一般統計推論から（その II）

——ノン・パラメトリックな問題に就いて——

藤　本　熙

（1959 年 5 月受付）

Some Topics in General Statistical Inference

Hirosi HUDIMOTO

一般統計推論からの一つのトピックとして，“その I” では “信頼度” についての論議がなされ，このあとの “その III” では，統計的決定函数に関する一連のことがらが論及される．これらはいづれも “一般統計推論” の名のもとで研究されている事柄とはいえ，部分は単にその部分として切離されたものではなく，ある一貫した考えの反映としてのそれであると考えられる．それでその概括的な展望を行うのも無意味ではないと思われる故，ここではそのようなことをも含めて話を進めたいと思う．主としてわれわれの研究所で行つたことを中心として述べるが，それに関連して外国の主な流れにも触れることにする．

一般統計推論の構成図式

〈考え方の点から〉

距離の構成とそれに基く決定方式の研究
ミニマックス原理に基ずく決定方式の研究 ＞ 及び具体的な解と適用領域との関連

推定及検定の問題の検討及再構成と統計量の性質に関する研究

確率化法による推論

〈形式の点から〉

ノン・パラメトリック形式——順序統計量，順位相関，ラン等の理論的展開とその適用領域との関連の研究

パラメトリック形式——極限分布とその漸近度の研究
　　　　　　　　　　　複雑なパラメーターの推定方法に関する研究

〈推論の基礎手段〉

推論に必要とする基本的評価方式とその性質の研究

その図式を上に与えておいたが，あとの記述の便と，論議のきつかけをつくるために，“一般統計推論” ということの概括的な意味を与えて出発としよう．処でこの用語が研究所の刊行物の中で用いられたのは，講究録第 3 巻（昭和 22 年）の松下 [17]，[18] がはじめであるようである．またその折の考え方は “推定及検定の問題を総合した，一層一般的な理論”—— といつたものであつたと思われる．いわば後年出版された Wald の “Statistical decision functions” [35] を予想しての命名であつたかも知れぬが，若い生長期の研究所を偲ばせて面白い．更に同じ頃の林 [19]，[20] を参照比較して見ると，ある意味において，研究所のその後の理論の方向を暗示しているようにも見える．因みに他の論文と対照して見ると，大体において “標本調査” と “小標

本論”に関する議論が大方を占めているのは，矢張り当時の時代の空気を反映しているということができよう．換言すれば，前者は第二次大戦後急速に強まつた当時の意味での新しい統計学の実際への適用，それは米軍駐留などによつて必要に迫まられ加速され，後者はその啓蒙活動と相俟つて“小標本論にあらざれば…”の勢を見せた．外国との時代的な関連を見るための一例を引いて見ると，講究録第2巻（第21号以降であるから，昭和22年）でA. Waldの“Sequential test”[36]に関する論文紹介（小川）の“はしがき”には次のように述べてある．

“統計的仮説の検定問題に関しては，従来はJ. NeymanとE. S. Pearsonの理論があつて比較的に纒つた体系をなしていたのである．然るに抜取り検査（sampling inspection）に端を発する本論文に於てA. Waldは標本の大さ n をrandom variableと考へる全く革命的とも云うべき思想を以てsequential testの考えを導入したのである．而して従来のNeyman-Pearsonの仮説検定論はこれにそのspecial caseとして包含されることになるのである．このsequential testは従つて理論的にはNeyman-Pearsonのそれより深く，更に実用的には，統計量の分布を定める必要がないので，一層簡単に用い得ると云う驚くべき性質を具有する．

本論文はA. Waldの前の論文“On cumulative sums of random variables”（Ann. Math. Stat., Vol. 15, 1944 [37] ―を指す）の結果を用いているのであるが，上記論文は目下国内にないので数学的証明は紹介者が自身で再現を試みたのであるが，二三の個所を除けば大体出来たように思うのでこの紹介の筆を執る次第である．（原文のまま）

