確率過程に関する統計理論の発展の方向について

赤 池 弘 次

(1959 年 5 月 受 付)

On the Trends in Statistical Theory about Stochastic Processes

HIROTUGU AKAIKE

In this paper we make a review of the paper "Modern Trends in Time Series Analysis" by U. Grenander[6] and then discuss the conditions for the development of statistical theory about stochastic process. Grenander's proposal of conditions, stated as his conclusion of the paper, for the development of the time series analysis is quite in agreement with our experiences in the study of the statistical treatment of stochastic process. But we can point out the limitations of his scope in the above stated paper by using the data obtained from content analysis of recent journals of the Royal Statistical Society (series B).

The problems discussed by Grenander in his paper are related mainly with the spectral analysis of the stationary time series but there are many other statistical problems which are not covered by the spectral theory; for example, those related with the statistical treatment of the train of pulses. Thus it seems that the removal of the limitations of his scope yields many concrete answeres to the problems discussed by him in the paper.

To develop the efficient use of the statistical theory about stochastic process, stochastic models must be exploited so as to enable us not only to describe but also to analyze the structure of the process. The characteristics of the process must be interpreted with valid concepts of corresponding practical research fields. From the stand point of application of the models it is also necessary for us to pay attension to the speeds of the computers available for the analysis.

Thus in most cases of the formulation of stochastic processes the noises due to digitization and sampling procedure (in time) must be taken into consideration to get flexible models. We see that the new models and their statistical treatments originate from the new concepts in the practical research fields, and for the exploitation of the statistical metheds the development of mathematical theory which allows us rigourous treatment of the problem and,at the same time,facillitates some fundamental operations on the process is desirable. Thus, as was suggested by Grenander, to keep contact with research workers in the neighbouring domains will be most profitable for us to develop the statistical theory about stochastic process.

We make also a very brief review of the papers published in the Annals and the Proceedings of our institute, and we can see that the researches in our institute about the stochastic process are now on the line of development which is suggested as desirable in this paper.

Institute of Statistical Mathematics

§ 1. 序

確率過程に関する統計理論の発展の歴史は比較的若いものである．確率論の発展により確率過程の理論的取扱いが精密化されるにしたがつて各種の確率過程に関する統計理論の研究が進められた．しかしながら取上げられた確率過程の模型は多く物理，工業，経済等の分野における具体的な統計的現象を近似するものとしてあらわれたものであつたにも拘らず，一旦これが抽象化され数学的表現を与えられると，その模型の現実の問題との関連がややもすると見失われ，型式的な類比のみに基礎をおく理論の展開に重点が置かれて現実的な問題に適用する際の具体的な制限条件に対する考慮が失われる傾向が一部に発生した．このような傾向は現実的な問題解決の強力な武器として確率過程に関する統計理論の発展に期待していた各種の分野の研究者に，しばしばこの理論に対する不信の念を抱かせるに至つた．勿論この不信の源は統計理論の研究者の側にも，またその研究結果を適用しようとする研究者の側にもあることは明かであるが，特に現実的な適用の場面に対する考慮を行わずに展開した理論でも一般的に有効性を持つもののように考え込むという傾向が統計研究者の側にあつたとしたら，これは全く統計理論の研究者としては不適切な態度といわなくてはならないであろう．“統計的な問題”を解くということは，終局的には当面の問題に対して現実的な条件の範囲で十分（あるいは著しく）有効な結論を与えるということを目指すのであつて，その解には現実的な条件に関する記述あるいは検討をわすれることはできない．即ち，どんな場合に対してもあてはめることができるというような記述よりは，得られた結果が著しく有効に適用されるような場合はどのような場合であるかを可能な限り検討し記述しておくことが結果の有効な適用を発展させるために必要なこととなる．筆者は確率過程に関する有効な統計的処理方式はどのようにして定式化されるかをこの数年間全く経験的に追つて来たが，本文においてその経験をもとにして確率過程に関する統計理論の発展の方向を眺めたいと思う．

たまたま Grenander が Sankhyā 誌上に発表した「時系列解析におまる最近の傾向」と題する論文が深くここで論じようとする問題にふれている．筆者の経験の範囲の狭さを補うために，先ずこの論文についてくわしく紹介を行い，Grenander が上掲の論文を書くに至つた理由を推測し，英国における代表的な統計研究誌 Journal of the Royal Statistical Society (series B) に表われた最近の論文の傾向を見ることによつて，彼が論じている時系列解析の発展の方向がどのように実現しつつあるかをやや具体的に眺めたい．更に筆者自身の研究の経験から Grenander の提起した発展のための条件をより具体的に論じ，同時にわれわれの研究所における確率過程に関係する統計理論の研究の現状にも簡単に触れたい．

§ 2. Grenander の論文 [6]

彼の論文は 1956 年2月に受理され Sankhyā 第 18 巻 (1957) pp. 149–158 に掲載されたものである．以下節を追つてその概要を直訳的に紹介しよう．

序　節

これ迄時系列解析の方法については永い間不満足な点があり，実際の場面で役に立たぬ，どの条件の下で使えるかがはつきりしない，基礎にある数学的証明が不十分或は不正確，数値計算があまりに尨大であるとか有効性，或は弁別力があまりにも小さい等といわれて来た．そこでこの部門の現状をまとめ，その方法を評価

し，これらの批判があたつているかどうか，もしほんとにあたつているならば理論の欠点を正すのに何をしたらよいかを考えてみたい．

1. 確率模型

時系列：時刻 t における観測値の値を $x(t)$ と表わすとき系列 $\{x(t);t\epsilon T\}$ を T 上で測つた時系列と呼ぶ．

確率過程：上の $\{x(t)\}$ が確率変数の系列 $\{X(t);t\epsilon T\}$ の実現値と見做されるときこれ等の $x(t)$ に関する確率論的な問題は確率過程論に含まれる．

$m(t)=EX(t)$ とすると

$X(t)=m(t)+\gamma(t)$ とかける．

$m(t)$ を系統的な成分，$\gamma(t)$ をランダム成分と呼ぶ．

これ迄に提起された確率模型は三つの類型に分けられ，これがたまたま歴史的な発展の三段階に対応する

2. 独立なランダム成分

$\gamma(t)$ が独立だという模型が多く用いられた．その典型的なものは系統的成分 $m(t)$ が

$$m(t)=\sum_{\nu=1}^{r}A_\nu\cos\left(\frac{f_\nu t}{2\pi}+\phi_\nu\right)\quad(t=1,2,\cdots\cdots n)$$

で与えられるもので，ピリオドグラム

$$I(f)=\frac{1}{2\pi n}\left[\sum_{t=1}^{n}x_t\cos\frac{ft}{2\pi}\right]^2+\frac{1}{2\pi n}\left[\sum_{t=1}^{n}x_t\sin\frac{ft}{2\pi}\right]^2$$

がしばしば用いられた．Fisher (1927) のピリオドグラムの検定が最も良く利用された．

$m(t)$ としては t の函数の一次結合として表わされるものが多かつたわけで，ここの問題は分散分析，回帰分析等を形成している theory of linear hypothesis に属している．

ところで独立性の仮定は測定時間の間隔がもとのランダムな機構の時間尺度（時定数）に比べて小さくなると成立しなくなる．

3. 有限なパラメーター模型

この難点をさけるために，より妥当な仮定にたつ模型が作られた，そのはじめは U. Yule (1927) H. Wold (1938) である．ここでは $\gamma(t)$ が "有限なパラメーターの模型" によつて表現された．その例としては自己回帰過程

$$a_0\gamma(t)+a_1\gamma(t-1)+a_2\gamma(t-2)+\cdots\cdots+a_l\gamma(t-l)=\xi(t)$$

