

# 統計数理的立場よりみたるオペレーションズ・リサーチ

青山博次郎

(1959年2月受付)

## OR Reviewed from the Standpoint of the Statistical Mathematics

Hirojiro Aoyama

In this paper we have discussed the similarity of the methods of OR with those of the statistical mathematics. Then illustrating by some examples, we have mentioned the points in question which we must consider if we use the technique of OR, from the standpoints of the statistical mathematics.

Institute of Statistical Mathematics

### § 1. オペレーションズ・リサーチの概要

戦後日本で統計学に関連して耳目を騒がせたものは、時期を追つて挙げると、標本調査理論、統計的品質管理法、サイバネティックス、オペレーションズ・リサーチということになろう。ある意味からいえば、どれも共通の考え方をもち、またあるものは他のものをその一部として含む場合もある。第1のものが一般に浸透すると、次のものが新しく取沙汰され、またそれが表面から薄れていくと、他のものがもてはやされるというふうに、全く女子の服装の流行と同じような観を呈している。ある人にいわせれば研究費を新しくとるために名前をつけ換えたとすぎないとも極言されている。そこでオペレーションズ・リサーチ（以下 OR と略称する）とよばれているものがどんなものか、その本質を明らかにして、われわれのいわゆる統計数理という立場と比較してみようというのがわれわれの課題である。

OR が我が国に紹介されたのは P.M. Morse と G.E. Kimball の書物（文献 [1]）がその最初であろう。これは軍事的な作戦研究そのものであつたが、この中で「OR とは戦闘部（執行部）に対し、その管轄下にある作戦（作業）に関する決定を行うために、計量的な基礎を提供する科学的方法である」とのべられている。これが戦後の平和的な経営科学にとり入れられて経営者に科学的な判断を与える方法として喧伝されてきたのである。

OR の定義づけは多くの人を試みてはいるが、その取扱う分野も漸次拡大され、より大きい範囲を蔽うために定義も変りつつあるようだ。従つて多くの書物では定義よりも、むしろ幾つかの技法を示して、それから特色をつかませようと試みている。

先ず OR の特色について、E.A. Johnson [2] は次のようにのべている。

- (1) 組織全体にわたるオペレーションに関する研究である。
- (2) 組織に対し、短期間及び長期間に亘り、その健全性をより一そう多く保証するような方法によりオペレーションを最適にすること。
- (3) 最も新しい科学的な方法と技術の適用。
- (4) 従来の経営科学の方法と技術を総合し拡大すること。

- (5) 基礎的な諸科学に共通な方法で、分析的なモデルを展開し使用すること。
- (6) 実際のオペレーションの動きを見通しうるような実験的オペレーションの設計とその使用。
- (7) 複雑なオペレーションをもつ諸問題を解決するために、統制がとれ独創性がある多方面の訓練をうけているチームの研究を用いること。

以上の7つを特色としてあげている。

また彼は OR の役割として「OR は人と機械で構成されている体系を包含する活動の方針について、そこに提案されている色々な方針の価値、有効性及び費用の予測並びに比較を行うものである。このような比較を行うため、OR は論理的方法を用いて、また実行が可能な場合には数学的方法を用いて、分析的に展開せられた活動の模型を使用する。基礎的な、活動の特長づけるパラメータの値は、過去の活動の歴史的な分析、或いは計画されたオペレーションについての実験から導かれる。最も重要なことは、凡ゆる人間的な要因と機械的な要因とが包含されるように考えられているから、予測せられる結果の不確実さの推定および提案されている活動の価値、有効性並びに費用についての不確実さの推定値が与えられることである」とのべている。

そこで、次にどのような方法が使われているかを見易くするために、OR の技法の分類を掲げてみよう [3]。これはケース工科大学の OR グループがまとめたものである。

- (1) 一般的のもの
- (2) 在庫理論
- (3) 線型計画法
- (4) 動学的計画法
- (5) 割当の問題 ((3), (4) を除く)
- (6) 待合せ理論と確率過程
- (7) 順序ぎめの理論
- (8) 日常的な仕事(手順)の理論(セールスマン巡回を含む)
- (9) ラインの均衡についての理論
- (10) 取替え, 更新及び生命保険的のもの
- (11) 維持
- (12) 情報, 通信理論または自動制御理論
- (13) 探索理論
- (14) ゲームの理論
- (15) 統計学
- (16) 確率論 ((6) を除く)
- (17) 組織の理論
- (18) 数学的及びグラフ的のもの
- (19) その他