如何にもこれは当時の研究所というよりは，寧ろ文献入手の不便をも併て国内一般の研究者の空気を伝えているように見える．

そのような研究所の歴史に纒る事柄はひとまずおくことにして，次第に研究の拡大発展とともに，研究領域に冠せられた課題の名称の意味内容も，当然のことながら，研究内容に対応して，変化した．そこで再びはじめに述べておいた事柄に立戻る訳であるが，極度に抽象化された一般的な段階から，現実的な具象の段階までの包括的な研究段階を，一義的に規定するような表現は到底望み得べくもない．しかし兎に角大雑把には，はじめの段階では――統計的な観点から，妥当する一般的な条件のもとで，どの程度の事柄が，統計的な意味でどの位の確かさで，立言できるかの論理的構成を研究する．また一般にその確かさは，標本に関係づけられた性質によつてなされる――と述べることができるのではあるまいか……

しかしながら，この“一般的な条件”といういい方には，あるいはすぐに実際適用の面から苦情が提示されるかも知れない．というのは，統計の研究が純粋数学のそれとは異つて，純粋に抽象的な対象を相手とするのが直接の目的ではないからで，解明の目的と解釈の線にそつて，一つの現象は有効適切な一つの方法を生むので，抽象的な一般論は現実的な裏付けなしには役立て得ぬとする議論である．しかしながらその様な考え方も，それはただ，現象の解釈⟷表現の可能性の対応関係と適用の特異性から包含関係が変化することで，それがそのためのみの方法に終るのでは興味はうすい．その様な訳で，矢張り無理のない一般的な条件――での考察は，そのためにも一層重要な役割を果さねばならぬことになる．何故ならば，それは各個それぞれ特殊な領域への統計的方法の適用の可能性を指示し，そのような理論を背景にして闇雲ではなしに足を踏入る勇気を与えるからでもある．即ちこの程度の大きさの観測値を標本として持つならば，それに応ずる知識が獲得できる限界が指示される．したがつてこのことは標本の大きさの安定条件の研究ともつながる訳である．換言すれば，近代化された大標本論としての様相をももつということができよう．また必然的に統計量の極限分布の研究とも関連する．しかもそれの標本の大きさの増加にしたがう近付き方の程度が，標本との関係で評価できるようなものであれば，更に望ましいのであるが，この辺の処は仲々むづかしい処である．この点は推論一般についても左様であるが，統計的な推論方式に関する議論以前の，評価への依存度も多い．即ち基本的な評価方式の研究にである．またそのような推論方式が前述のように，適用の面にも統計的に有力な情報を提供できるためには，その条件が解析の

便利のためばかりでなく，次の段階で拡げられる一般的適用性を予想してのものであることが望まれる．しかしながらこの点に関しては，ただに“一般統計推論”のみの問題ではなく“統計数理”全般の目指している事柄でもあるようである．したがつてそれが研究形態の種々なる相貌によつて，異つた研究過程を経てあらわれるに過ぎない．

そのような事柄を念頭におきながら，実際研究面に現われた二三の事例を見ていくことにするが，その前に一寸次のような言葉を参考に引用しよう．

“統計の問題を解くには，決定函数をきめる必要がある訳であるが，決定函数の中である意味で好ましい性質をもつている minimax 基準を満足する minimax 解などは，特別な場合を除きそれを実際に見つけることは厄介である．ところでそのような場合には困難な minimax 解を見付けるよりも簡単な決定函数を使つてその risk を評価し，サンプル数をふやすことによつてそれを満足すべき程度に小さくするのが得策である”．（松下，原文のまま）