がある．ここで $\xi(t)$ は互に独立で同一の分布に従い，平均は 0 とされている．

そこで前述 2. の独立な模型とこの模型との弁別が問題となつた，米国における 1940 年代の研究 T. Koopomans (1942). R.L. Anderson (1942). Quenouille and H. Wold (1949) がある．

ところで，実際上述の模型を適用する際に l をどう定めるが問題になつてしまつた．

4. 更に一般的な模型

そこで定常な確率過程を用いた更に一般的な方法への道について述べよう．とくに $x(t)$ が正規分布をする場合に限つて述べる．

ところで 3. の模型による方法は主として経済乃至社会科学への応用によつて影響をうけたのであるがここで述べるのは主として自然科学（physical sciense）の問題をとくために発展させられた．

$\gamma(t)$ と $\gamma(s)$ の共分散函数 $r(s,t)$ は定常なことから $r(s,t)=R(s-t)$ とかける．

$\gamma(t)$ の分布は正規分布だからこの $R(t)$ がことごとくわかればその構造は定まつてしまう．ところで Wiener-Khinchin の定理によればある単調増大な函数 $F(\lambda)$ があつて $T=(-\infty,+\infty)$ のときには

$$R(t)=\int_0^\infty\cos t\lambda\,dF(\lambda)$$

とかける．また $T=(\cdots\cdots-2,-1,0,1,2,\cdots\cdots)$ のときには H. Wold (1938) により

$$R(t)=\int_0^\pi\cos t\lambda\,dF(\lambda)$$

とかけることが知られている．更に H. Cramér (1942) によれば

任意の定常な確率過程 $\{Y(t)\}$ は

$$Y(t)=\int_0^\infty\sin t\lambda\,dz_1(\lambda)+\int_0^\infty\cos t\lambda\,dz_2(\lambda)$$

とかける．但し $z_i(\lambda)$ は確率過程で

i） $Ez_i(\lambda)=0$

ii） $Ez_1(\lambda)z_2(\lambda)=0$

iii） $E[z_i(\lambda_2)-z_i(\lambda_1)][z_i(\lambda_4)-z_i(\lambda_3)]=0$ 但し (λ_1, λ_2) と (λ_3, λ_4) が重さならないとき．

iv） $E[z_i(\lambda_2)-z_i(\lambda_1)]^2=F(\lambda_2)-F(\lambda_1)$, $\lambda_1<\lambda_2$, を充す．

そこで $F(\lambda)$ 或は $f(\lambda)=d\ F(\lambda)/d\lambda$ の推定が問題となる．J.W. Tukey, M.S. Bartletl (1950, 1955) U. Grenander (1951) により種々な研究が行われた．特に最近の主な成果のいくつかは *physical science* の研究者によつて与えられている．これはこの理論の発展に影響を及ぼしその実際的有効性を増大させた．とくにすべての λ について $F_1(\lambda)<F(\lambda)<F_2(\lambda)$ と表現されるような信頼区域 $(F_1(\lambda), F_2(\lambda))$ の設定が望まれる U. Grenander M. Rosenblatl (1953)．これ等の方法は雑音の研究，乱流の研究に適用された．アナログな道具を用いる時は t が連続的に変る模型が良い．この際の難点も最近の確率過程論により解決される U. Grenander (1950).

5. 現在の状態

上述の三種の模型の何れもその適用の条件を考えて使われなくてはならぬ．

最近の方向としては統計量の算出に大変な手間がかかる傾向がうれしくない．とくにこれは繰返し同じ型の計算をしない場合に悪い．最近は現実的な仮定の下に更に一般的な方法を求める方向に向つている．その結果 *power* 或は *efficiency* の低下を来たし，ますます大標本の方向に向つている．

現在のところ応用に適した確率過程の型に不足している．したがつて一番要求されるのは更に現実的な，適用度の大きい (flexible) 模型である．このためには実際の応用分野の研究と接触を保たなくてはならぬ．4の模型の有効性は，その意味で健全な基礎の上に立つていることからくるのである．模型を機械的にデータにあてはめようとするかわりに更に突込んだ分析に基礎をおく模型を求めなくてはならぬ．

時系列解析の将来の研究においては近似的な方法で満足しなくてはならないことが多いであろう．最近の統計研究者の間にある抽象的方法へ向う傾向は，時系列解析においても有益であり必要ではあるが，より実際的な臭いのする問題がかなり無視されて来たという結果をもたらした．しかし，近似的な結果を問題にする時といえども，これを完全にするためには多くの主として解析的な興味ある困難な魅力的な問題を解かねばならないのである．

ところで多くの統計の分野では十分な洞察さえあれば少しの計算の間違いなど大したことが無い場合があるが，時系列解析の場合のように複雑になるとそうはいかなくなる．実際の統計家が理論的結果を実験によつて確認するということは時系列解析の場合には全く大変なことであるから特にこの点の注意が必要である．

更に予測のために時系列を如何に利用するかという問題についてのべよう．Wiener-Kolmogorov (Wiener 1949) の予測理論はよく知られている．これは定常な確率過程 $y(t)$ を時刻 t 迄観測したときに $y(t+h)$ $(h>0)$ を予測しようとするものである．この美しい理論は多くの重要な応用を持つているが，一方多くの具体的な問題では $y(t)$ が定常でないとか未知の系統的な成分 $m(t)$ が観測値に入つているとかで使い物にならない．基礎にある機構について十分判つていなければ $m(t)$ を十分精密に描くことはできない．ここでは時系列解析の既存の道具に熱中しすぎると大変な結果をもたらすことになろう．更に経済，人口等の長期予想についても同様である．これらの問題の解は洗練された統計的取扱いの中にだけあるのではなく，$m(t)$ とか $y(t)$ とかの構造を更に精密に記述できるようもとの発生機構の機能について更に多くの知識を求めることの方が大切なのである．統計はそれを信仰するからといつて奇蹟をあらわすものではない．

6. 結　論

i） 具体的な要求と接触を保ちながら，時系列解析の研究者及び確率論の研究者は，基礎にある機構についての更に現実的な仮定にもとづく新しい確率論的模型を案出しなくてはならない．

ii） 適切な模型にもとづいて，少なくとも大標本，或はかなりの数の標本に対して適用できる統計的手法を発展させねばならない．

iii） 理論的な研究は厳密な論理的数学的基礎の上で行われねばならない．

以上述べたことは時系列解析の研究者の間での一般的且つ唯一の意見を表現していると受取つてもらいたくはない，話しのいくつかは極めて物議をかもす性質のものである，しかしここで述べたことがこの種の問題の

議論への刺激を与えることになれば幸いである.

References.

Anderson, R.L. (1942): Distribution of the serial correlation coefficient. Ann. Math. Stat., 13, 1–13.

Bartlett, M.S. (1946): On the theoretical specification and sampling properties of autocorrelated time-series. J. Roy. Stat. Soc., Supplement, 8, 27–41.

———— (1950): Periodgram analysis and continuous spectra. Biometrika., 37, 1–16.

———— (1955): *An Introduction to Stochastic Processes*, Cambidge University Press, London.

Cramér, H. (1942): On harmonic analysis in certain functional spaces. Arkiv Mat. Astr. Fys., 28B, 7.

Doob, J.L. (1953): *Stochastic Processes*, John Wiley and Sons, New York.