これは論文を分類する必要から行つたものであるが、一応どのような技法を含むかを知るには便利なものであろう。

これと同時に研究の見地からみて

- (1) 一般的のもの
- (2) 有効性の測度
- (3) 決定理論
- (4) 価値理論
- (5) 計算法
- (6) 標本抽出法

- (7) 器具の使用と測定
- (8) 管 理
- (9) 費 用
- (10) 推 定
- (11) 予測と予言
- (12) 実際の実験（計画を含む）
- (13) シミュレーションを用いた実験
- (14) オペレーションのゲーム
- (15) 定義，分類，基礎に関するもの
- (16) 資料の収集
- (17) 資料処理と分析
- (18) モンテカルロ法と確率化

という分類があげられている。

これらの詳細な説明は与えられていないが意図しているところは大体了解できると思うのでここでは掲示するにとどめておく。

### § 2. 統計数理と OR

前述の OR の技法の中にも統計学が含まれていたが、OR の問題は統計的方法が用いられない限り解決しないものが多く、また同じ operation がくり返されるが故に統計的分析が可能となつてくる。勿論逆に統計学の分野に OR の技法が用いられることもあり得る。従つてわれわれのいわゆる統計数理と OR もまた密接な関係をもつのも当然であろうが、その研究の方法からみると全く一致しているといつてもよいくらい相似たものである。これを文献 [4] のとり上げている方法と比較してみよう。

統計数理の方法は単に形式的方法論ではなく、現象に実際適用すべき、行為決定のための方法論であり、その詳細は文献 [5] [6]、あるいは本集報中の他論文に譲るが、この表を比較するだけで

OR の方法 [4]	
1. フォーミュレーション	1. 関連したオペレーションと管理されている伝達系統の分析 2. 経営問題の型式化 3. 研究問題の型式化
2. 数学的模型の構成	システムの効率の表現
3. 模型からの解法	解析的，数値的に解を求める
4. 模型及び解の検定	解が過去の資料とよく合うかどうかをしらべ適応性を確かめる
5. 解に関連する管理統制	統制できぬ変量が不変で，模型が変化しないことを確かめる
6. 解の実際作業への適用	解をオペレーションに翻訳して使用しやすくする

統計数理の方法 [5], [6]	
1. フォーミュレーション	われわれの研究し，調査しようとする対象に対し，目的からみて妥当な標識を与え，構造式を設定する方法を考究
2. 測定，調査・実験法の理論	調査や実験をどのように実施すべきかを考究・実験のための諸計画，調査法の理論を含む
3. 数量化の方法	定性的なものに（ときには定量的なものにも別の立場から）数量を与える方法。目的と相対的で，機能的，操作的立場をとる
4. 予測法	帰納的あるいは演繹的に信頼度高く，有効，適切な予測を行う方法
5. 分析総合法	調査や実験によつて得た結果を統計的推定法，検定法によつて分析し，結論づけを行う。目的に応じ新しい，最適の方法をあみ出す

も類似点の多いのには驚くことであろう。逆にいえば、何れの方法も科学の方法論として当然もつべき思考方法であるが故に類似するものである。

一二の問題に触れるならば OR でも、フォーミュレーションの中で、目標の重みづけというのが考察されているが、われわれのいわゆる数量化の方法ほど客観性のあるものではない。また資料の収集については当然統計数理の考え方そのものが必要であり、しかも測定における積極的な方法論を現在の OR では取扱つてはいない。われわれがフォーミュレーションで、また分析総合方法で、妥当性、信頼性、適応性をも考えるが、OR でも同様に考察している。これは経営執行者に対する科学的助言としては、当然必要なことである。

このように互いに色合いの差はあるが、考え方には大差はない。いうなれば表面に現われた技法、即ち LP や DP、情報理論等々が今まで喧伝され、OR を新しいものとしてクローズアップしてきたのである。