松下 “**On the theory of statistical decision functions**”, **Ann. Inst. Stat. Math., Vol. 3 (1951)** [1] から “距離概念に基ずく決定方式” に至る一連の論文 [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8] で一貫して用いられている “近似度(**affinity**)” は，このような考えに基ずいて案出されたものであると考えられる．近似度は $\rho(F_1, F_2)=\int\sqrt{p_1(x)}\sqrt{p_2(x)}\,dm$, ただし $p_1(x)$, $p_2(x)$ は密度函数，F_1, F_2 はそれに対応する分布または分布函数——で定議されているが，その簡単な利用の一例を掲げると，$(\rho(F_1, F_2))^n<\epsilon$ となるように標本の大さ n を定め，独立な観測値 $\mathfrak{X}=(x_1, \cdots, x_n)$ を得るとき，n 次元標本空間 R_n に 2 種類の領域を定め，$\mathfrak{X}$ がその何れへ落ちるかによつて，その $\mathfrak{X}$ のしたがう分布が F_1 か F_2 と決定する危険度を ϵ より小さくすることができる [1]．またノン・パラメトリックな場合からは外れるが，そのようなものの実例の幾つかは，赤池との共著で [2] に掲げられている．鈴木，藤本と三人共著の [3] ではこの近似度が“統計的仮説検定”の問題に対して利用されている．

このような経緯を経て近似度を用いた議論は，“距離概念に基ずく決定方式”に関する幾つかの研究結果 [4], [5], [6] に繋るのであるが，この三つは，適合度，二標本の問題及び推定を取扱つた [6] と，独立性，**invariance**，二標本の問題を取扱つた赤池との共著 [5] で適用面の理論を，[4] でその基本的な概念が受持たれている．したがつてこれを小わけにすると，前の二つが“一般統計推論”のうち“ノン・パラメトリックな問題”に属し，あとの一つがその“基本問題”とすることができると思われる．更にあとの分は本尾との共著の “**On the fundamental theorem for the decision rule based on distance || ||**” [7] で評価の方式が幾分修正された．またこのような問題は丘本 “**Some inequalities relating to the partial sum of binomial probabilities**” [13] でも取扱われた．処で何れもここで用いられている“距離”は

$$||F_1-F_2||=\left(\int_R(\sqrt{p_1(x)}-\sqrt{p_2(x)})^2\,dm\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$=\{2(1-\rho(F_1, F_2))\}^{\frac{1}{2}},\quad R\text{；標本空間}$$

で定義される．これについてはこれが (1) “距離の公理” を充たし，(2) $P_r\{||F-S_n||>\eta\}\leqq B_n$ となるような $\{B_n\}$ で，$B_n\to 0$ $(n\to\infty)$ となるものであることが云える．ただし S_n は n 個の観測値に応ずる F の経験分布函数である．しかしながら，取扱われている議論は上記性質 **(1), (2)** を充たすものに対しては適用可能である．一方前の分に対してはこれらに続くものとして，“**Decision rule, based on the distance, for the classification problem**” [8] があるが，同一課題の“分類の問題”については藤本 [9], [10] もある．“近似度”の概念はそこでも一部分に用いられているが，他の部分では“分離の確率（判断成功率）”を経験分布で最大になるように求め，その評価を経験分布函数と分布函数との差から行つている．また“距離の概念”に基ずく考え方には，その概念を表に出して用いているものとして，**Wolfowitz** の一連の結果を掲げること

ができる．例へば [38]，[39]，[40]．[38] は Wald [41] で取扱われたのと類似の問題を処理するために用いたもののようであるが，その距離は Fréchet の距離として知られる $\delta_F(F, G)=\sup_x|F(x)-G(x)|$ と記せるものである．尚 [6] には，前述の距離の性質の (3) として掲げている "距離があらゆる点において分布の間の喰違いをよくあらわす，あるいは適合度に対しては，小さな確率（あるいは密度）をもつ点より大きな確率（あるいは密度）をもつ点で喰違いをよく表現する" ということからは Fréchet の距離は適当でないが，収斂あるいは極限に関する性質に対しては有用であることを述べている．[38] と類似の議論は [42] にもある．幾分主題からはそれるが，[41] は藤本 [43] でも論議され，セメント・モルタルの強度試験データーの処理のための適用例がある．また [38] の同一の問題に対する異なつた処理は [44] にも見え，これらに関係する議論に [45] もある．[44] で用いた方法は [46] とも関連するが，この内容にまで触れると [38] ででも述べているように歴史的な応汎な問題を取扱わねばならぬので，ここでは省略する．[46] はそのための好適な知識を与えてくれる．