Fisher, R.A. (1929): Test of significance in harmonic analysis. Proc. Roy. Soc., A, 125, 54–59.

Grenander, U. (1950): Stochastic processes and statistical inference. Arkiv Mat., 1, 195–277.

———— (1951): On empirical spectral analysis of stochastic processes. Arkiv Mat., 1, 503–531.

———— (1954): On the estimation of regression coefficients in the case of an autocorrelated disturbance. Ann. Math. Stat., 25, 252–272.

Grenander, U. and M. Resenblatt (1953); Statistical spectral analysis of time series arising from stationary stochastic processes. Ann. Math. Stat., 24, 537–558.

Koopmans, T. (1942): Serialcorrelation and quadratic forms in normal variables. Ann. Math. Stat. 13, 14–33.

Mann, H.B. (1953): *Introduction to the Theory of Stochastic Processes Depending on a Continuous Parameter*, National Bureau of Standards U.S.A.

Tukey, J.W.: *Measuring Noise Color*, unpublished manuscript,

Wiener, N. (1949): *The Extrapolation, Interpolation and Smoothirg of Stationany Time Series*, John Wiley and Sons, New York.

Wold, H. (1938): *A study in the Analysis of Stationary Time Series*, Almqvist and Wiksell, Stockholm.

———— (1949): A large-sample test for moving averages. J. Roy. Stat. Soc., B., 11, 293–305.

———— (1952): *Demand analysis. A study in Econometrics*, John Wiley and Sons, New York.

Yule, G.U. (1927): On a method of investigating periodicities in disturbed series, with special reference to Wolfer's sunspot numbers. Trans. Roy. Soc., A., 226. 267–298.

§ 3. 確率論的模型の設定について

Grenander は前掲 §2 の文献表中にある彼の 1950 年の論文において時系列に関する統計理論の展開を行い，われわれはこれを確率過程の統計理論の一般論を与えるかの印象をもつて受取つたのであつた．この論文の内容を確率過程に関する統計理論の展開の数学的な形式の側面だけから見るならば，彼が現在前述の論文において述べているような時系列研究者としての悩みや苦労とは彼はもはや無縁な人であると考えられる程に整つたものであろう．しかしながら現実の問題に接近した時には，話はそれほど簡単ではない．われわれは前述の論文に述べられている具体的な内容に深い共感を感ずるのであるが，更にこれを超えて確率過程に関する統計理論の発展の方向というものをもう少し具体的に述べてみたい．そのために先ず **Grenander** の論文の内容の検討から始めよう．**Grenander** はここに紹介した論文において時系列解析の主な発展の段階として三つの段階を例によつて示しているのであるが，これは実は彼の定義するような時系列に対しては，余りに狭く限られた模型である．即ち，これらの模型は悉く時系列の波形分析（周波数解析）の観点から取られたものばかりである．各々の模型についていえば，先ず最初の独立な確率変数の系列については事柄は余りに明瞭で，ほとんど論ずる必要はなかろう．次の有限箇のパラメーターを持つ模型，例えば自己回帰型の過程についていえば，このような模型で表現される実際の現象の顕著な例をわれわれは

知らない．特に構造との対応をぬきにして，コレログラムの模様だけから order l を定めようとするような考えは方は l の値とコレログラムの模様との対応が比較的にぶいことを考えれば全く意味を持たない場合が多いであろう．次に最後の例について見よう．これは明かに物理的な波動現象の解析における周波数解析の考え方の理論的基礎を与える模型である．この表現の模型はしたがつて当初から極めて長時間（波の中に現われる最低周波数の成分に対して）の観測値が与えられることを前提としている．したがつて当然これ等の模型の適用対象は主として直接何等かのフィルターを通して解析することが可能な状況の下にあるものか，または全く理論的な模型であつて直接時系列そのものの観測は行わないような場合であろう．何れにしても連続的な模型を用いるとなると，この時は Grenander もいつているようにデーターは何等かの意味でアナログ的な機構によつて処理されるような場合に対してでなくては理論の有効な適用が行われ難いであろう．前述の自己回帰型等の模型について主として低い次数における適用が求められたということは，その適用の対象が経済その他社会科学の分野に求められたことによるのであろうがこれは即ち観測値の長い系列が得られないことが前提されているわけである．したがつてそのような模型に対して実用上この最後の模型は実質的に何も加えることはないであろう．また短い系列しか得られないならば，同時に多数の系列が得られない限りほとんど有効な結論をひきだすことは不可能であろう．これ等は何れにしても社会的な問題においては簡単には実現されない条件である．

なおこの最後の模型は直線的なフィルター（濾波器）の研究にともなつて，その研究の必要性が増大したものと考えられる．周知のように直線的な機構をもつフィルターを通過する際に波が受ける変換の研究においてもとの波が偶然的な変動を示すものである場合，そのスペクトル函数が最も重要な役割を果すからである[2].

さて以上の例の示すものは，これ等の模型の原型が，Helmholz の共鳴器にみられる音声の解析，即ち連続的な横波の振幅変化によつて情報を送る主として振幅変調に対応する物理的模型に向つて統一的に配列されているということである．統計的乃至確率論的模型がその原型を一般に各種個別科学の中に求めるというならば，時系列の典型的な模型にも更に多くの技術分野の進歩が反映されなくてはならないであろう．たとえば通信技術の部門においても，パルス技術の発展にともなつて各種のパルス変調方式が次第に実用化され，計算機械の分野においてもアナログ型の計算機に対してディジタル型の計算機が著しい進歩を示して来ている．これ等の進歩が統計理論の研究者に影響を与えない筈はない．パルス変調方式の実用化は 1940 年前後に既に始まつている．そして Shanon の論文 [10] はこられにともなう統計的模型及び理論の発展の方向を示すまことに顕著な例といえよう．その後の情報理論の発展についてはいまさらここに述べるまでもないであろう．勿論この理論とて前出の模型と同様，その適用の場に対する反省が無くては何等の有効性を保ち得ないであろうことは明かである．

さてパルスの系列を考察するということはすでに統計的な研究分野においても重要な研究課題となりつつあつた．特に事故発生の系列の表現に関係して考えられたポアッソン過程はその最も顕著な例のひとつである．Grenander が時系列の歴史を論ずるに際してこの方向の研究にふれていないことははなはだ奇異な感じをわれわれに与える．少くとも彼の定義する時系列の中にはポアッソン過程を以て代表される出生死滅過程，待合せ行列過程等の飛躍的な変化を示す模型が十分含まれる筈である．このことは実は逆に何故 Grenander が時系列解析に対する不信を論じなければならなかつたかを明かにする．理論は適切な条件の下で適用されれば有効である．不信は誤まれる適用に対して向けられるだけである．にも拘らず Grenander がその不信のいくらかに対して理論の研究者の側にも責任があるかもしれないとしてその発展の方向を論じたのは，不信に対する回答というよりはむしろ如何にして時系列解析法の有効性を回復するかを問題にしたものといえよう．そしてこのような問題を取上げなくてはならなかつたのは，むしろ彼が既に見たように，周波数解析の分野に視野を限定しているということに基因するのではなかろうか．即ち，時系列解析の研究は不

信を受けるどころか，ますます健全な発展をしつつあり，彼の投げた問題に対しては当時既に解答が現実的に与えられていたと見られるのである．しかしながら彼がその視野を特定の分野に限つて問題を尖鋭化したことは，事柄を明確に描き出すためには却つて好都合であつた．われわれはそこによせあつめ的一般論ではなく，具体的な経験に裏付けされた，したがつて微小なりとはいえ問題のあらゆる本質的な側面をそなえた提案を見ることが出来るのである．