それならば LP が外国で考えられた新しい考えであろうか。これについては既に我が国でも掛谷宗一博士がその考えをもつておられたことが遺稿から判つた [7]。残念ながら我が国土に根を張らなかつただけである。LP として現在有名になつたのは、それが **simplex** 法という数値解法ができたからである。しかしこれとても実際の問題への適用になると、諸係数が誤差変動をもつため、**stochastic** に考察を進めなければならない。この方面にも少しづつ研究の歩が進められている [8]。一般には数学的に取扱い易くするために、平均的な値を確定値として、**deterministic** に用いることができるようにフォーミュレートしている。これらはやがて統計数理的な観点から **probabilistic** な方向に発展していくものであろう。

LP 以外の計画法でも、現在の段階では、数学的計画法という名前が示すように、まだ実際の変動性に適応するものは少い。その点で第一近似的な意味をもつにすぎない場合が多い。

以上の外に OR の技法としてゲームの理論、記号論理などがあげられている。ゲームの理論は J. von Neuman と O. Morgenstern によつて経済行動を説明するために考案された方法であることは周知のことである。考え方としては非常に面白く、統計的決定論への発展や、LP との関連など興味のあるところであるが、実際の問題に適用するにはまだまだであろう。ところが近時ビジネス・ゲームというものが経営学ブームの波にのつて現われてきた。ゲームの理論でゲームの値を実際数値的に求めるために、仮想的なゲームを行つていく方法や、([9])、工場ゲーム、戦争ゲームなど [10] があるが、これを真似てビジネス・ゲームが行われるようになったらしい。戦争ゲームに当るものは、わが国の旧軍隊においても兵棋演習という名前で行われていた。これによつて軍隊の動かし方や、兵站計算を練習したものであつたが、実戦に於ては遙かに多くの変動因があり、これを迅速に把握することができなくて使いものにはならなかつた。気持だけは判るという体のものであつた。

さてこのビジネス・ゲームであるが、これは経営幹部社員訓練のために行われるもので、我が国では A.M.A. 方式 (American Management Association)、ハーバード方式 (Andlinger 方式) カリフォルニア方式 (UCLA の executive game)、これらを日本的にしたものなどが行われている。[11], [12], [13] A.M.A 方式は製造原価、販売費、研究開発費、新規設備投資、市場調査情報、価格、設備売却を決定し、その結果は IBM 650 型電子計算機により業績報告となつて出てくる仕組みである。

ハーバード方式は販売員の雇用数、生産設備の増強、生産量の決定、手形割引額、販売員の市場への割当、広告費、研究開発費、調査員を決定してゲームを行い、審判員が判定に当る。カリフォルニア方式はカリフォルニア大学の経営科学研究室で行われているもので、製品価格、生産量、新投資、広告費、研究開発費、配当を決定してゲームを行い、IBM の電子計算機を用いて決算報告が作成される仕組みになつている。

このような方法によつて近代的な経営感覚を習得し、総合的判断力、長期的洞察力、創造的企画力などを涵養するに役立つものとされている。しかしこのゲームにとり上げられている決定要因はまだ実際必要なものとは遙かに遠いものであり、税金、借入金、借入利子、配当、販売価格の変更、減価償却費、設備の売却又は処分、企業合同・合併などの諸要素を要素としてとり入れることができれば、更に現実的になるであろうといわれている。

審判者が与える種々の条件（上述の如き不足の決定要因も含めて）は、実際には相手のあることで知り難いものが多いことであろう。また各会社がかつスタッフの能力に応じて条件把握の方法、及びその取捨選択などについて多方面から統計的資料を分析していかねばならないのである。Bellman などが断つているようにビジネス・ゲームはそれ自身で重大な問題を解くものでもなく、理論的な解釈の必要性にとつて代るものでもない。よくその価値を判断して奔命に疲れることがあつてはならない。

次に OR を行うには数名の各分野の専門家がチームをつくつて当るのが良いとされている。物理、数学、統計学、生物学、経済学、法律学、心理学、社会学などの各学者が目的に応じてチームを編成するのである。これは統計数理がその方法論としてかかげた「単なる形式的な数理統計学の応用ではなく、現象に即した動的なもの」であるとし、それぞれの分野の人々との協力態勢を作りあげているのと軌を一にするものである。従来いわゆる推計学専門家は現象を知らなさすぎたのではないか、あるいは現象を知ろうとして自ら現象の中にとびこむことを潔しとしなかつたのではないか、そのような弊があればこそ外国でも他分野の人々との協力チームが有効であるといわれるのであろう。