斯のように見てくると，"距離概念に基ずく決定方式" というのは "一般統計推論" の研究の一つの優れた成果を示すものであるといえよう．その特長としては，分布の間の距離が与えられるとき，標本の大きさに応ずる経験分布から，どの程度の結論が，どの程度の確かさでいえるかを，明確な形で述べている処にあると思われる．勿論評価の形は更に修正されるであろうし，また充分な精度を得るための標本の大きさは相当大きいことを覚悟しなければならない．これはまだ追求の余地を残すものだといえるかも知れないが，それは一つには極めてゆるい条件での結論だということと，もう一つ重要なことは最終決定 (terminal decision) ということに関連しての議論であるからでもある．説明の便利のため例えば比較的簡単な二標本検定として取扱える場合を例にしてみれば，予め目的に応じて識別を必要とする二つの分布の最小距離と危険度と標本の大きさの何れか二つを与えるならば，他の一つが計算できるのであるが，この距離，危険度，標本の数それぞれは実際適用の場合には共に小さいのが望ましい訳であるし，また実験計画における処理の効果の判定のように，その効果の顕著であることに目的がある多くの場合には，相当巨額の費用を投じて多数の標本を集めた結果，効果のないことが判つた——というのではその目的のほとんどすべては役に立て得ぬ訳で，そのためには実験の各段階で次の実験への有益な情報を得るための統計的手段がより有効となり得ることになろう．しかしながら多くの統計家は "そのような場合でも，何時かは最終決定を行わねばならぬ"——というかもしれないが，そのような場合の最終決定というのは統計的な意味でのそれとはいささか趣をかえてしまつているかもしれない．そのような訳で実験を職務とし，統計的な処理をその実験の表現手段として，次の実験への足掛りと考えている人々に対しては，ときとしてはこの意味での最終決定ということは，直ちに適用の手段たり得ぬ場合も考えられる．多分同一条件下で繰り返えし観測が困難であつたり，そのために実験を重ねることに多額の費用を要したり，既に掲げた条件あるいは処理の効果に実験の主目的のある場合がこれに当る訳であろうが，このときには統計的な他の性質が一層重要な事柄として登場することになろう．しかしながらこのような点に関しては，他の人の議論が期待されるので，これ以上触れる積りはない．だがそのような事情があるとしても，統計的な一般的妥当性の研究の重要性は割引されるものではない．と同時に，それが適用の場面での有効性がどの程度の条件付加によつて即応できるかの追求も，次の段階として必要になつてくる．大分 "距離概念に基ずく決定方式" に関連する議論に多くを費やしてしまつたが，このような一般論を取扱つたものとして鈴木 [11]，[12] を掲げておこう．[11] では可付番無限個の密度函数の場合へ Neyman-Pearson の補題の拡張を考え，[12] では linear programming の概念を用いて，ディスクリートな場合の決定函数の問題を取扱つている．[11] はまた [47] の一つの拡張になつている．

一方既に一寸触れたが，"基本的な評価方式及びそれに関連する性質" の研究としては，最近のものを掲げると，石井のユニモーダルな分布の Stieltjes 変換における特徴づけと，モーメント

問題［14］,［15］に引続いて,“On a method for generalizations of Tchebycheff's inequality”［16］を掲げることができよう．それは，いくつかのモーメントを用いた確率不等式を利用して，標本値の現われ方を評価しようとするものであるが，従来のこの種の不等式のほとんどが，帰無仮説に固有の領域を考えているため，対立仮説に対する検定力等の計算などには使えない点を考慮して，もつと一般の不等式を得る方法を論じたものである．これについては，本号所載の“チェビシェフ型不等式に関する総合報告”（石井）の中に収録されているので詳しいことは省く．

