

減衰振動する伝染病の伝播模型

崎 野 滋 樹

(1958 年 11 月 受付)

Epidemic Model under the Influence of Damped Oscillation

SIGEKI SAKINO

Our purpose is to construct the epidemic model under the influence of damped oscillation. We don't know clearly why the expected number $F(t)$ of infectious patients at the time t changes harmonically with the time t . But it is sure that $F(t)$ fluctuates under the influence of the condition of atmosphere, the character of infectious bacillus or virus and etc.

Let $F(t)$ be the expected number of infectious patients at the time t , $h(t)$ the expected number of infectious patients which is infected in the (infinitesimal) unit time interval $[t, t+1]$, and $G(\tau, t) = G(t-\tau)$ express the time distribution to removal from the infected times. And when we express by $\delta(t-\tau)$ the expected number which is infected in the time interval $[t, t+1]$ from one infectious patient, and the oscillation term by $Re^{-\beta t} \sin \alpha t$, we obtain the integral equation (2). If we assume $G(t-\tau)$ to be the Γ -type distribution (3) and the parameter s to be the natural number, we can derive the s -th order linear differential equations (6), (17) when $\delta(t-\tau) = \gamma$ or $\gamma e^{-\lambda_1(t-\tau)}$. For example, if $s=2$, we get the solution (27) of $h(t)$ and the expected number $F(t)$ of infectious disease at the time t . It is as shown in figure.

Institute of Statistical Mathematics

§ 1. 研究目的

1348~1349 年にかけて全欧州にわたつてひろがつたペストは欧州の全人口の 1/4 を犠牲にした位で、この時の悲惨な状態は有名なデカメロンにも詳しく書かれている。更に 1896~1918 年にかけて印度では約 1 千万人がペストに罹つて死んでいる。又ガンジス河のデルタ地帯を主として起つた印度の地方病であるコレラは 19 世紀の初期から度々世界的に流行した。今世紀では 1919 年に世界にひろがつたインフルエンザ (influenza) は 12 カ月の間に 2 千万人の死亡者を出したといわれ、1918~1921 年にかけてロシアに起つた腸チフスは死亡率が約 10 パーセントあつたこと等数え挙げれば限りがない。

現在なお毎年印度に何千万人罹るといわれているマラリヤも世界の各地から段々姿を消しつつある。又例え伝染病患者が発生したとしても現代における予防医学の著しい進歩は伝染病の伝播を最小限にいとめることが出来る。現在でもペストは印度、ビルマ、北支、中支アジア等多くの地方に発生するけれども大流行は見られない。これは防疫の進歩によるものである。勿論ペストのみならず他のいろいろな伝染病についても一般に減少の傾向にあり、最近特に近代文化都市では減少の傾向が著しい。

が併し昨年2回にわたつて日本を襲つたインフルエンザの如きは日本中で猛威をふるい、多くの犠牲者を出した。特に集団生活をしている学童の伝播速度が非常に速く、社会的にも大きな問題となつている。この対策として学校閉鎖、学級閉鎖等の措置をとつて応急的に伝播を防ごうとしたけれども、顕著な効果は見られない。むしろ上記対策の弊害をすらす述べるものもあつてまだ理論的現実的対策が立てられていないというのが現状である。そこでわれわれは効果的な流感対策に供する目的と流感の伝播模型を確立する目的のために昨年10月11月の2カ月にわたつて群馬県伊勢崎市において流感調査を行つた。この資料は現在分析中で、この問題については後の機会に述べよう。

この paper の目的は次に述べる2つの事柄を考慮して伝染病の伝播模型を設定しようというのである。勿論伝染病が伝播する social group は *homogeneously mixing social group* でなければならない。これは基本的な仮定である。

上に述べた2つの事柄というのは

(a) 発病から *removal* までの時間の分布即ち発病から回復、死亡あるいは隔離までの時間分布。

(b) 無限小の単位時間 $[t, t+1]$ で発病した平均患者数 $h(t)$ が時刻と共に *harmonic* に増加あるいは減少するというのである。(b)の原因としては菌の特性とか、気象条件その他社会環境の変化などいろいろ考えられる。上に述べた発病時刻とは症状が表われ始めた瞬間時刻のことを意味する。

われわれの窮極目的は伝染病の予防対策に寄与することにあるのであるから、伝染病患者数の僅かの変化でも無視してしまつては眞の防疫対策は立てられない。のみならずこのような現象を満足する伝染病の統計的伝播模型は伝染病患者数の予測の精度を高める。