### § 3. OR 利用上の問題点

前§にもふれた如く、OR の技法を実際問題に適用するに当つては、それぞれの分野に於て十分注意することが肝要である。ある A 会社のある問題に対して LP が成功したというので、他の B 会社で形の上では同じような問題に適用して失敗することもある。それは統計数理的立場からいえば、フォーミュレーションを誤つたことになる。

B 会社の資料では LP の係数が余りにも誤差変動が大きくて決定的な問題として取扱うことが不適當であつたのである。従つて stochastic に取扱うべきだということになる。

また我が国では本来の仮定を満足しているかどうかを見極めずに、盲目的に技法をまねる悪弊があることにも注意しなければならない。極端にいえば、すべての問題に共通の技法はないといつても過言ではないかもしれない。勿論研究のすすめ方、考え方には共通の方式はあるが、一つの数学的な公式を、右から左へとそのまま使うことは、余程のことがない限り行うべきではない。

例えば情報理論が応用される例として消費者の購買の機構を説明したものがある [14]。これによれば一つの商品に幾つかの型があつたとき、そのどれを消費者が購入するかは、商品のもつ価値（情報）と、消費者の選択の情報が交換されて始めて決定される。そこで消費者の行動は「一単位選択情報当りの消費者の負担を平均して最小にする」ものであると仮定すると、 $n$  個の型の商品の  $i$  番目の型の商品の価値を  $K_i$ 、消費者がこの型をえらぶ確率を  $P_i$  とすると、上述の仮定は  $\sum_i P_i K_i / (-\sum_i P_i \log P_i)$  を最小にすることとなる。従つて  $\sum_i W^{-K_i} = 1$  を満足する  $W$  を求めてみると、 $i$  番目の型の商品は  $P_i = W^{-K_i}$  の割合で売れるというのである。

これが他の実際問題に適用しうるかどうかは、前述の仮定が満足されるかどうかを十分吟味もしないで、そのまま当てはめたならば大きい失敗を招くことがあるのは当然であろう。私のみた例では日本信販におけるクーポンの 100 円券、500 円券の枚数のきめ方がある [15]。これは上述の仮定を満足しているものであろうか。購入すべき商品の価格が 500 円ならば 500 円券 1 枚でも払えりし、100 円券 5 枚でもよい。また金額の張るものならクーポン券全部を使うこととなるから、中

味の枚数は問題にならない。従つて  $W^{-5} + W^{-1} = 1$  より  $W = 1.34$  を求めて  $(1.34)^{-5} = 0.254$ ,  $(1.34)^{-1} = 0.745$  と計算することは疑問がある。一致しているとすれば、偶然の一致としか考えられない。むしろ会員のうちでクーポンを使用する者が全部クーポンを使つたとしたら、もともと 100 円券 30 枚、500 円券 9 枚だつたのだから 100 円券の割合は  $\frac{30}{39} = 0.77$ , 500 円券は同様に 0.23 となるといつてもよい筈である。

しかしもう少し現象に即して考えてみると、各個人が  $x$  円の品物を購入する確率、1 ヶ月に何回購入するかということが判らなければならない。ここでは手近な資料（昭和 32 年度 1 ヶ年分、加入者 36 人のある役所）をみてみると、何回購入したかは判らないが総額だけは判っている。その

第 1 表

1 ヶ月購入額 総計 $x$ (円)	0	~400	~900	~1400	~1900	~2400	~2900	~3400	~3900	~4400
度 数 $f$	307	13	17	15	9	12	6	14	8	5
	~4900	~5400	~5900	~6400	~6900	~7400	~7900	8000	計	
	7	6	2	1	1	1	7	5	436	

分布では第 1 表のようになってゐる。加入していても、その月に使用しないものが約 70% いるのである。残りの 30% のものが購入するのであつて、これらの人々から回収された 100 円券、500 円券の枚数だけが問題となつてゐるのである。

前述の文献 [15] では、この例の時期より以前の資料を取扱つており、1 ヶ月の購入券の総額は 7500 円の場合であるが、極端に分布の様子が変わつてゐることはないと思われる。それで 1 ヶ月間（券の通用期間と同じ 2 ヶ月としても同様）に総額  $x$  円だけの買物をする確率分布を第 2 表のように仮定し、金額の支払のときに先ず (A) 800 円ならば 500 円 1 枚、100 円券 3 枚渡す場合と、100 円券 8 枚渡す場合は同じ確率であるというように、同一金額を支払うときにおける種々の支払方法が凡て同じ確率でおこると考えてみる。