またこの他に“Tchebycheff 型”の不等式を取扱つたものとして，水野［21］,［22］,［23］及び青山［24］,［25］を掲げておこう．

［21］においては，標本調査法の問題に関連して標本平均を推定するための不等式として

$$P_r\{|\bar{x}-\tilde{X}|\geqq k\sigma_{\bar{x}}\}\leqq\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2\lambda-1)}{k^{2\lambda}}$$

がある条件のもとで近似的に成立つことが示されている．ただし $\bar{x}$ は標本平均，$\tilde{X}$ は母集団平均，$\sigma_{\bar{x}}$ は $\bar{x}$ の標準偏差である．［24］はこれの異つた解析的導出を試みたものである　また［22］においては更にこの別の評価が与えられている．［23］,［25］はそれぞれ前述の結果を整理したものである．これに関連する外国の文献は，既に記した石井の総合報告に詳しいので，その方へ譲る．

以上“一般統計推論”に関する“ノン・パラメトリックな問題”として，研究所のメンバーの研究所で公表された成果のうち，記録になつているものを目に留るままにひろつて，その概観を与えて見たのである．しかしここでは課題にしたがつて“パラメトリックな問題”に対する論文は引用しなかつた．したがつて χ^2 のある種のものなどは，立場としては寧ろノン・パラメトリックな考えであつても割愛した．またそのIで信頼度についての論述があつたので，“統計的仮説検定”についての考えを挿む必要があつたかもしれないが，　それはこの論集の他の個所でとりあげられる可能性を予想して触れなかつた．

しかしながら，統計的仮説の検定という比較的古いこの問題は，一方において理論的には一層完備した検定の問題をも含む Wald の理論があるとはいうものの，具体的な問題について数量的に risk を計算するとなるとそう簡単には解決されぬ訳で，その意味で実際適用の面では簡単に目安をつけるための便宜があるとともに，その難点を除くための努力もなされている．既に述べた距離概念を用いた推論方式もまたこのような事情を含めた一つの試みであると考えられる．そのような訳でここでも検定に関する他の個所の議論と重複せぬ程度に一寸触れてみよう．例えば比較的最近のもので知られているものに Lehmann の検定に関する考え方があるが，比較参考のためその概要を示すと次のようなものになろう（［48］,［49］,［55］)．

Ω は確率変数 X の確率分布 $P(A)=P_r\{X\in A\}$ の集合であり，H は P が Ω の部分集合 ω に属するという仮説である．そのとき検定は P に関して可測な函数 $\phi(x)$ $(0\leqq\phi(x)\leqq1)$ によつて決定されると考える．換言すればこれは $X=x$ のとき H を棄却する確率と解釈されるものである．これを検定函数（test function, critical function）とよぶ．そうすると P が真の分布であるとき，H を棄却する確率は $E_P(\phi)=\int\phi(x)dP(x)$ で与えられ，それはまた Ω の上で定義される検定 $\phi(x)$ の検定力となる．また ω の凡ての P に対する $E_P(\phi)$ の上限を ω に関する検定 ϕ の size と呼んでいる．このような構成に基ずいて most powerful, most stringent 等の概念を導き議論の展開を行なうのであるが，議論としては幾分整つた形で行えるというものの実際に仮説検定の問題を取扱おうということになると，仮説検定本来の難点の本質的な解決へ道をつけるまでには至らぬように見える．例えば ϕ の size を α とするとき，size α の凡ての検定函数 ϕ' に対して $\Omega-\omega$ のある P_1 に対して $E_{P_1}(\phi)\geqq E_{P_1}(\phi')$ であれば，この ϕ を size α の most powerful test というのであるが，これで複合仮説を取扱うことにでもなると，検定の結果得られる知識とそのために必要となるア・プリオリな知識が同じような事柄であつたのでは，検定をすることは無意味にな

る．そのためには矢張り $\Omega-\omega$ と ω の分布との間の距離のようなもので risk が計算できて，それが検定に対するア・プリオリな要求として加えられるような形へもつてゆけるのが明解便利に思われる．また [48]，[49] で取扱つた invariance の問題は松下，赤池 [5] で距離の概念から包括的に論議されている．

