Ann. Math. Stat.*, Vol. 26, pp. 128-131.

[116] Pearson, E. S. and Merrington, M. (1951), "Tables of the 5% and 0.5% points of pearson curves (with argument β_1 and β_2) oxpressed in standard measure," *Biometrika*, Vol. 38, pp. 4-10.

[117] Pillai, K. C. S. (1953), "On the distribution of the sum of the roots of a determinantal equation," *Ann. Math. Stat.*, Vol. 24, p. 495, (abstract).

[118] Pillai, K. C. S. (1954), "On some distribution problems in multivariate analysis," *Mimeograph Series, No.* 88, *Institute of Statistics*, University of North Carolina.

[119] Pillai, K. C. S. (1955), "Some new test criteria in multivariate analysis," *Ann. Math. Stat.*, Vol. 26, pp. 117-121.

[120] Pillai, K. C. S. (1956a), "On the distribution of the largest or the smallest root of a matrix in multivariate analysis," *Biometrika*, Vol. 43, pp. 122-127.

[121] Pillai, K. C. S. (1956b), "Some results useful in multivariate analysis," *Ann. Math. Stat.*, Vol. 27, pp. 1106-1114.

[122] Pillai, K. C. S. (1957), *Concise Tables for Statisticians*, The Statistical Center, University of the Philippines, Manila.

[123] Pillai, K. C. S. and Samson, P. Jr. (1959), "On Hotelling's generalization of T^2," *Biometrika*, Vol. 46, pp. 160-168.

[124] Pillai, K. C. S. and Bantegui, C. G. (1959), "On the distribution of the largest of six roots of a matrix in multivariate analysis," *Biometrika*, Vol. 46, pp. 237-240.

[125] Pillai, K. C. S. and Mijares, T. A. (1959), "On the moments of the trace of a matrix and approximations to its distribution," *Ann. Math. Stat.*, Vol. 30, pp. 1135-1140.

[126] Rao, C. R. (1946), "Tests with discriminant functions in multivariate analysis," *Sankhyā*, Vol. 7, pp. 407-413.

[127] Rao, C. R. (1947), "A statistical criterion to determine the group to which an individual belongs," *Nature*, Vol. 160, pp. 835-836.

[128] Rao, C. R. (1948), "The utilization of multiple measurements in problems of biological classification," *Jour. Roy. Stat. Soc.*, B, Vol. 10, pp. 159-193.

[129] Rao, C. R. (1949a), "On the distance between two populations," *Sankhyā*, Vol. 9, pp. 246-248.

[130] Rao, C. R. (1949b), "On some problems arising out of discrimination with multiple characters," *Sankhyā*, Vol. 9, pp. 343-366.

[131] Rao, C. R. (1950), "Statistical inference applied to classificatory problems," *Sankhyā*, Vol. 10, pp. 229-256.

[132] Rao, C. R. (1951), "Statistical inference applied to classificatory problems, II. The problem of selecting individuals for various in a specified ratio," *Sankhyā*, Vol. 11, pp. 107-116.

[133] Rao, C. R. (1952), *Advanced Statistical Methods in Biometric Research*, New York, John Wiley and Sins.

[134] Rao, C. R. (1954), "A general theory of discrimination when the information about alternative population distributions is based on samples," *Ann. Math. Stat.*, Vol. 25, pp. 651-670.

[135] Rao, C. R. (1956), "Analysis of dispersion with incomplete observations on one of the characters," *Jour. Roy. Stat. Soc.*, Vol. 18, pp. 259-264.

[136] Rao, C. R. (1958), "Some statistical methods for comparison of growth curves," *Biometrics*, Vol. 14, pp. 1-17.

[137] Roy, J. (1958), "Step-down procedure in multivariate analysis," *Ann. Math. Stat.*, Vol. 29, pp. 1177-1187.

[138] Roy, S. N. (1939), "p-statistics or some generalizations in analysis of variance appropriate to multivariate problems," *Sankhyā*, Vol. 4, pp. 381-396.

[139] Roy, S. N. (1942), "Analysis of variance for multivariate normal populations. The sampling distribution of the requisite p-statistics on the null and non-null hypothesis," *Sankhyā*, Vol. 6, pp. 35-50.

[140] Roy, S. N. (1945), "The individual sampling distribution of the maximum, minimum and any intermidiate of the p-statistics on the null hypothesis," *Sankhyā*, Vol. 7, pp. 133-158.

[141] Roy, S. N. (1946a), "Multivariate analysis of variance: the sampling distribution of the numerically largest of the p-statistics on the non-null hypothesis," *Sankhyā*, Vol. 8, pp. 15-52.

[142] Roy, S. N. (1946b), "On the individual sampling distribution of p-statistics for testing equality of the dispersion matrices for two multivariate normal populations," *Proc. Indian. Sci. Cong.*

[143] Roy, S. N. (1950), "Univariate and multivariate analysis as problems in testing of composite hypotheses," *Sankhyā*, Vol. 10, pp. 29-80.

[144] Roy, S. N. (1950), "Univariate and multivariate analysis as problems in testing of composite hypotheses, I," *Sankhyā*, Vol. 10, pp. 29-80.

[145] Roy, S. N. (1952), "Some useful results in Jacobians," *Cal. Stat. Assn. Bull.*, Vol. 4, pp. 117-122.

[146] Roy, S. N. (1953), "On a heuristic method of test construction and its use in multivariate analysis," *Ann. Math. Stat.*, Vol. 24, pp. 220-238.