もう一つの場合として (B) 常に最小枚数を渡す場合を考えてみる。実際の場合はこの 2 つの場合の中間的な値をとるであらうと考えられる。

第 2 表

$x$ (購入金額)		0	100~400	~900	~1400	~1900	~2400	~2900	~3400
$P(x)$	(i)	0.700	0.016	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020
	(ii)	0.681	0.042	0.039	0.036	0.033	0.030	0.027	0.024
	(iii)*	0.700	0.025	0.016	0.0095	0.0039	0.0035	0.0021	0.0013

第 2 表 (つゞき)

$x$		~3900	~4400	~4900	~5400	~5900	~6400	~6900	~7400	7500
$P(x)$	(i)	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020	0.004
	(ii)	0.021	0.018	0.015	0.012	0.009	0.006	0.003	0.003	0.001
	(iii)*	0.0008	0.0005	0.0003	0.0002	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000

(注) (i), (ii) の分布では各級間では一様分布とする。(iii) は  $e^{-x}$  型の分布で \* 印は中央値の金額に対する確率を示す。詳しい数字は省略。

そうすると回収される 100 円券と 500 円券の比率は、(A), (B) 2 つの場合について記すと第 3 表のようになる。

上述の資料では、総額のみが判つているに過ぎないので、何回も購入すれば (A) に近くなり、

第 3 表

分布の型		(i)	(ii)	(iii)
100 円券 の比率	(A)	0.792	0.820	0.873
	(B)	0.547	0.442	0.551
平均購入額		1140 円	777 円	314 円

855,000 枚, 500 円券 286,000 枚となつている。この比率は  $0.749 : 0.251$  で, 平均購入額は約 1143 円である。

斯くて問題はこの消費者行動から逆に, このような支払をなすのに最も能率よく (最小枚数を用いて) 行うには, 100 円券と 500 円券 (もつと一般には 1000 円券なども考えてよいが) をどういう割合でクーポン券に入れるようにすればよいかという問題に進んでいかなければならないのである。

例えば購入金額の分布が一様分布で, 各人が唯一回しか期間中購入しないのであれば, 100 円券 5 枚, 500 円券 14 枚でよいし, 各人が 2 回づつ購入するとすれば, 100 円券を 10 枚, 500 円券 13 枚の方がよいだろう。もし一回しか購入しない人が 20%, 2 回購入する人が 10%, 全然購入しない人が 70% というような場合ならば, 100 円券をどうするのがよいかというのは, それが 5 枚のときに不便をかける人がどれ位あるか, またその不便によつて購買額に影響を及ぼす損失の程度を評価することによつて決めねばならないであろう。詳しい資料をもたないのでこれ以上のべることはやめておこう。

[15] にはまた感冒薬についての例もあげられているが, それによると 10 錠 100 円と, 30 錠 250 円の 2 種の薬の売行きを情報理論で出した結果と比べてある。これは一般性をもつた感冒薬であるし, そのものを買うのだから上述の仮定もそう不合理ではない。しかし九州で, ある外国人の音楽会の入場料をきめるのに, この方法を使つて完全な失敗をした話を聞いた。これなどは音楽会へ行く人間がどんな人間であるかを知つていれば, 上述の仮定が成立つかどうか疑つてみることができた筈である。結局公式をただ単にみかけ上同じような問題に適用してう弊害が我国では特に多いのではなからうか。

もう一つ例をあげてみよう。上述の情報理論の応用ほど誤用されているものではないが, 非常によく取扱われるものに輻輳の問題がある。

道路上のある一点を通過する自動車の流れについてはポアツソン過程を用いることが多い。これは時間間隔  $(t, t+h)$  のうちに 1 台自動車の通過する確率が,  $(0, t)$  の間の状態に関せず  $\lambda h + 0(h)$  であり, 2 台以上通過する確率は  $h$  より高位の無限小であるということを仮定している。これを実際の交叉点の問題の分析に使うとなると中々面倒となる。日本のように狭い車道を, 電車と共に自動車が走っており, その上近くに同様の交叉点があるような場合, ポアツソン過程が満足されるかどうか分らなくなる。一定の時間間隔内の自動車の数の分布が, みかけ上 Poisson 分布に近似していても, 自動車の相続く時間間隔が系列相関をもつような場合になつていることによつて異つた分布であることが判つた例もある [16]。このようなことは実際の資料によつてどのような影響が分布に現われるかをしらべることが大切であることを示している。実際に即して, そのフオーミュレーションを行うことが統計数理の第一歩であり, 新しい考え方を発見する端緒ともなる。