このように見てくると，この稿の最後にノン・パラメトリック推論における具体的伝統的な問題とも考えられる“ラン”，“順位”，“符号”に基ずく議論をおとす訳にはいかぬかもしれぬが，既に掲げた幾つかには“順位”を用いた論述が含まれている．例えば [9]，[10]．しかしながら，研究所における一般的傾向としては，“ラン”とか“順位”とか“符号”とかのノン・パラメトリックな推論の解析手段を表に現わしての議論には，適用領域を予想しての結果，若しくはそのような領域での統計的な必要性から考案されて来ているものが多いのは，尤もなことだと思われる．それは一面からは，ノン・パラメトリックな議論が，まだ充分大きな標本が得られず，母集団の型の想定などということはもつともらしくないから，暫定的に左様するよりないとか，解析のための計算が簡単に済むとかの便宜的な見方よりも，心理，社会等，その様な領域の性質に従つて無理のない適切なものとして，有効な方法を案出しようとする傾向を見ることができるからでもある．そのような一例として，林，赤池“On a matching problem”[26] を掲げることができる．内容は予めカテゴライズされた意見あるいは態度のグループ内のマッチングが考えられ，その一致の数の和の分布及びモーメントが考察された．したがつてソシオメトリックな問題としての適用領域からの必要を示すものである．青山 [27] も同じような目的で考案されたものであろう．

恐らく研究所で社会調査の研究にたずさわつた人々の報告の中から，ノン・パラメトリックな適用例を列挙したなら，そのための相当な原稿のスペースと，収集のための余分な努力に時間を奪われることになろう．余儀なく [29]，[30] を記すに留める．

参考のため外国の文献のいくつかを引合いに掲げてみようとすると，Wilks の“許容限界”[32]，Mood の“ランの理論”[31]，Kendall の“順位相関”[51] 等余りに有名であるし，その他目につく処を掲げるだけでもこれまた大変であるが，試みに [48]，[49]，[50] をとつてみると，何れも“順位”を用いた検定の問題で，[48]，[49] は invariance を，[50] は独立性を取扱い，前の二つでは Lehmann の検定函数 (test function) が，あとの分では観測値の順位だけによつて決る D なる統計量が，解析の道具として登場する．しかしながらこれらの問題は“距離”の概念から統一的に取扱えることは既に述べた．また比較的古い文献は Scheffé の総合報告 [52] によく纏められていることを附記する．同じく“順位”を用いたものであるが，Mann-Whitney 型 [33] の二標本検定の問題を取扱つたものとして藤本 [34] がある．これははじめ鉄筋の強度試験への適用を考えて用いたのであるが，あとでデスクリートな場合への修正を考えて，ある社会調査 [55] へ利用した．更に分布函数の距離へ結付けて，すつきりした推論方式へもつてゆくことを考えている．なおこの型の二標本検定に関係した議論あるいは類似の議論を取扱つたのを掲げると，R. M. Sundrum [57]，Z. W. Birnbaum [58] 等相当な数になるが，$\int (F-G)^2 d\left(\frac{F+G}{2}\right)$ の型の量を取扱つた Lehmann の二標本検定 [59] もまた“順位”を用いた類似の問題である．更にこれに関連するものとして，Mood [60] を掲げることができる．

このほか“順序統計量”の極限分布を取扱うために便利なものとして，Hoeffding の極限定理 [53] が知られているが，本尾 [54] は幾分便利な Lindeberg の型の条件からこれを導いた．Hoeffding の定理を用いた実例として，Lehmann − Mann-Whitney の検定について，large sample power を [59] で得ていることを掲げておこう．

統計数理研究所

参 考 文 献

[1] K. Matusita : "On the theory of statistical decision functions," *Ann. Inst. Stat. Math.*, Vol. 3 (1951).

[2] K. Matusita and H. Akaike : "Note on the decision problem," *Ann. Inst. Stat. Math.* Vol. 4 (1952).