ここでわれわれは最近の **Journal of the Royal Statistical Society (series B)** 誌上における論文の傾向の統計的推移を見，先に述べた事柄，即ち確率過程に関する統計理論はますます発展の途上にあることを具体的に見ることにしよう．

	年　　度	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958
	a. 論　文　総　数	23	26	18	17	28	24	30	25	32
	b. 確率過程関係論文総数	6	6	10	10	9	11	11	16	16
bの内訳	c. 調和解析関係	2	1	2	4	3	3	1	4	6
	d. そ　の　他	4	5	8	6	6	8	10	12	10
dの内訳	e. 待ち合わせ行列		1	1		2	2	4	1	5
	f. 機　械　修　理	1	1	1		1		1	3	
	g. 逐　次　解　析	1		1	1	1		1	2	1
	h. ダム，在庫管理								3	
	i. そ　の　他	2	3	5	5	2	6	4	3	4

Journal of the Royal Statistical Society (series B) の論文の傾向．

これらの数字を見ると，時系列解析，あるいは確率過程に関する統計理論の発展は年を追つて顕著なものとなつていることがうかがわれる．しかも特に注意すべき点は，このデータの中で，周波数解析に属さないとされている論文は，ほとんどが直接もとの過程の構成を論ずることが可能な模型に関するものであることで，しかもこれらは何等かの意味で再生的，即ち一定の条件によつて同一の型の事象の推移が新たに繰返し行われるようなものである．これらの論文の数が極めて多いということも明かである．これより見ても，定常過程のスペクトル分解による表現定理のみに基礎をおくような形での周波数解析の取扱いは，適用される分野がある意味では余りにも一般的であつて，箇々の現象の解析という観点からは強力なものとなりにくいのではなかろうか．ただしこのデーターより見てもわかるように，周波数解析に関係する論文も愈々多く発表されつつあるが，これらは模型の展開ではなく，スペクトル密度函数の推定法の展開及びそれに関連する統計的問題の処理に関するものであつて，全く統計的手法の展開にのみ限られて来ているようである．この方面の問題は今後とも時系列解析の重要なひとつの分野をなすことは明かではなるが，このような手法そのものの形は完成に近づきつつあるのではなかろうか．周波数解析の従来の模型が，これを現実的な問題の処理に応用しようとする人々の一部からやや不信の念を以て迎えられたということは，その基礎におく模型の設定が全く受動的乃至は記述的であつて，これをもとにしてもとの発生機構の構造を論ずることが不可能であるような定式化が多かつたためではないかと思われる．即ち，箇々の系列的な現象の解析を行おうとする研究者は，究極的にはその現象の管理あるいは制御を目的とする場合がほとんどであつて，与えられた現象の上に立つて，その変換のみを論ずる場合は，既に研究が終結ようとする場合に限られるわけである．統計的模型が有効性を発揮するのは，無限箇の自己相関係数をひとつひとつ推定法の理論にしたがつて推定して行くような接近にあるのではなく，むしろ **Grenander** のいう有限箇のパラメーターの場合の研究者が意図したであろうように，

比較的少数の条件をもとにして，その条件の検討さえ行えば，統計的模型の適用により，もとの過程に関する従来の理論だけでは得られないような数多くの，あるいは深い情報が得られる場合であろう．このことから直ちにわかるように確率過程に関する統計的方法の展開が意味を持つためには，先ず基礎にある確率過程が，実際の現象に対して実用上十分な近似を与えるものであり，しかもその過程の構造がその現象処理上の技術的な概念と対応し得るものでなくてはならないであろう．したがつて，周波数解析の分野の研究も，また基礎にある確率過程の構造と，スペクトル分布函数の型との対応を論ずる場合に各種の研究分野における興味ある適用を見出し得るのではなかろうか．筆者は報告 [A. 3] [A. 5] [P. 4] においてこの点を考慮して問題の展開を計つた．ここではあくまでも基礎になる確率過程の設定が第一の問題であり，統計的手法の展開がそれに続いて発生する．このような事情が Grenander をして，i) モデルの開発 ii) 手法の展開 iii) 理論の厳密性，を時系列解析発展の条件と結論させたのではなかろうか．

さてここで Grenander のいう第二の模型即ち有限箇のパラメーターの場合について更に論じたい．それは，この模型が主として経済乃至は社会科学の領域での応用を目的として考えられたという点についてである．最近の経営あるいは管理の分野におけるオペレーション・リサーチの問題を除いて，いわゆる経済乃至は社会の問題に対して，説明的な模型として以外に実用的にこのような模型が有効に用いられた例を筆者は知らない．しかしてこの場合においても適当な現象に対して適当な模型を用いれば役に立ち得るのだというだけでよいのであろうか．筆者はそのようないい方は全く抽象的であつて，この場合の問題点からは遠く離れたものと考える．即ち有限なパラメーターの模型の適用の条件だけを抽象的に論ずる限り前述のようないい方は全く正しいのであるが，経済のような社会的な現象への適用という場合には，時系列解析が有効性をもつためにはもう少し別のところに強調されなくていならない問題点があるように思われる．即ちここには模型以前に統計的な問題があると思われる．この点について筆者の報告 [P. 2] に述べたところを引用したい．

「社会現象の多くにおいては，時間の価値が積極的に問題となる場合がほとんどすべてである．このことは，予測が真に重要な意味を持つことを示すわけで，結局所謂法則性の認識の問題と直接結びついていることが判る．法則性の認識には，時間的，空間的な無数の繰返しが保証されなくてはならない．これ迄の自然科学的法則の多くは，注目する世界より時間的空間的に一段階低いオーダーの要素の集計値間の関係として把握されている．ところが社会現象においては，むしろ直接我々の目に触れる現象は，個々の根元的な要素の動きであつて，その動きの空間的，時間的集計値を求めることは，我々の意識的な努力によつてのみ可能となるものである．この点に，これ迄の自然現象解明への接近の仕方と，社会現象への接近の仕方との大きな差がある．社会現象においては，このように先ず集計という行為を経てはじめて，各種の法則性が見えて来るのであるけれども，それが真の法則性，即ち予測性を持つかどうかという点に更に問題がのこる．ここで再び，集計値を，それを構成する単なる根元的要素ではない新たな理論的単位，或はそのような単位の系，の動きを規定する法則に還元することによつて，空間的，時間的な無数の繰返しを可能ならしめなくてはならない．これが所謂理論的な接近であろう。」

この表現は全く抽象的であり，しかもその報告においてはこれについての具体的な例を与えていない．そこでここで少しくこの記述について解説を加えることにしよう．ここで問題にしている“社会的” な現象というのは，本来個々人の単なる累計によつては把握出来ないということを前提している．このことは，各個人が悉く等質なものであるとは考えられないことを意味する．多数の観測値が統計的な意味を持つためには，そこに何等かの意味で等質化されたものの観測の繰返しを基礎にもたなければならない．この等質化を果たした上ではじめて，そのような等質化された単位の集りとして観測値の分布の構造が把握されるであろう．筆者はこの点についてはやや具体的な結果をこの報告以後において得ているが，更にその上に時系列としての数学的表現が形式的に有効な結果を与えるような例は得ていない．勿論各個人の動きが初めから全く等質的であると見做されるような現象については比較的簡単に確率過程の模型が適用されるが，ここで述べたのはそういう現