[147] Roy, S. N., and Bose, R. C. (1953), "Simultaneous confidence interval estimation," *Ann. Math. Stat.*, Vol. 24, pp. 513-536.

[148] Roy. S. N. and Olkin, I. (1954), "On multivariate distribution theory," *Ann. Math. Stat.*, Vol. 25, pp. 329-339.

[149] Roy, S. N. (1954), "Some further results in simultaneous confidence interval estimation," *Ann.*

Math. Stat., Vol. 25, pp. 752–761.

[150] Roy, S. N. and Mitra, S. K. (1956), "An introduction to some non-parametric generalizations of analysis of variance and multivariate analysis," *Biometrika*, Vol. 43, pp. 361–376.

[151] Roy, S. N. and Kastenbaum, M. A. (1956), "On the hypothesis of no interaction in a multiway contingency table," *Ann. Math. Stat.*, Vol. 27, pp. 749–757.

[152] Roy, S. N. (1957a), *Some Aspects of Multivariate Analysis*, John Wiley and Sons, New York.

[153] Roy, S. N. and Gnanadesikan, R. (1957b), "Further contributions to multivariate confidence bounds," *Biometrika*, Vol. 44, pp. 289–292.

[154] Roy, S. N. and Bargmann, R. E. (1958), "Tests of multiple independence and the associated confidence bounds," *Ann. Math. Stat.*, Vol. 29, pp. 491–503.

[155] Roy, S. N. and Potthoff, R. F. (1958), "Confidence bounds on vector analogues of the 'ratio of means' and the 'ratio of variances' for two correlated normal variates and some associated tests," *Ann. Math. Stat.*, Vol. 28, pp. 829–841.

[156] Roy, S. N. and Gnanadesikan, R. (1959), "Some contributions to ANOVA in one or more dimensions: II," *Ann. Math.* Stat., Vol. 30, pp. 318–340.

[157] Sakamoto, H. (1949), "On the criteria of the independence and the degrees of freedom of statistics and their applications to the analysis of variance," *Ann. Inst. Stat. Math.*, Vol. 1, pp. 109–122.

[158] Sichel, H. S. (1952), "The selective efficiency of a test battery," *Psychometrika*, Vol. 17, pp. 1–39.

[159] Simaika, J. B. (1941), "On an optimum property of two important statistical tests," *Biometrika*, Vol. 32, pp. 70–80.

[160] 塩谷 実 (1956a), "Hotelling の T^2 統計量の分布に就いて," 統数研彙報, 第 4 巻, 33 頁–42 頁.

[161] Siotani, M. (1956b), "On the distributions of the Hotelling's T^2-statistics," *Ann. Inst. Stat. Math.*, Vol. 8, pp. 1–14.

[162] Siotani, M. (1957), "Note on the utilization of the generalized Student ratio in the analysis of variance or dispersion," *Ann. Inst. Stat. Math.*, Vol. 9, pp. 157–171.

[163] Siotani, M. (1959a), "The extreme value of the generalized distances of the individual points in the multivariate normal sample," *Ann. Inst. Stat. Math.*, Vol. 10, pp. 183–208.

[164] 塩谷 実 (1059b), "多次元の場合の Range について," 統数研彙報, 第 6 巻, 155 頁–165 頁.

[165] Siotani, M. (1960a), "The extreme value of generalized distances and its applications," the paper presented to *the 32nd Session of the International Statistical Institute.*

[166] Siotani, M. (1960b), "Notes on multivariate confidence bounds," *Ann. Inst. Stat. Math.*, Vol. 11, pp. 167–182.

[167] Sitgreaves, Rosedith (1952), "On the distribution of two random matrices used in classification procedures," *Ann. Math. Stat.*, Vol. 23, pp. 263–270.

[168] Svardrup, Erling (1947), "Derivation of the Wishert distribution of the second order sample moments by straightforward integration of a multiple integral," *Skand. Aktuarietidskr.*, Vol. 30, pp. 151–166.

[169] Wald, A. (1944), "On a statistical problem arising in the classification of an individual into one of two groups," *Ann. Math. Stat.*, Vol. 15, pp. 145–163.

[170] 渡辺寿夫 (1952), "Amount of information について," 統数研講究録, 第 8 巻, 293 頁–307 頁.

[171] Whitney, D. R. (1951), "A bivariate extension of the *U*-statistic," *Ann. Math. Stat.*, Vol. 22, pp. 274–282.

[172] Wijsman, R. A. (1957), "Random Orthogonal transformations and their use in some classical distribution problems in multivariate analysis," *Ann. Math. Stat.*, Vol. 28, pp. 415–423.

[173] Wijsman, R. A. (1959), "Applications of a certain representation of the Wishart matrix," *Ann. Math. Stat.*, Vol. 30, pp. 597–601.

[174] Wilks, S. S. (1932), "Certain generalizations in the analysis of variance," *Biometrika*, Vol. 24, pp. 471–494.

[175] Williams, E. J. (1952), "Some exact tests in multivariate analysis," *Biometrika*, Vol. 39, pp. 17–31.

[176] Williams, E. J. (1955), "Significance tests for discriminant functions and linear functional relationships," *Biometrika*, Vol. 42, pp. 360–381.

[177] Wishart, J. (1928), "The generalized product moment distribution in sample from a normal multivariate population," *Biometrika*, Vol. 20A, pp. 32–52.

[178] Wishart, John (1948), "Proofs of the distribution law of the second order moment statistics," *Biometrika*, Vol. 39, pp. 55–57.