§ 2. 伝 播 模 型

前節で述べたように (a) 発病より *removal* までの時間分布並に (b) 無限小の単位時間 $[t, t+1]$ における平均発病患者数 $h(t)$ が *cyclic* に変化する2つの特性を考へて伝播模型を構成しよう。そのために次の6つの記号の説明をしよう。

- (1) $F(t)$ は時刻 t における平均患者数を表わし $t=0$ では $F(0)=a$.
- (2) $h(\tau)d\tau$ は時間区間 $[\tau, \tau+d\tau]$ で発病した平均患者数を示す。
- (3) $K(\tau, t)d\tau$ は時間区間 $[\tau, \tau+d\tau]$ で発病した患者の中で時刻 t でもまだ病気の状態にある平均患者数を示す。
- (4) $G(\tau, t)$ は時刻 τ で発病した1人の患者が時刻 t までに回復する確率を又 $G_1(\tau, t)=1-G(\tau, t)$ は時刻 t まで病気の状態を持続する確率を示す。
- (5) $\delta(\tau, t)=\delta(t-\tau) dt$ は発病の瞬間から伝染が始まるとして、時刻 τ で発病して時刻 t でなお病気である1人の患者から時間 $[t, t+dt]$ で新しく感染させられる平均患者数を示す。
- (6) $Re^{-\beta t} \sin at$ は $h(t)$ の振動する項を示す。

そのとき、 $F(t)$, $h(t)$ に関して次のような関係が成立する。即ち

$$\begin{aligned}
 F(t) &= \int_0^t k(\tau, t) d\tau + a G_1(0, t) \\
 &= \int_0^t h(\tau) G_1(\tau, t) d\tau + a G_1(0, t), \dots\dots\dots(1)
 \end{aligned}$$

$$h(t) = \int_0^t h(\tau) G_1(\tau, t) \delta(t-\tau) d\tau + a G_1(0, t) \delta(t) + R e^{-\beta t} \sin \alpha t. \dots\dots\dots(2)$$

(2) の左辺 $h(t)$ は単位時間 $[t, t+1]$ に発病した平均患者数を示す。又右辺の第 1 項は時間区間 $[0, t]$ 内で発病した患者の中で時刻 t まで病気の状態を持続している患者から続く単位時間 $[t, t+1]$ に新たに感染する平均患者数を示す。第 2 項は時刻 $t=0$ における患者人の中で時刻 t でなお病気の状態における平均患者数 $a G_1(0, t)$ から続く単位時間 $[t, t+1]$ に新たに感染する平均患者数を示し、又第 3 項は単位時間 $[t, t+1]$ に発病する患者数の中での週期的に変動する項を示す。

そこで $G(\tau, t), \delta(t-\tau)$ に関して適当な仮定を与えて積分方程式 (2) を解いて見よう。先ず発病より removal までの時間分布を Γ -型、即ち

$$G(\tau, t) = \frac{\lambda^s}{\Gamma(s)} \int_{\tau}^t (u-\tau)^{s-1} e^{-\lambda(u-\tau)} du \dots\dots\dots(3)$$

としよう。ただし λ, s は parameter を示す。

次に

$$\delta(t-\tau) = \gamma \text{ (constant)} \dots\dots\dots(4)$$

としよう。つまり τ で発病し、時刻 t でなお病気である 1 人の患者から続く単位時間 $[t, t+1]$ に新たに感染する平均患者数が時刻 t と無関係に一定の値を示す。

$G(\tau, t)$ における parameter λ, s は資料から推定出来る。今 s を仮に自然数とるとしよ。そのとき (2) は次式で与えられる。

即ち

$$\begin{aligned}
 h(t) &= \gamma \int_0^t h(\tau) \left\{ \frac{\lambda^{s-1}}{(s-1)!} (t-\tau)^{s-1} e^{-\lambda(t-\tau)} + \frac{\lambda^{s-2}}{(s-2)!} (t-\tau)^{s-2} e^{-\lambda(t-\tau)} + \dots \right. \\
 &\quad \left. \dots + e^{-\lambda(t-\tau)} \right\} d\tau + a \gamma \left\{ \frac{\lambda^{s-1}}{(s-1)!} t^{s-1} + \frac{\lambda^{s-2}}{(s-2)!} t^{s-2} + \dots + 1 \right\} e^{-\lambda t} + R e^{-\beta t} \sin \alpha t \quad (5)
 \end{aligned}$$