象についてではない．しかも上述の等質化は，最終的に問題となる観測結果以外の観測値によるものでなくてはならない．統計的方法適用の条件を明かにするこの方向の基礎的な研究が社会的な現象を取扱う研究者によつて大いに発展させられることを期待したい．以下の議論においては一応この方面の問題をはなれて，通常の物理的現象に見られるような単純な等質化された統計的現象に限つて見ていくことにする．報告［P.1］において，系列現象の統計的解析に関し一般的な結果として筆者は大要次のようなことを述べた．

「統計的解析を行おうとする対象をその時間的特性によつて分類すると

イ．時間を問題にしなくてよい場合

ロ．時間が積極的に問題となる場合

ハ．上記二者の中間に位する場合

となる．この分類は極く粗雑な分類であるが次のように考えるとその意味は明かとなろう．即ち，時間と共に変動する現象を考察する際には，分析の対象の固有の変動の速さと，我々がその対象に対して働きかける働きかけの時間的特性との相対的な関係を考えなくてはならない．その結果によつて現実の解析の方法は全く異なつたものとなる．技術的には

1. 解析を行う時の時間の単位をどう定めるか．
2. 対象の特性を表現するものとしてどのような標識に着目するか．
3. 標本をどのようにして取るか．

が問題となる。」

以上のような点について，数式的な模型の適用以前に検討することが必要であるというのである．ここで，この報告［P.1］に述べられていることの内容をもう少しくわしく見ると，計算速度の問題，時間的に連続的と見做される現象を離散的に観測する際に生ずる問題，多数の観測値が同時に問題とされる場合とそうでない場合における定式化の重点のおき場所の違い等が述べられている．これ等の点は現実の現象を表現する際にどのような確率過程によつて近似するのがよいかの条件をも示していると思われる．これを更に統計的手法適用上の技術的な面だけに限つて明確に述べると次のようになるであろう．

「確率過程の模型の適用の結果を実際の観測値と数値的に対照させる計算機が実用上十分な速度を持つか。」

即ち模型の適用が空想的なものでなく実用的なものであるように時間的特性に対する考慮が払われることが必要である．このように表現すると今後系列的な現象の解析に際して有効な確率過程の設定に対しかなり多くの示唆が得られる．

例えば

1. アナログな処理が必要な対象とディジタルな処理が可能な対象との区別
2. 連続的な現象を時間的にサンプリングを行うことによつて離散的にして取扱う際の雑音の問題
3. 連続的な変量をディジタルに表現することにより導入される雑音の問題

等にすぐ気がつく．しかもディジタルな表現の方が数値的な解析を行う際に自由度が大きく，実際に観測される現象への近似が極めて容易に行われることを考えに入れると，これ等の注意は実用上かなり重要な意味を持つことがわかるであろう．近似的に全般的な見通しを得ようとする場合あるいは極限移行の考えを媒介とし得る現象への模型の適用の場合等を除いては，直接箇々の現象の取扱いに際しては多くの場合ディジタルな接近の方がすぐれていると思われる．したがつて **Grenander** が近似的な手法を云々する場合，もし漸近分布の意味での近似的な方法を考えているとしたら近似的方法のもつ役割を限定しすぎていることになる．特に最近のディジタル型計算機の進歩はこの点をますます明かにして来ている．同時にアナログからディジタルへ，ディジタルからアナログへ等の相互の間の移行も論じなくてはならない．とにかく計算機（手計算も含む）との対

応を無視した統計的手法の定式化は現実性のないものということになろうと思われる.

さて上述のような方向についてはたとえば既に自動制御系にディジタル型計算機を挿入する場合における問題として相当な研究が行われている Jury [6]. またパルス符号変調 (pulse code modulation) 方式の通信においても量子化雑音の問題として研究されている. これらの研究の成果を考慮に入れることにより系列的な現象の統計的な模型による表現に際しても各種の問題が提起され明確に定式化されるものと思われる. 筆者が間隔過程の導入に際して離散的な時間径数の模型を用いたのはここに述べた意味での近似の自由度の大きいことと, 数値計算上の利点からであつて, その実用上の意味は極めて大きいものであることが認められたが, その際も連続的な現象を量子化することにより導入される雑音の検討については, まだ経験的な段階に止つている. この点についても当面実用上は問題がないとしても更に理論的な検討が有効な結果を与えるであろうと考えている.

§ 4. 模型の設定以後の問題及び所内の成果について

以上述べたところは, 主として Grenander がその論文の結論として述べたもののうちその i) に概当する模型の設定に関係するもの, 即ち有効な模型の定式化にはどのような点に考慮を払う必要があるかについての筆者の考えであるが, これからその ii) 即ち基礎となる模型の設定以後の問題について簡単に述べたい.

基礎となる確率過程の構造が確定されると, 箇々の場合における観測値にもとずく模型のあてはめが問題とされる. ここに統計的手法の適用が要求されることは当然である. 更に実際的な問題としては, 与えられた基礎の系列に一定の変換を施した場合, 即ちはじめの系列をある機構に入れてやつた場合, どのような系列が得られるかを論じなくてはならない. この議論は基礎の確率過程と変換の機構が与えられれば全く確率論の問題として処理できるが, この場合にも常に前述の実測値との対応を考慮に入れて定式化されることが必要であろう. しかし何れにしてもここでわれわれは一番の基礎となるもとの確率過程の設定を終りその後の比較的はつきりした数学的な処理が主な役割を果す場面にあるわけで, これはこれまでの段階に比べて遙かに仕事がしやすい場面にあるものといえよう. さてここで前掲の Journal of the Royal Statistical Society における論文の傾向を示す資料をもとにしてこの辺の問題をもう少し具体的に述べながら, われわれの研究所において最近 (1951年以後) 得られている成果の中, 所の雑誌に発表されたものに簡単にふれていきたいと思う.

先ず確率過程の変換に関しては, 周波数解析の意味を持つ場面即ち直線的な機構を持つフィルターによる定常な時系列の変換が考えられる. この場合については, もはやここにあらためて論ずるまでもないであろう. 特に Kolmogorov, Wiener による予測理論の展開はまことに著しい影響をこの方面の研究者に与えたものと思われる Wiener [13]. しかしながらこれまでに得られたこの方面の主な結果は要約すれば最小二乗法にもとずく回帰方程式の解を論ずるだけのことになるから, 比較的取扱いは簡明なものと考えられる. これに反して, ノンリニヤーな機構による系列の変換は更に種々の困難な問題を含んでいる. われわれの研究所における成果としては, 雨量と川の流量とをこのような変換によつて結びつけられる過程であるとして, その変換の機構を多年にわたつて追求しつつある菅原及び丸山の研究 [M. 12, M. 13, M. 14, M. 15, M. 16, M. 17, M. 18] は極めて興味深いものであろう. なお, 定常な時系列に関する一般的な統計的方法の展開, あるいは Wiener の予測理論に関係するものとして嶺 (風見) [A. 7, A. 8, P. 6] 高野 [A. 12] 等がある.

