数量化理論とその応用例 (IV)*

林　知己夫

(1958 年 2 月受付)

Theory of Quantification and its Examples (IV)

Chikio HAYASHI

In the present paper, the generalization of the method will be treated, which is described in the section 2 (Quantification method of qualitative data when an outside criterion represented by a numerical value is given) in the paper "On the prediction of phemena from qualitative data and the quantification of qualitative data from the mathematico-statistical point of view (Annals of the Institute of Statistical Mathematics, vol III, No. 2, 1952)". That is to say, the outside variable is numerical, while the factors are not numerical but are represented by the response pattern on the categories of many items.

(i) The response patterns are shown in Fig 1. We assume that the numerical values given to the items and categories to R_1+R_2 from R_1+1 are made to be the same, those to $R_1+R_2+R_3$ from R_1+R_2+1 are to be the same, etc. respectively. Now suppose that l is 3 for the simplicity. Let y_m ($m=1, 2, \cdots\cdots k_{R_1+R_2}$, $k_{R_1+R_2}$ is the number of the categories in the items from R_1+1 to R_1+R_2) be the numerical values given to the categories of the items to R_1+R_2 from R_1+1 and let z_q($q=1, 2, \cdots\cdots$, $k_{R_1+R_2+R_3}$, $k_{R_1+R_2+R_3}$ is the number of categories in the items to $R_1+R_2+R_3$ from R_1+R_2+1) be those to $R_1+R_2+R_3$ from R_1+R_2+1.

We denote that

$\delta_i(jk)=1$, the i-th sample checks in the k-th category in the j-th item,

$\quad =0$, otherwise.

Then we put that $\sum_i^n \delta_i(jk)=n_{jk}$, $\sum_i^n \delta_i(jk)\delta_i(lm)=f_{jk}(lm)=f_{lm}(jk)$, where n is the size of sample. We want to require x_{jk}, y_m, z_q to minimize the square of errors in estimating A_i by $\sum_j\sum_k x_{jk}\delta_i(jk)+\sum_l\sum_m y_m\delta_i(lm)+\sum_p\sum_q z_q\delta_i(pq)$. Thus we canobtain x_{jk}, y_m, z_q by solving the equation (A) under the conditions of (B) and (C).

(ii) We consider the case in the previous paper to estimate A_i by $\sum_j\sum_k x_{jk}\delta_i(jk)$. Instead of the error $A_i-\sum_j\sum_k x_{jk}\delta_i(jk)$, we take $\{(A_i-\sum_j\sum_k x_{jk}\delta_i(jk)\}w_i$ as the error and we want to minimize $Q^2=\sum_i^n\{(A_i-\sum_j\sum_k x_{jk}\delta_i(jk))w_i\}^2$, where w_i is the weight of the i-th sample. Then $Q^2=[\{(A_i-\bar{A}_i)+(\bar{A}_i-\sum_j\sum_k\delta_i(jk)\}w_i]^2$, where $\bar{A}_i$ is the population mean of A_i which is constructed from a universe. The expectation of Q^2 is $\sum_i^n(\sigma_{\bar{A}_i}^2+\tau_i^2)w_i^2$ where $\sigma_{\bar{A}_i}^2$ is the sampling variance of $\bar{A}_i$ and τ_i^2 is the variance or the bias of that linear model. It seems to be reasonable that we assume $\tau_i^2=f(\bar{A}_i)$.

* これは昭和 32 年度文部省科学研究費による研究の一部である.

If we require the weights under the condition of $\sum^{n} w_i=1$ to minimize the expectation of Q^2, we obtain

$$w_i=\frac{\sigma_{\bar{A}_i}{}^2+f(\bar{A}_i)}{\sum\{\sigma_{\bar{A}_i}{}^2+f(A_i)\}.}$$

Now suppose that $f(\bar{A}_i)=\alpha^2\bar{A}_i^2$, where α is a constant. This assumption leads to the idea that the relative error of that model is constant.