(5) を t に間して s 回微分するとき次の常数係数をもつ s 階線型微分方程式を導くことが出来る。

$$\begin{aligned}
 h^{(s)}(t) + ({}_s C_1 \lambda - \gamma) h^{(s-1)}(t) + ({}_s C_2 \lambda^2 - {}_s C_1 \lambda \gamma) h^{(s-2)}(t) + \\
 \dots\dots\dots + ({}_s C_{s-1} \lambda^{s-1} - {}_s C_{s-2} \lambda^{s-2} \gamma) h^{(1)}(t) + ({}_s C_s \lambda^s - {}_s C_{s-1} \lambda^{s-1} \gamma) h(t) \\
 = R \{ \alpha^2 + (\lambda - \beta^2) \}^{\frac{s}{2}} e^{-\beta t} \sin(\alpha t + s\varphi) \dots\dots(6)
 \end{aligned}$$

ただし $h^{(s)}(t)$ は t に関する $h(t)$ の s 回微分を表わし、かつ $\varphi = \sin^{-1} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + (\lambda - \beta)^2}} \right)$ 。

微分方程式 (6) において

$$H(t) = h(t) e^{\beta t} \dots\dots\dots(7)$$

とすると、(6) は次の如く書きかえられる。

$$H^{(s)}(t) + a_1 H^{(s-1)}(t) + a_2 H^{(s-2)}(t) + \dots + a_s H(t) = R \{ \alpha^2 + (\lambda - \beta)^2 \} \sin(\alpha t + s\varphi), \quad (8)$$

ただし $a_j = a_j(\lambda, \gamma)$ である。

この s 階線型微分方程式 (8) の右辺を 0 とおいたときの特性方程式を

$$\rho^s + a_1 \rho^{s-1} + a_2 \rho^{s-2} + \dots + a_s = 0 \dots\dots\dots(9)$$

としよ。

(9) を互に異なる s ケの根 $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_s$ をもつならば (8) の特解は

$$H(t) = C_1 e^{\rho_1 t} + C_2 e^{\rho_2 t} + \dots + C_s e^{\rho_s t} \dots\dots\dots(10)$$

で与えられる。又(9)が互に異なる μ 本の根 $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_\mu$ をもちかつ各根が各々 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\mu$ 次の重複であるとする。勿論

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_\mu = s \dots\dots\dots(11)$$

である。そのとき(8)の特解は次の値の各々に任意の常数をかけて加えたものになる。

即ち、

$$\left. \begin{array}{l} e^{\rho_1 t}, t e^{\rho_1 t}, \dots, t^{\alpha_1-1} e^{\rho_1 t} \\ e^{\rho_2 t}, t e^{\rho_2 t}, \dots, t^{\alpha_2-1} e^{\rho_2 t} \\ \dots\dots\dots \\ e^{\rho_\mu t}, t e^{\rho_\mu t}, \dots, t^{\alpha_\mu-1} e^{\rho_\mu t} \end{array} \right\} \dots\dots\dots(12)$$

次に

$$\sin(\alpha t + s\varphi) = \frac{e^{i(\alpha t + s\varphi)} - e^{-i(\alpha t + s\varphi)}}{2i} \dots\dots\dots(13)$$

とおき、更に $H(t) = W_1 e^{i(\alpha t + s\varphi)}$ 式は $H(t) = W_2 e^{-i(\alpha t + s\varphi)}$ としたときの W_1, W_2 を計算すると(8)の特解が得られる。従つて微分方程式(8)の一般解は特解(10)あるいは(12)に

$$W_1 e^{i(\alpha t + s\varphi)} + W_2 e^{-i(\alpha t + s\varphi)} = R_1 \sin(\alpha t + s\varphi) + R_2 \cos(\alpha t + s\varphi) \dots\dots\dots(14)$$

を加えることによつて得られる。

又(8)一般解 $H(t)$ から $h(t) = H(t)e^{-\beta t}$ を求め、これを(1)に代入すれば、時刻 t における平均患者数 $F(t)$ を容易に計算することが出来る。