次に周波数解析以外の題目にふれるものとしては, 基礎におかれる確率過程は, 再生的なものがほとんどである. たとえば再生過程, 出生死滅過程, 分枝過程等があるが, これらは時間の経過と共に状態の変化が飛躍的に発生することが特徴的である. このような系列の変換として考えられるものの中では, 逐次解析の基礎となる "ランダムな歩み" をその変換機構の基礎とするものが多

く，それが一定の境界に達した後に全体の過程が更新されるものが多い．これについてややくわしく例について述べることにしよう．先ず計数器（カウンター）の問題として良く知られているのは，入つて来る衝撃の間隔が互に独立な一定の分布に従うものとする場合，作動状態にある計数器に初めの衝撃が到来すると，その後に不感応の時間（dead time）が続き，その間に到来する衝撃は計数されず，再び計数器が作動状態になつてから最初に到来する衝撃が計数される模型であつて，この場合不感応時間の開始時刻が前述の“ランダムな歩み”の境界になつている．この時の不感応時間の与えられ方によつて計数器問題の型が定まるわけであり，それぞれの型に応じて原系列がどのように変換されて記録されるかが問題となる Albert & Nelson [1]．次に先着順にひとつの窓口でサービスを受ける待合せ行列の問題を考えると t_r を r 番目の客と $r+1$ 番目の客の間隔を表わす確率変数（他と互に独立）とし，s_r を r 番目の客のサービス所要時間（他と互に独立），w_r を r 番目の人の待ち時間とすると $w_{r+1}=(w_r+u_r)\vee 0$ なる関係が成立する，ただし $u_r\equiv s_r-t_r$ である．この関係によりもとの系列から w_r の系列が得られるのであるが，明かにこの系列は $w_r=0$ なる条件のところで更新される．これに関連する研究は Lindley [8] Smith [11] にくわしく，特に Smith [11] においては待ち時間の分布函数に関する積分方程式に対して Wiener-Hopf 型の積分方程式の一般論をもとにし待合せ行列の際に現われる核函数がふたつの正なる確率変数 s_r，t_r の差の分布函数となるという特殊性を用いて明快な解を与えている．この結果は各種の場合に対する数値解を与えるため実用上にも極めて有効なものと思われる．ここで注目した待合せ行列の場合の変換は，変換といつてもやや前の計数器の場合と趣きを異にしているわけで，$w_r=0$ となるような場合にだけ注目しても入つて来た人の系列そのものは出て行く時に計数器の場合から予想されるように再びもとの系列と同じような再生的な性質を持つとは一般には言えない．特に筆者が報告［A. 4］で導入した待合せ行列ではそのような性質を持つのであるが，これは実は不感応時間がその間に到達する衝撃毎に相加されるものとした場合の計数器と同じ型になつている．更にダムの放水の仕方，在庫量の統制等の問題の模型もまた多くランダムな歩みによつて規定される系列の変換の形をとつている（これはまた自動制御の一例であることは勿論である）Gani [5]．交通の制御，たとえば交叉点での赤青信号による交通整理等がまたこのような過程の変換の一例であることも明かである．この中でも前述のようなランダムな歩みによる制御の模型が考えられている．このようにある意味で類似の問題が極めて多いということは今後の数学的現表において各種の統一的な見方あるいは処理を与えるものが現われる可能性を含んでいるものと思われる．特に待合せ行列，計数器の問題等の処理に当然のことながら所謂 renewal の考えにもとずく積分方程式による表現が多く用いられていることは興味がある．これらについては総合的な報告 Smith [12] がある．われわれの研究所における最近の研究もまたそのほとんどがここに述べた種類の題目に関するものとなつて来ている，これは特にそのような模型で表現される現象が通常それほど特殊な装置を用いなくても観測記録が得られるという事情にも大いに関係があるものといえよう．崎野，林［A. 10］，植松［A. 14］赤池［A. 3, A. 4, A. 5, P. 4］．

さて以上述べたところは主として基礎となる確率過程の範囲を限定した上での変換機構についてであつた．これらの問題に付随する統計的手法について簡単に述べたい．すでに Grenander も述べている通り，時系列に関係する統計量は大抵何等かの意味で大標本的な性格のものである．これは従来時系列に関して発展させられた統計的手法がその“解析”に主として用いられ，その“管理”に用いられるものが少かつたことによるものと考えられる．今後の方法の発展においても，基礎となる過程の型の決定（あるいは推定）という基礎的な段階において用いられる統計量は，その精度に対する要求上必然的に大標本的なものとなるであろうと思われる．この場合に注目する統計量が，用いられるサンプルの数が極めて大である場合であつても依然として問題になる程の変動を示す場合が生ずる．このような場合に対して推定しようとするパラメーターを観測する標本の分布

函数の函数として表現し，その分布函数を標本による経験的分布函数におきなおした統計量を以て求めるパラメーターの推定量としようとする例は多い．この際に一般的に有効な方法として von Mises による **differentiable statistical function** の方法があるが [9]，それは経験的分布函数の分布函数からの変差が標本数が大なるときに適当な尺度の下にガウス過程によつて近似されることを基礎に置いている．このガウス過程については時間の尺度の変換により更にこれをブラウン運動として表現する方法が考えられる．このブラウン運動過程に対する適当な「囲い」のつけ方が，得られる統計量．(特にそれが統計量の系列をなす場合) の幅づけに重要な役割りを果すことになる Doob [3]．この方面の研究はしたがつて時系列に関する特殊な統計量の議論を実用化する上で重要な意味を持つ．Grenander 及び Rosenblatt の研究 (1953) (§ 1 文献参照) には Doob [3] の結果が利用されている．本尾の報告 [A. 9] は多次元のブラウン運動に関するこの種の基礎的な研究を行なつている．ただしこれ等の極限分布の利用は現実の連続的な現象の近似としてではなく有限箇の標本をもとにする推定量の分布の近似として用いる場合には必ず実用上の近似の程度を検討する必要がある．これには実用性がある程に精密な近似の程度の評価が解析的に得られればこれに越したことはないけれどもそれが困難なのが通例である．この際にはモンテカルロ法による実例を以て理論的な結果を補うことが何よりも大切であり，実際近似の結果を利用しようとする利用者にこの実験例は極めて多くのものを与え得るのが普通である．最近の高速計算機の発達はこのような実験を可能にして来ている．これに関連して乱数の作製も技術的に重要な問題となつて来る．われわれの研究所においても，はやくより FACOM-128 継電器式万能自動計算機を導入しその統計理論発展への利用をはかつて来たが，特にモンテカルロ法への適用については石田による放射性粒子の数の計数結果を利用する乱数発生機の実用化をはじめとして多くの関心が払われている．石田 [A. 6, P. 5] 西平 [P. 8] 赤池，三枝 [P. 3]．モンテカルロ法は前述のような近似の程度の検討に際してばかりではなく，一般に解析的な接近が全く困難とされる模型に対して実用上十分とされるような数値解を与える手法としても極めて重要な役割を果すものである．それに関連する所内の時系列関係の成果としては伝染病の伝播模型の検討を行つた崎野の報告 [A. 10]，縦につながる待合せ行列の検討を行つた筆者の結果 (昭和 32 年度研究発表会の報告，ただしこの結果は更に理論的な検討が必要である) 及び前述のような統計量の分布の近似の程度の検討に用いた例として赤池 [A. 5] がある．

前述の統計量の極限分布を求めるために確率過程を利用する場合のように一般にサンプル函数 (確率過程の実現値) に直接各種の変換を適用した結果の確率変数あるいは確率過程を考えることが理論の展開上必要でもあり，また有効である例は多い．特に Dirac の δ-函数の系列として表現される衝撃波の系列の処理についてもこのような取扱いの発展が望ましいが，これは所謂ランダムな超函数という形で単に理論的にだけではなく電話交換機の模型等に具体的に応用されている Fortet [4]．この際に興味あることは多数の回線がある場合でも，これに順序をつけて考えれば前述の計数器の模型の組合せと全く同じ形になることであつて，この意味でも計数器による系列の変換が実用上重要なものであることがうかがわれる．とにかくこのような衝撃波の系列の理論的な取扱いは当然それが各種の積分的な機構を通過する際に生ずる系列の構造の議論にはじまるわけで，各種の函数空間における確率要素の問題となるのであろうが，これ等の研究が単に理論的な可能性を論ずるだけでなく，従来直観的に考えられていたような実用上有効なあるいは便利な演算の方式を明確にし，その基礎を危げなく与えるという方向にも進められることに期待したい．具体的な統計的現象の処理に際してもこれを自由に行えるようにするためには Grenander もいう通り厳密な数学的基礎の上に立つ手法の展開ということが必要であり，またそのような手法の展開に際しては単に厳密であるというだけでなく，厳密な解析によつて却つて具体的な現象により近づき得るような，より直観的な内容を持ち得るというような形での理論の展開がこの上なく望ましいもので