交叉点での自動車の行列, 待ち時間などについて有効な信号間隔のきめ方の問題も, 自動車の到着の平均の割合, 信号間隔の時間, 道路の混乱水準などを用いることによつて研究されるが, 大小様々の自動車や, 後からの割込み, 交叉点での進行方向の多様性によつて非常に複雑な問題となる [17], [18]。

常に 1 回しか購入しなければ (B) に近いことになる。凡ての人が同一回数だけ購入する訳ではないから, (A), (B) の中間の値が出てくる筈である。

因みに [15] に記されている概略値では, 約 20 万人の加入者について, 昭和 30 年 4 月 (2 ケ月分の合計) 決算において, 100 円券

以上僅かの例示にとどめたが、われわれのとるべき正しい科学的態度としては、何処かで成功したある方式を、右から左へと移しかえ、実際のデータをあてはめることではない。深く現象と取りくみ、洞察し、最も本質的な要因とそれらの働く機構を漸次みつけ出して行き、そうして数理的なモデルを形成していくことが正しい科学的態度ではなからうか。これらの諸段階に統計数理的な、あるいはより一般的にいえば科学的な考え方が要求されるのである。OR の利用上の問題点は、正にこの模倣的な、日本式安直さの弊害を打破せねばならない点であるといえよう。

統計数理研究所

## 文 献

- [1] P.M. Morse, G.E. Kimball: *Methods of Operations Research*, New York, 1950.
- [2] E.A. Johnson: *Introduction: The executive, the organization and operations research*, (J.F. Mc Closkey & F.N. Trefethen: *Operations Research for Management*, John Hopkins Press, 1954 の1節)
- [3] *A Comprehensive Bibliography on Operations Research*, 1957.
- [4] C.W. Churchman, R.L. Ackoff & E.L. Arnoff: *Introduction to Operations Research*, John Wiley, 1957.
- [5] 青山博次郎, 林知己夫編: *工業統計*, 産業図書株式会社, 1956.
- [6] 青山, 松下, 林, 水野共著: *社会現象の統計数理*, 朝倉書店, 1951.
- [7] 掛谷宗一: *輸送問題*, 統計数理研究所講究録, 第3巻 1,2号, 1947.
- [8] G. Tintner: *Stochastic linear programming with applications to agricultural economics*, *Proceedings of the 2nd Symposium in Linear Programming*, Washington, 1955.
- [9] G.W. Brown: *Iterative solution of games by fictitious play*, *Activity Analysis of Production and Allocation* (edited by T.C. Koopmans), 1951.
- [10] W.E. Cushen: *Operational gaming in industry*, 及び R.E. Zimmerman: *A Monte Carlo model for military analysis*, *Operations Research for Management*, vol. 2, 1956.
- [11] J. Mc Donald and F.M. Ricciardi: *The business decision game*, *Fortune*, 1958.
- [12] G.R. Andlinger: *Business game*, *Harvard Business Review*, 1958.
- [13] R. Bellman and others: *On the construction of a multistage, multi-person business game*, *Operations Research*, Vol. 5, No. 4, 1957.
- [14] S. Bangs: *The Communication Theory Model and Economics*, *IRE Convention Record*, 1955.
- [15] *近代経営*, 第2巻第1号, 1957.
- [16] Hirotugu Akaike: *On a zero-one process and some of its applications*, *Annals of the Inst. of Statist. Math.*, Vol. 8, No. 2, 1956.
- [17] W.H. Glanville: *Road safety and traffic research in Great Britain*, *Operations Research for Management* Vol. 2, The Johns Hopkins Press, 1956.
- [18] Tosio Uematu: *On the traffic control at an intersection controlled by the repeated fixed-cycle traffic lights*, *Annals of the Inst. of Statist. Math.* Vol. 9, No. 2, 1958.