これまで時刻 t で病気である1人の患者から続く単位時間 $[t, t+1]$ に感染させられる平均感染者数 $\delta(t-\tau)$ を時刻によつて変化しないと仮定したけれども、実際には感染時刻から減衰していくと考えられる。そこで

$$\delta(t-\tau) = \gamma e^{-\lambda_1(t-\tau)} \dots\dots\dots(15)$$

としよう。そのとき無限小の単位時間 $[t, t+1]$ において発病する平均患者数 $h(t)$ は式(5)に対応して次式で与えられる。

$$\begin{aligned} h(t) = & \gamma \int_0^t h(\tau) \left\{ \frac{\lambda^{s-1}}{(s-1)!} (t-\tau)^{s-1} e^{-\lambda(t-\tau)} + \frac{\lambda^{s-2}}{(s-2)!} (t-\tau)^{s-2} e^{-\lambda(t-\tau)} + \dots \right. \\ & \left. \dots + e^{-\lambda(t-\tau)} \right\} e^{-\lambda_1(t-\tau)} d\tau + a\gamma \left\{ \frac{\lambda^{s-1}}{(s-1)!} t^{s-1} + \frac{\lambda^{s-2}}{(s-2)!} t^{s-2} + \dots + 1 \right\} e^{-(\lambda+\lambda_1)t} \\ & + R e^{-\beta t} \sin \alpha t \dots\dots\dots(16) \end{aligned}$$

(16)を t に関して s 回微分するとき(6)と同様に s 階線型微分方程式を導くことが出来る。

即ち $\lambda + \lambda_1 = \lambda_2$ とおくと、

$$\begin{aligned} h^{(s)}(t) + (&_s C_1 \lambda_2 - \gamma) h^{(s-1)}(t) + (&_s C_2 \lambda_2^2 - \gamma \sum_{i=0}^{s-2} {}_s C_i \lambda_2^i \lambda^{s-1-i}) h^{(s-2)}(t) \\ & + (&_s C_3 \lambda_2^3 - \gamma \sum_{i=0}^{s-3} {}_s C_i \lambda_2^i \lambda^{s-2-i}) h^{(s-3)}(t) + \dots\dots \\ & + (&_s C_s \lambda_2^s - \gamma \sum_{i=0}^{s-1} {}_s C_i \lambda_2^i \lambda^{s-1-i}) h(t) \\ = & R \{ \alpha^2 + (\lambda_2 - \beta)^2 \}^{\frac{s}{2}} e^{-\beta t} \sin(\alpha t + s\varphi_1) \dots\dots\dots(17) \end{aligned}$$

ただし

$$\varphi_1 = \sin^{-1} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + (\lambda_2 - \beta)^2}} \right)$$

であり、 $\lambda_1 = 0$ とするとき式 (17) と (6) は一致するから係数 $s_{-j+i}C_i$ の間には

$$sC_{j-1} = \sum_{i=0}^{j-1} s_{-j+i}C_i \dots\dots\dots(18)$$

が成立する。

例えば $s=3$ とするとき (17) は

$$h^{(3)}(t) + (3\lambda_2 - \gamma)h^{(2)}(t) + \{3\lambda_2^2 - \gamma(2\lambda_2 + \lambda)\}h^{(1)}(t) + \{\lambda_2^3 - \gamma(\lambda_2^2\lambda_2 + \lambda^2)\}h(t) = R\{\alpha^2 + (\lambda_2 - \beta)^2\}^{\frac{3}{2}}e^{-\beta t} \sin(\alpha t + 3\varphi_1) \dots\dots\dots(19)$$

従つて病気の回復時間の分布 $G(t, t)$ から λ, s を推定すれば (17) は常数係数をもつ線型微分方程式となつて (6) も (17) も同じ型の線型微分方程式を扱うことになる。

以上の伝播模型は発病より removal (回復, 死亡, 隔離) までの時間分布を Γ -型, かつ parameter s が自然数をとると仮定し, 更に時刻 τ で発病して時刻 t で病気になる 1 人の患者から続く無限の小単位時間に感染させられる平均患者数 $\delta(t-\tau)$ を constant γ あるいは $\gamma e^{-\lambda_1(t-\tau)}$ に等しいと仮定して微分方程式 (6), (17) を導いた. そしてこれらの微分方程式は同じ型の微分方程式になる. 試みに発病より removal までの時間分布 Γ 型における parameter s を 2 と仮定して無限小の単位時間 $[t, t+1]$ における発病患者数 $h(t)$ 並に時刻 t における平均患者数 $F(t)$ の性質を調べて見よう.

§ 3. 例

時刻 τ で発病しかつ時刻 t でなお病気になる 1 人の伝染病患者から続く単位時間 $[t, t+1]$ に感染させられる平均伝染病患者数 $\delta(t-\tau)$ を constant γ と仮定し, 発病より removal までの時間分布 $G(\tau, t)$ を Γ 型 (3), かつその分布の parameter s を自然数 2 と仮定すると積分方程式 (2) は次の如く書きかえられる.