ある．少くとも統計に関する限り真に有用な理論はそのような形で次第に洗練されて来ているものと考えられる．ここに述べたことと関係するものとして偏微積分方程式と確率過程，径路積分の関係を論じた横田の報告［**P. 7**］［**A. 15**］がある．われわれの研究所における研究も先ず現実的な有効性を念頭におきながら発展し来つたものと考えられるが，それ等の成果の積み重ねの上に更に今述べたような意味での洗練が加えられねばならないことは明かである．

なお以上の話しは主として一次元的な現象に関する模型についてであつたが，多次元的な系列を直接取扱う型の模型については所内の成果についてのみ簡単にふれることにすると，有限な集団の内部における伝染病の伝播あるいは噂の伝播等の現象の模型がこの系統に属するものになると思われるが，ここでは特に集団の大きさが問題となるであろう．多賀，及び鈴木による報告［**A. 11**］は，まだその基礎にある模型は静態的であるが，将来においてはこのような現象の追求に関係するものと考えられる（なお **1950** 年以前に林による報告［**M. 22**］がある）．ここで前掲の **Journal of the Royal Statistical Society (series B)** の資料に対応するものとしてわれわれの研究所の雑誌に関するデータを掲げたい．この結果は，この二誌に関するかぎりわれわれの研究所における確率過程に関係する統計的な研究が **Journal of the Royal Statistical Society (series B)** に比し以前においては過度に少くなかつたこと，及び最近に至つてそれが増加して来ていることを物語つている．即ちわれわれの研究所において確率過程に関係する研究が従来の結果の累積の上にようやくその新しい軌道に乗ろうとしていることを示しているものといえよう．

Vol 年	I '49～'50	II '50～'51	III '51～'52	IV '52～'53	V '53～'54	VI '54～'55	VII '55～'56	VIII '56～'57	IX '57～'58	X '58～'59
論文総数	10	12	12	12	14	17	21	22	21	18
本文中で言及した論文数	0	0	0	1	1	1	2	2	4	4

Annals of the Instute of Statistical Mathematics の論文の傾向.

巻 年	1 '53～'54	2 '54～'55	3 '55～'56	4 '56～'57	5 '57～'58	6 '58～'59
論文総数	12	16	8	9	16	9
本文中で言及した論文数	1	2	1	2	3	1

統計数理研究所彙報の論文の傾向.

現在進行中の研究の題目としては次のようなものがある．先ず社会的な現象に関係するものとして各種のマスコミュニケーション過程についてその時間的な推移を考慮に入れて実態の調査が行われている．次にそれ以外の現象に関係するものとして，前述の雨量と流量との関係の研究は益々進められて，その模型と，対応する河川の地質学的特性との対応が認められる段階に入つている．現今問題とされる雑踏の問題についても，これを単に定常な流れの条件の下に考察するだけではなく過渡的な現象としての側面から考察する試みが，両国橋における花火の見物人の動きに関する観測資料をもとにして行われつつある．更に伝播的な現象の取扱いについて伝播の時間的推移の検討が加えられている．これは伝染病の持続日数の観測値の分布をもとにし，この分布との対応を考慮に入れながら伝染の模型を検当しようとするものである．再生的な過程に関連するものとして在庫統制の型の模型の更に複雑化したものが自動繰糸工程に関連して検討されている，しかしまだ特殊な模型に関するモンテカルロ法による実験の域を出ていない．以上は直接過程の実現値が観測されるような統計的現象に関係するものであるが，既に抽象化された模型の数学的基礎の展開に関連する研究としては，統計力学の基礎におく過程の構造の検討，及び拡散過程に関する一般的な研究が進められている．

結　び

以上述べたところは主として §3 の確率論的な模型の設定に重点が置かれ，その後の技術的な展開に関する記述はまことに不十分なものとなつてしまつた．この点については個々の専門的な研究成果にゆずることにしたい．具体的な個々の問題の特性と，その処理に用いられる解析的方法との対応を論ずることは興味あることと思われるが，これを論ずることについては次の機会を待ちたい．

さてこれまで記述したことから見られるように，われわれは個々の具体的問題だけに埋没することもなくまた徒らに抽象的な形式の美だけを追うこともなく，全く具体的な現象の記述から始めて高度に抽象的な数学的表現に至るまでの間に一貫したつながりを持たせて研究を押し進めることを希つている．この一貫したつながりはわれわれが統計理論の社会的な生産への有効な適用を意図する時極めて明かに理解される．それは自らの研究分野に精通すると同時に隣接する領域に対する深い理解を持つ研究者の横のつながりとして具体化される．このような形での研究の体勢の組織化が，これまでわれわれが手探り的研究の内に費して来た時間の幾割かを節約し，将来の基礎的研究の展開の地磐を形造るであろう．諸外国におけるすぐれた研究の成果もこのような地磐のないところに移し植えられては新しい次の世代を生む力を持たないように思われる．この点については Grenander の説く所を聞くまでもなく既に各種分野の研究者と統計理論の研究者との接触がわれわれの研究所における研究の発展のひとつの基礎的な条件をなして来ていると考えられる（佐々木達治郎，彙報発刊の辞．統計数理研究所彙報第1巻（1953）赤池 [P. 4, R. 1]），われわれは Grenander の提起した問題に対して深い共感を持つと同時に，まことに緩慢にではあるが，われわれ自身彼の提起した問題の具体的解決の道を実は彼の問題提起を聞く以前から進んで来ているものと考えるのである，勿論統計的方法に関する技術的な結果については，その開発がようやくその緒についたばかりであるが．かくしてわれわれは前述のような研究態勢の推進を条件として確率過程に関する統計理論の前途に対して極めて明るい見通しを持つことができるのである．

付記　本稿完成後 Wiener の近著

Nonlinear Problems in Random Theory (1958), The Technology Press of M.I.T. & John Wiley & Sons, New York を見る機会を得た．その内容はこの報告の内容と触れる所が多い．

なお文中で触れた所内での研究成果は発表されたものすべてをつくすことを意図したものではないが，一，二を除いてほとんどすべてに触れていると思う．なお，参考のため統計数理研究所考究録，及び統計数理研究輯報に発表された確率過程に関係する論文（論文紹介はのぞく）の目録を最後に掲げた．

統 計 数 理 研 究 所

参 考 文 献

[1] Albert, G.E., and Nelson, L. (1953): Contributions to the statistical theory of counter data. A.M.S. vol. XXIV pp. 9-22.

[2] Bendat, J.S. (1958): *Principles and Applications of Random Noise Theory*, John Wiley & Sons, New York.

[3] Doob, J.L. (1949): Heuristic approach to the Kolmogorov-Smirnov theorems. Ann. Math. Stat. Vol 20, pp. 393-403.