[3] K. Matusita and Y. Suzuki, H. Hudimoto : "On testing statistical hypotheses," *Ann. Inst. Stat. Math.* Vol. 6 (1954).

[4] K. Matusita : "On the estimation by the minimum distance method," *Ann. Inst. Stat. Math.*, Vol. 5 (1954).

[5] K. Matusita and H. Akaike : "Decision rules based on the distance for the problem of independence, invariance and two samples," *Ann. Inst. Stat. Math.*, Vol. 7 (1956).

[6] K. Matusita : "Decision rules, based on the distance, for problem of fit, two samples, and estimation," *Ann. Math. Stat.*, Vol. 26 (1955).

[7] K. Matusita and M. Motoo : "On the fundamental theorem for the decision rule based on distance || ||," *Ann. Inst. Stat. Math.* Vol. 7 (1956).

[8] K. Matusita : "Decision rule, based on the distance, for the classification problem," *Ann. Inst. Stat. Math.* Vol. 8 (1956).

[9] H. Hudimoto : "On the distribution-free classification of an individual into one of two groups," *Ann. Inst. Stat. Math.* Vol. 8 (1957).

[10] H. Hudimoto : "A note on the probability of the correct classification when the distributions are not specified," *Ann. Inst. Stat. Math.* Vol. 9 (1957).

[11] Y. Suzuki : "Note on the Neyman-Pearson's fundamental lemma," *Ann. Inst. Stat. Math.* Vol. 6 (1955).

[12] Y. Suzuki : "Discrete decision problems," *Ann. Inst. Stat. Math.*, Vol. 9 (1958).

[13] M. Okamoto : "Some inequalities relating to the partial sum of binomial probabilities," *Ann. Inst. Stat. Math.*, Vol. 10 (1958).

[14] K. Isii : "Some investigations of the relation between distribution functions and their moments," *Ann. Inst. Stat. Math.*, Vol. 9 (1958).

[15] K. Isii : "Note on a characterization of unimodal distributions," *Ann. Inst. Stat. Math.*, Vol. 8 (1957).

[16] K. Isii : "On a method for generalizations of Tchebycheff's inequality," *Ann. Inst. Stat. Math.*, Vol. 10 (1958).

[17] 松下嘉米男："一般統計推論に就いて," 講究録, 第3巻 (1947).

[18] 同　　上："一般統計推論について（続）," 講究録, 第3巻 (1949).

[19] 林知己夫："これくていふ序説," 講究録, 第3巻 (1947).

[20] 同　　上："Neumann の遊戯論覗見," 講究録, 第3巻 (1947).

[21] 水野　坦："或る不等式の群に就いて (1)," 講究録, 第5巻 (1949).

[22] 同　　上："或る不等式の群に就いて (2)," 講究録, 第5巻 (1949).

[23] H. Midzuno : "On cetain groups of inequalities (confidence interval for the mean)," *Ann. Inst. Stat. Math.*, Vol. 2 (1950).

[24] 青山博次郎："水野の不等式に就いて," 講究録, 第7巻 (1951).

[25] H. Aoyama : "On Midzuno's inequality," *Ann. Inst. Stat. Math.*, Vol. 3 (1951).

[26] C. Hayashi and H. Akaike : "On a matching problem," *Ann. Inst. Stat. Math.*, Vol. 4 (1953).

[27] H. Aoyama : "On a certain statistic in a social group," *Ann. Inst. Stat. Math.* Vol. 9 (1958).

[29] 多賀保志："Ranking に於ける有意差検定法," 講究録, 第8巻 (1952).

[30] 木村　等："Distribution free の場合の相関係数の検定に就いて," 講究録, 第7巻 (1951).

[31] A. M. Mood : "The distribution theory of runs," *Ann. Math. Stat.* Vol. 11 (1940).

[32] S. S. Wilks : "Statistical prediction with special reference to the problem of tolerance limits," *Ann. Math. Stat.* Vol, 13 (1942).

[33] H. B. Mann and D. R. Whitney : "On a test of whether one of two random variables is stochastically larger than the other," *Ann. Math. Stat.*, Vol. 18 (1947).