即ち

$$h(t) = \gamma \int_0^t h(\tau) \{\lambda(t-\tau)e^{-\lambda(t-\tau)} + e^{-\lambda(t-\tau)}\} d\tau + \alpha\gamma(\lambda t e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t}) + R e^{-\beta t} \sin \alpha t. \dots\dots\dots(20)$$

式 (20) を t に関して 2 回微分すると式 (6) から 2 階線型微分方程式

$$h''(t) + (2\lambda - \gamma)h'(t) + (\lambda^2 - 2\gamma\lambda)h(t) = R\{\alpha^2 + (\lambda - \beta)^2\}e^{-\beta t} \sin(\alpha t + 2\varphi) \dots\dots\dots(21)$$

が得られる. ただし $\varphi = \sin^{-1}(\alpha/\sqrt{\alpha^2 + (\lambda - \beta)^2})$ である.

更に $H(t) = h(t)e^{\beta t}$ とおくととき, (21) は

$$H''(t) + (2\lambda - 2\beta - \gamma)H'(t) + \{(\lambda^2 - 2\gamma\lambda) - \beta(2\lambda - \gamma) + \beta^2\}H(t) = R\{\alpha^2 + (\lambda - \beta)^2\}\sin(\alpha t + 2\varphi) = \frac{R}{2i} \{\alpha^2 + (\lambda - \beta)^2\} \{e^{i(\alpha t + 2\varphi)} - e^{-i(\alpha t + 2\varphi)}\}. \dots\dots\dots(22)$$

線型微分方程式 (22) の特性方程式は

$$\rho^2 + (2\lambda - 2\beta - \gamma)\rho + \{(\lambda^2 - 2\gamma\lambda) - \beta(2\lambda - \gamma) + \beta^2\} = 0 \dots\dots\dots(23)$$

となり, かつ λ, γ は何れも positive であるから判別式 $D = \gamma^2 + 4\lambda\gamma > 0$ となつてこの特性方程式は相異なる実根をもつ. 今それらの根を $-A, -B$ としよう.

そのとき微分方程式 (22) の一般解は

$$H(t) = C_1 e^{-At} + C_2 e^{-Bt} + \frac{R}{2} \{ \alpha^2 + (\lambda - \beta)^2 \} i \left\{ \frac{1}{\alpha^2 - (\lambda - \beta)^2 + \gamma(2\lambda - \beta) - i\alpha(2\lambda - 2\beta - \gamma)} e^{i(\alpha t + \varphi)} - \left[\frac{1}{\alpha^2 - (\lambda - \beta)^2 + \gamma(2\lambda - \beta) + i\alpha(2\lambda - 2\beta - \gamma)} e^{-i(\alpha t + \varphi)} \right] \right\} \dots\dots\dots (24)$$

更に (24) において

$$\left. \begin{aligned} \alpha^2 + (\lambda - \beta)^2 &= C_3 \\ \alpha^2 - (\lambda - \beta)^2 + \gamma(2\lambda - \beta) &= C_4 \\ \alpha(2\lambda - 2\beta - \gamma) &= C_5 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (25)$$

とおくと, (24) は

$$\begin{aligned} H(t) &= C_1 e^{-At} + C_2 e^{Bt} + \frac{C_3 R i}{2} \left\{ \frac{1}{C_4 - i C_5} e^{i(\alpha t + 2\varphi)} - \frac{1}{C_4 + i C_5} e^{-i(\alpha t + 2\varphi)} \right\} \\ &= C_1 e^{-At} + C_2 e^{-Bt} - \frac{C_3 R}{C_4^2 + C_5^2} \{ C_4 \sin(\alpha t + 2\varphi) + C_5 \cos(\alpha t + 2\varphi) \} \\ &= C_1 e^{-At} + C_2 e^{-Bt} - \frac{C_3 R}{\sqrt{C_4^2 + C_5^2}} \sin(\alpha t + 2\varphi + \psi) \dots\dots\dots (26) \end{aligned}$$

ただし $\psi = \sin^{-1}(C_5/\sqrt{C_4^2 + C_5^2})$ である.

従つて微分方程式 (21) の一般解は $h(t) = H'(t)e^{-\beta t}$ から

$$h(t) = C_1 e^{-(A+\beta)t} + C_2 e^{-(B+\beta)t} + C_3' e^{-\beta t} \sin(\alpha t + 2\varphi + \psi) \dots\dots\dots (27)$$

で与えられる.

この解 $h(t)$ を用いて時刻における平均患者数 $F(t)$ を計算しよう.