[4] Fortet, R.M. (1956): Random distribution with an application to telephone engineering. Proc. of the 3rd Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. Vol. II, pp. 81-88.

[5] Gani, J. (1957): Problems in the probability theory of storage systems. Jour. Roy. Statist. Soc. 19 pp. 181-206.

[6] Grenander, U. (1957): Modern trends in time series analysis. Sankhyā 18, pp. 149-158.

[7] Jury, E.I. (1958): *Sampled-data Control Systems*, John Wiey & Sons.

[8] Lindley, D.V. (1952): The theory of queues with a single server. Proc, Camb, Phil, Soc. 48, pp. 277–89

[9] Mises, R.v. (1947): On the asymptstic distribution of differentiable statistical functions. Vol. 18, pp. 309–348.

[10] Shannon, C.E. and Weaver, W. (1949): *The mathematical theory of communication*, Univ. Illinois. Press.

[11] Smith, W.L. (1953): On the distribution of queueing times. Proc. Camb. Phil. Soc. 49, pp. 449–61.

[12] Smith, W.L. (1958): Renewal theory and its ramifications. Jour, Royal. Statist. Soc, 20. pp. 243–284.

[13] Wiener, N. (1949): *Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series*, John Wiley and Sons, New York.

Annals of the Institute of Statistical Mathematics

[A.1] Akaike, H. (1955): Monte Carlo method applied to the solution of simultaneous linear equations. Vol. VII pp. 107–113.

[A.2] ―――― (1956): On optimum character of von Neumann's Monte Carlo model. Vol. VII pp. 183–193.

[A.3] ―――― (1956): On a zero-one process and some of its applications. Vol. VIII pp. 87–94.

[A.4] ―――― (1957): On ergodic property of a tandem type queueing process. Vol. IX pp. 13–21.

[A.5] ―――― (1959): On the statistical control of the gap process. Vol. X pp. 233–259.

[A.6] Isida, M. & Ikeda, H. (1956): Random number generator. Vol. VIII. pp. 119–126.

[A.7] Kazami, A. (1952): Asymptotic properties of the estimates of an unknown parameter in stationary Markov process. Vol. IV pp. 1–6.

[A.8] Mine, A. (1954): Estimation of linear regression coefficients in time series. Vol. VI pp. 181–189.

[A.9] Motoo, M. (1958): Proof of the law of iterated logarithm through diffusion equation. Vol. X pp. 21–28.

[A.10] Sakino, S. & C. Hayashi (1959): On the analysis of epidemic model I (Theoretical Approach). Vol. X pp. 261–275.

[A.11] Taga, Y. & Suzuki, T. (1958): On the estimation of average length of chains in the communication-pattern. Vol. IX. pp. 149–156.

[A.12] Takano, K. (1953): Note on Wiener's prediction theory. Vol. V. pp. 67–72.

[A.13] ―――― (1958): On the basic theorems of information theory. Vol. IX. pp. 53–77.

[A.14] Uematu, T. (1958): On the traffic control at an intersection controlled by the repeated fixed-cycle traffic lights. Vol. IX pp. 87–107.

[A.15] Yokota, T. (1959). Stochastic methods of solving partial integro-differential equations and their application to non-stationary Markoff process. I. Vol. X pp. 137–161.

統計数理研究所彙報

[P.1] 赤池弘次 (1953): 系列現象の統計的解析–II ――株価変動の統計的解析――, 第 1 巻 47–62.

[P.2] ―――― (1955): 系列現象の統計的解析–III ――株価と新聞内容の統計的解析――, 第 3 巻 3–26.

[P.3] 赤池弘次, 三枝八重子 (1957): 系列現象の統計的解析–IV ――モンテカルロ法へのリレー計算機の利用について――, 第 5 巻 58–65.

[P.4] 赤池弘次 (1958): 系列現象の統計的解析–V–(I) ――間隔過程と繰糸工程管理――, 第 5 巻 133–139.

[P.5] 石田正次 (1956): 放射能のランダム性について, 第4巻 31-33.
[P.6] 風見秋子 (1954): 定常確率過程における ω^2-統計量, 第2巻 43-47.
[P.7] 高野金作 (1954): Wiener 過程の P. Lévy による構成, 第2巻 31-36.
[P.8] 西平美恵子 (1958): 石田式乱数作成機のランダム性について, 第5巻 109-113.
[P.9] 横田紀男 (1956): 偏微積分方程式と径路積分と確率過程との関係. 第4巻 43-71.

統計数理研究所講究録

[M.1] 宇野利雄 (1944): ストカスチック補間法, 第1巻 100-105.
[M.2] ——— (1946): 不規則外力による強制振動, 第2巻 89-91.
[M.3] 小川潤次郎 (1946): A. Wald の Sequential test の基本公式について, 第2巻 430-437.
[M.4] ——— (1946): Poisson 分布に対する Sequential test, 第2巻 468-475.
[M.5] ——— (1950): Dosage Mortality curve & Systemetic Statistics, 第6巻 217-228.
[M.6] 角谷静夫 (1944): Browen 運動について 1, 第1巻 14 号 34-45.
[M.7] 河田敬義 (1944): 正規確率過程について, 第1巻 121-157.
[M.8] ——— (1946): 正規確率過程について, 第2巻 70-183.
[M.9] ——— (1946): 彷徨エルゴード定理について, 第2巻 400-417.
[M.10] 坂本平八 (1944): "ストカスチック補間法" に関する Kolomogoroff の論文について (その 1), 第1巻 229-342.
[M.11] 崎野滋樹 (1939): 体温の週期性並に体温と体質との関係について, 第5巻 394-405.
[M.12] 菅原正巳 (1951): 降雨量と河の流量と ——那賀川の流量と流域の雨量との関係について——, 第7巻 116-156.
[M.13] 菅原正巳, 丸山文行 (1951): 雨量と流量と (II) ——利根川の洪水流量を流域諸地点の雨量から推定することについて——, 第7巻 412-446.
[M.14] ———, ——— (1951): 雨量と流量と (III) —— 宝川の流出機構について——, 第7巻 447-466.
[M.15] ———, ——— (1952): 雨量と流量と (IV) ——球磨川神瀬の月流量推定について——, 第8巻 21-56.
[M.16] ———, ——— (1952): 北上川洪水における狭窄部流量及び狐弾寺水位の推定について, 第8巻 159-182.
[M.17] ———, ——— (1952): 古座川の日流量推定について, 第8巻 329-354.
[M.18] ———, ——— (1952): ある linear filter 機構の作成について (毛細管よりの流出を利用する流量推定機構), 第8巻 355-360.
[M.19] 高島巳千雄 (1951): Random Function の積分について, 第7巻 323-329.
[M.20] 高野金作 (1952): 20 の扉について, 第8巻 308-316.
[M.21] 成田 裕 (1947): 紡績原論における二三の問題, 第3巻, 406-421.
[M.22] 林知己夫 (1946): 相関ある Chain 現象について, 第2巻 439-456.
[M.23] 増山元三郎 (1948): 連続記録からの読取についての一つの注意, 第4巻 85-87.
[M.24] 丸山儀四郎 (1947): 正規確率過程の積分表示, 第3巻 55-61.
[M.25] 森口繁一 (1947): 偶然量の系列階差の自己相関について, 第3巻 239-248.
[M.26] 渡辺寿夫 (1952): Interpolation の公式について, 第8巻 449-457.

統計数理研究輯報

[R.1] 赤池弘次 (1953): 伝播現象の統計数理的解析-I ——マイクロウェーブに於けるフェイディングの一分析——, 第 11 号.