[34] 藤本 熙 : "分類と或る二標本検定及びその関係に就いて," 統計数理研究所彙報, 第5巻 (1958).

[35] A. Wald : *Statistical decision functions.* John Wily & Sons, Inc., (1950).

[36] A. Wald : "Sequential tests of statistical hypothesis," *Ann. Math. Stat.*, Vol. 16 (1945).

[37] A. Wald : "On cumulative sums of random variables," *Ann. Math. Stat.*, Vol. 15 (1944).

[38] J. Wolfowitz : "Consistent estimators of the parameters of a linear structural relation," *Skand. Aktuarietidskrift.* Vol. 35 (1952).

[39] J. Wolfowitz : "Estimation by the minimum distance method," *Ann. Inst. Stat. Math.*, Vol. 5 (1953).

[40] J. Wolfowitz : "Estimation by the minimum distance method in nonparametric stochastic difference equations," *Ann. Math. Stat.*, Vol. 25 (1954).

[41] A. Wald : "The fitting of straight lines if both variables are subject to error," *Ann. Math. Stat.*, Vol. 11 (1940).

[42] A. Mine : "Estimation of linear regression coefficients in time series," *Ann. Inst. Stat. Math.* Vol. 6 (1955).

[43] H. Hudimoto : "Note on fitting a straight line when both variables are subject to error and some applications," *Ann. Inst. Stat. Math.*, Vol. 7 (1956).

[44] J. Neymann : "Existence of consistent estimates of the directional parameter in a linear structural relation between two variables," *Ann. Math. Stat.*, Vol. 22 (1951).

[45] O. Reiersφl : "Identifiability of a linear relation between variables which are subject to error," *Econometrica*, Vol. 18 (1950).

[46] J. Neyman and E. L. Scott : "Consistent estimates based on partially consistent observations," *Edonometrica*, Vol. (1948).

[47] G. B. Dantzig and A. Wald : "On the fundamental lemma of Neyman and Pearson," *Ann. Math. Stat.* Vol. 19 (1951).

[48] E. L. Lehmann and C. Stein : "On the theory of some non-parametric hypotheses," *Ann. Math. Stat.* Vol. 20 (1949).

[49] W. Hoeffding : "Optimum nonparametric tests," *Proceedings of the Second Berkeley Symposium* (1951).

[50] W. Hoeffding : "A non-parametric test of independence," *Ann. Math. Stat.* Vol. 19 (1948).

[51] M. G. Kendall : "*Rank correlation methods,*" Charles Griffin (1948).

[52] H. Scheffe : "Statistical inference in the nonparametric case," *Ann. Math. Stat.*, Vol. 14 (1943).

[53] W. Hoeffding : "Combinatorial central limit theorem," *Ann. Math. Stat.*, Vol. 22 (1951).

[54] M. Motoo : "On the Hoeffding's combinatorial central limit theorem," *Ann. Inst. Stat. Math.*, Vol. 8 (1957).

[55] E. L. Lehmann and C. Stein : "Some principles of the theory of testing hypotheses," *Ann. Math. Stat.* Vol. 21 (1950).

[56] 藤本 熙, 藤本和子, 尾崎睿子 : "「週刊誌の買われかた」と「ニュースは新聞かテレビか」," 教育統計, 59 (1959).

[57] R. M. Sundrum : "The power of Wilcoxon's 2-sample test," *Jour. Roy. Stat. Soci.*, series B, Vol. 24 (1953).

[58] Z. W. Birnbaum and R. C. McCarty : "A distribution-free confidence bound for $P_r\{Y<X\}$, based on independent samples of X and Y," *Ann. Math. Stat.*, Vol. 29 (1958).

[59] E. L. Lehmann : "Consistency and unbiasedness of certain nonparametric tests," *Ann. Math. Stat.* Vol. 22 (1951).

[60] W. J. Dixon : "A criterion for testing the hypothesis that two samples are from the same population," *Ann. Math. Stat.*, Vol. 11 (1940).