時刻 t における $F(t)$ は式 (1) から

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_0^t h(\tau) G_1(\tau, t) \alpha \tau + a G(0, t) \\ &= \int_0^t \{ C_1 e^{-(A+\beta)\tau} + C_2 e^{-(B+\beta)\tau} + C_3' e^{-\beta\tau} \sin(\alpha\tau + 2\varphi + \psi) \} \{ \lambda(t+\tau) e^{-\lambda(t-\tau)} + e^{-\lambda(t-\tau)\tau} \} d\tau \\ &\quad + a(\lambda t e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t}) \\ &= \int_0^t \{ C_1 e^{-(A+\beta)\tau} + C_2 e^{-(B+\beta)\tau} \} \{ \lambda(t-\tau) e^{-\lambda(t-\tau)} + e^{-\lambda(t-\tau)} \} d\tau \\ &\quad + C_3' \int_0^t \{ \lambda(t-\tau) e^{-\lambda(t-\tau)} + e^{-\lambda(t-\tau)} \} e^{-\beta\tau} \sin(\alpha\tau + 2\varphi + \psi) d\tau \\ &\quad + a(\lambda t e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t}) \\ &= F_1(t) + C_3' F_2(t) + a(\lambda t e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t}) \dots\dots\dots (28) \end{aligned}$$

つまり (28) における $F_1(t)$, $F_2(t)$ が計算されると, 時刻 t における平均患者数が判る.

先ず $F_1(t)$ については

$$\begin{aligned} F_1(t) &= (\lambda t + 1) e^{-\lambda t} \int_0^t (C_1 e^{-(A+\beta-\lambda)\tau} + C_2 e^{-(B+\beta-\lambda)\tau}) d\tau \\ &\quad - \lambda e^{-\lambda t} \int_0^t \tau (C_1 e^{-(A+\beta-\lambda)\tau} + C_2 e^{-(B+\beta-\lambda)\tau}) d\tau \\ &= \left\{ \frac{C_1}{(A+\beta-\lambda)} - \frac{C_1 \lambda}{(A+\beta-\lambda)^2} + \frac{C_2}{(B+\beta-\lambda)} - \frac{C_2 \lambda}{(B+\beta-\lambda)^2} \right\} e^{-\lambda t} \\ &\quad + \left\{ \frac{C_1 \lambda}{(A+\beta-\lambda)} + \frac{C_2 \lambda}{(B+\beta-\lambda)} \right\} t e^{-\lambda t} + \left\{ \frac{C_1 \lambda}{(A+\beta-\lambda)^2} - \frac{C_1}{(A+\beta-\lambda)} \right\} e^{-(A+\beta)t} \\ &\quad + \left\{ \frac{C_2 \lambda}{(B+\beta-\lambda)^2} - \frac{C_2}{(B+\beta-\lambda)} \right\} e^{-(B+\beta)t} \dots\dots\dots (29) \end{aligned}$$

$F_2(t)$ については

$$\begin{aligned}
 F_2(t) &= (\lambda t + 1)e^{-\lambda t} \int_0^t e^{(\lambda - \beta)\tau} \sin(\alpha\tau + 2\varphi + \psi) d\tau \\
 &\quad - \lambda e^{-\lambda t} \int_0^t \tau e^{(\lambda - \beta)\tau} \sin(\alpha\tau + 2\varphi + \psi) d\tau \\
 &= (\lambda t + 1)e^{-\lambda t} \left[\frac{e^{(\lambda - \beta)t}}{\alpha^2 + (\lambda - \beta)^2} \{(\lambda - \beta)\sin(\alpha t + 2\varphi + \psi) - \alpha \cos(\alpha t + 2\varphi + \psi)\} \right]_0^t \\
 &\quad - \lambda e^{-\lambda t} \left[\frac{\tau e^{(\lambda - \beta)\tau}}{\alpha^2 + (\lambda - \beta)^2} \{(\lambda - \beta)\sin(\alpha\tau + 2\varphi + \psi) - \alpha \cos(\alpha\tau + 2\varphi + \psi)\} \right]_0^t \\
 &\quad + \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{\alpha^2 + (\lambda - \beta)^2} \int_0^t e^{(\lambda - \beta)\tau} \{(\lambda - \beta)\sin(\alpha\tau + 2\varphi + \psi) - \alpha \cos(\alpha\tau + 2\varphi + \psi)\} d\tau \\
 &= \frac{(\lambda t + 1)e^{-\lambda t}}{\sqrt{\alpha^2 + (\lambda - \beta)^2}} \left[e^{(\lambda - \beta)t} \sin(\alpha t + \varphi + \psi) \right]_0^t - \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{\sqrt{\alpha^2 + (\lambda - \beta)^2}} \left[\tau e^{(\lambda - \beta)\tau} \sin(\alpha\tau + \varphi + \psi) \right]_0^t \\
 &\quad + \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{\sqrt{\alpha^2 + (\lambda - \beta)^2}} \int_0^t e^{(\lambda - \beta)\tau} \sin(\alpha\tau + \varphi + \psi) d\tau \\
 &= \frac{e^{-\beta t}}{\sqrt{\alpha^2 + (\lambda - \beta)^2}} \sin(\alpha t + \varphi + \psi) + \frac{\lambda e^{-\beta t}}{\alpha^2 + (\lambda - \beta)^2} \sin(\alpha t + \psi) \\
 &\quad - \frac{\lambda \sin(\varphi + \psi)}{\sqrt{\alpha^2 + (\lambda - \beta)^2}} t e^{-\lambda t} - \left\{ \frac{\sin(\varphi + \psi)}{\sqrt{\alpha^2 + (\lambda - \beta)^2}} + \frac{\lambda \sin \psi}{\alpha^2 + (\lambda - \beta)^2} \right\} e^{-\lambda t}. \quad \dots\dots\dots(30)
 \end{aligned}$$

故に $\varphi + \psi = \psi_1$, $\psi = \psi_2$ とおくとき, (28), (29), (30) から t 時刻における平均患者数 $F(t)$ は次のような形で与えられる。

即ち

$$\begin{aligned}
 F(t) &= C_1'' t e^{-\lambda t} + C_2'' e^{-\lambda t} + C_3' e^{-(A+\beta)t} + C_4'' e^{-(B+\beta)t} \\
 &\quad + \{C_5'' \sin(\alpha t + \psi_1) + C_6'' \sin(\alpha t + \psi_2)\} e^{-\beta t}, \quad \dots\dots\dots(31)
 \end{aligned}$$

ただし

$$C_1'' = \frac{C_1 \lambda}{A + B - \lambda} + \frac{C_2 \lambda}{B + \beta - \lambda} - \frac{C_3' \lambda \sin \psi_1}{\sqrt{\alpha^2 + (\lambda - \beta)^2}} + a \lambda, \quad \dots\dots\dots(32)$$

$$\begin{aligned}
 C_2'' &= \frac{C_1}{A + \beta - \lambda} + \frac{C_2}{B + \beta - \lambda} - \frac{C_1 \lambda}{(A + \beta - \lambda)^2} - \frac{C_2 \lambda}{(B + \beta - \lambda)^2} \\
 &\quad - \frac{C_3' \sin \psi_1}{\sqrt{\alpha^2 + (\lambda - \beta)^2}} - \frac{C_3' \lambda \sin \psi_2}{\alpha^2 + (\lambda - \beta)^2} + a, \quad \dots\dots\dots(33)
 \end{aligned}$$

$$C_3'' = \frac{C_1 \lambda}{(A + \beta - \lambda)^2} - \frac{C_1}{A + \beta - \lambda}, \quad \dots\dots\dots(34)$$

$$C_4' = \frac{C_2 \lambda}{(B + \beta - \lambda)^2} - \frac{C_2}{B + \beta - \lambda}, \quad \dots\dots\dots(35)$$

$$C_5'' = \frac{C_3'}{\sqrt{\alpha^2 + (\lambda - \beta)^2}}, \quad \dots\dots\dots(36)$$

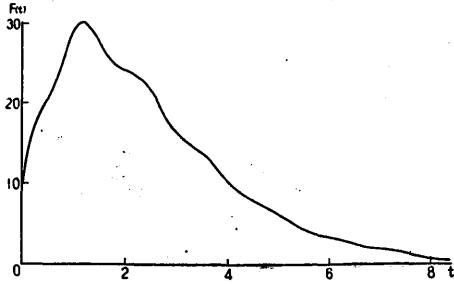
$$C_6'' = \frac{C_3' \lambda}{\alpha^2 + (\lambda - \beta)^2}. \quad \dots\dots\dots(37)$$

これらの係数の間には

$$F(0) = C_2'' + C_3'' + C_4'' + C_5'' \sin \psi_1 + C_6'' \sin \psi_2 = a \quad \dots\dots\dots(38)$$

なる関係がある。

いま, C_1'' , C_2'' , C_3' , \dots , C_6'' に適当な値を与えて $F(t)$ の形を見よう。 $C_1'' = 45$, $C_2'' = 12$, $C_3'' = -6$, $C_4'' = 1$, $C_5'' = 6$, $C_6'' = 0$, $\lambda = \beta = 0.69$, $A = 0.7$, $\beta = 1.2$, $\alpha = \frac{5}{3}\pi$, $\psi_1 = \frac{\pi}{6}$, $\psi_2 = 0$, $a = 10$ とするとき, 時刻 t における平均患者数 $F(t)$ を計算した結果は図の如くである。



この図からわかるように振幅は時刻 t と共に減少し、かつ $F(t)$ は最大値から振動しつつ減衰しつつ、更に $t \rightarrow \infty$ に従つて $F(t)$ は 0 に近づく。この paper の目的は普通の伝播、模型に振動する項を考慮しようというのであるから、われわれの目的は達せられたわけである。が併し § 1 に述べなようにその原因としては菌の特性とかあるいは気象条件、社会環境等いろいろ考えられる。そしてその原因が決定され

れば伝染病の防疫対策もより効果があり、又この模型を適用することによつて時刻 t における伝染病患者数の予測の精度をより一層高めることが出来る。

次に時刻 $t=0$ における患者数 a を除いて時刻 t までに発病した凡ての患者数即ち $[0, t]$ で発病したことの凡ての患者数 $D(t)$ は次式で与えられる。即ち

$$\begin{aligned}
 D(t) &= \int_0^t h(\tau) d\tau = \int_0^t \{C_1 e^{-(A+\beta)\tau} + C_2 e^{-(B+\beta)\tau} + C_3' e^{-\beta t} \sin(\alpha\tau + 2\varphi + \psi)\} d\tau \\
 &= \frac{C_1}{A+\beta} + \frac{C_2}{B+\beta} - \left\{ \frac{C_1}{A+\beta} e^{-(A+\beta)t} + \frac{C_2}{B+\beta} e^{-(B+\beta)t} \right\} \\
 &\quad - \frac{C_3' \sin(2\varphi + \psi - \psi_2)}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} + \frac{C_3' e^{-\beta t} \sin(\alpha t + 2\varphi + \psi - \psi_2)}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \dots\dots\dots (39)
 \end{aligned}$$

ただし $\psi = \sin^{-1} \alpha / \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, 従つて

$$\lim_{t \rightarrow \infty} D(t) = \frac{C_1}{A+\beta} + \frac{C_2}{B+\beta} - \frac{C_3' \sin(2\varphi + \psi - \psi_2)}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \dots\dots\dots (40)$$

図 $F(t)$ における係数と (34), (35) から近似的に $C_1=294$, $C_2=-3$, かつ (36) から $C_3'=30$ である。又 $2\varphi + \psi = \frac{\pi}{3}$, かつ ψ_2 については近似的に $\frac{\pi}{2}$ に等しいから $\lim_{t \rightarrow \infty} D(t) \doteq 236$ が得られる。つまり伝染病の伝播が終るまでに 236 人が発病したことになる。

以上は式 (3) 即ち発病から removal までの時間分布 $G(\tau, t)$ における parameter s が自然数 2 をとるとして $F(t)$, $D(t)$ を計算したのであるが、実際には発病より removal までの時間分布を表わす資料から s を推定せねばならない。 s が決れば微分方程式 (6) の階数が決まる。そして 1 人の患者から無限小の単位時間に感染する平均患者数 $\delta(t-\tau)$ の形が判れば微分方程式 (6) が形が決められる。 $\delta(t-\tau)$ については資料を集めること自体、非常に困難であるから、伝染病の性質を考えて無理のない仮定を立てねばならない。

§ 4. 総 括

以上時刻 t と共に減衰振動する項を含む伝染病の伝播模型を構成した。この模型の中で 2 つの仮定を設けた。第 1 は発病時刻 τ より removal (回復, 隔離, 死亡) までの時間分布を Γ -型, (3) における parameter s が自然数をとると仮定した。第 2 の仮定は無限小の単位時間 $[t, t+1]$ における平均発病患者数の変動が減衰振動するということである。この第 2 の仮定は、その原因を追求することが出来るならば伝染病数の予測の精度を高めるという観点からも無視出来ないであろう。

終始指導して戴いた林部長に深謝する。又計算の労をわずらわした越谷和子嬢に謝意を表す。

(統計推理研究所)

文 献

1) D. G. Kendall. (1949). Stochastic Processes and Population Growth. J. R. S. S. Vol. XI.