Then $w_i=\dfrac{\sigma_{\bar{A}_i}{}^2+\alpha^2\bar{A}_i^2}{\sum(\sigma_{\bar{A}_i}{}^2+\alpha^2\bar{A}_i^2)}$, where $\sigma_{\bar{A}_i}{}^2$ is easily calculated. If we take $\delta_i(jk)w_i$ instead of $\delta_i(jk)$, i. e. $f_{jk}(lm)=\sum_i\delta_i(jk)\delta_i(lm)w_i^2, n_{jk}=\sum_i\delta_i(jk)w_i^2$, we can describe the simultaneous linear equations to require x_{jk}. But we are not able to know the value of α previously. α is to be obtained as the result. Then we assume the value of α at first and we slove the equation with respect to x_{jk}. In the second step, we assume the value of α by using the first approximate values x_{jk}, and require the second approximate values of x_{jk}. Thus we can obtain the reasonable values of x_{jk} and α by the method of successive appoximation.

(iii) We consider the case where A_i is vector, i.e. $({}^1A_i, {}^2A_i, \cdots\cdots {}^SA_i)$.

We want to give ${}^sx_{jk}$ $(s=1,2,\cdots\cdots S,\ j=1,2,\cdots\cdots R,\ k=1,2,\cdots\cdots,k_j)$ to the categories of items. Then we put

$${}^s\varepsilon_i={}^sA_i-\sum_j\sum_k{}^sx_{jk}\,\delta_i(jk)$$

and

$$\sigma_{st}=E({}^s\varepsilon^t\varepsilon)=\frac{1}{n}\sum_i^n{}^s\varepsilon_i{}^t\varepsilon_i.$$

Withowt loss of generality, $E({}^s\varepsilon_i)=0$, $(s=1,2,\cdots\cdots S)$.
Let $|\sigma_{st}|$ be the generalized variance by σ_{st}.

It is reasonable to require ${}^sx_{jk}$ $(s=1,\cdots\cdots S,\ j=1,2,\cdots\cdots R,\ k=1,2,\cdots\cdots k_j)$ to minimize the generalized variance $|\sigma_{st}|$. This idea is the same as the case where we take the so-called correlation coefficient between the quantitative vectors. By an easy calculation, this turns out to be equivalent to minimizing σ_{ss} $(s=1,2,\cdots\cdots S)$ independently. Thus ${}^sx_{jk}$ are easily obtained by solving the S sets of linear equations shown in the previous paper.

The Institute of Statistical Mathematics.

「ここでは C. HAYASHI, "On the Prediction of phenomena from qualitative data and the quantification of qualitative data from the mathematico-statistical point of view" (A.I.S.M. Vol. III, No. 2) の §2, outside variable が数量で与えられている場合における質的要因の数量化についての，その後の考察をあげておく．なおこの応用として，新聞広告の気のつき程度をみる所謂 reader-ship survey の分析*，テレビ視聴率 (15才～17才，東京都区部) の要因分析など甚だ興味あるものがあつた．共に質的要因から，著目率・熟読率 (夫々の新聞広告についての)，視聴率 (ある特定のテレビ番組夫々についての) がどの位になるかを予測する問題であるので，前論文 §2の手法が用いられることになる．新聞広告の場合，採り上げられた要因は，広

* 脚註 電通調査局山中二郎氏の "Readership Sore 予測の一方法" なる論稿 (調査と技術，4月号，1958) において，この手法が用いられた．調査法・分析法等の細目については同氏の論文を参照せられたい．

告を規定する物理的要因のみならず，レイアウト，デザインの問題までも含められた．テレビ視聴率の時は，曜日，時間，その番組の特性，裏番組の特性，が要因として採りあげられた．またこれら分析の結果は，その後の継続調査において検討されたが，十分満足すべきものであり，数量化された要因のもつ特性の安定性が確かめられた．なお，これらの場合，最大にされた相関係数は極めて高く，夫々 **0.91, 0.93** であつた．以上の事から考えて，この種の問題解明に対しても，我々の法方が有効なものであるのではないかと思われる．

§1. 要因のうち同じ種類のものがあるとき，それらに与えるべき数値を同一にしたい場合．

Fig. 1

Sample	outside variable (numerical value)	factor (item and category)										
		1	……	R_1	R_1+1	……	R_1+R_2	…………	$R_1+R_2+\cdots+R_{t-1}+1$	……	$R_1+R_2+\cdots+R_t$
		$C_{11},\cdots,C_{1k_1}$	……	$C_{R_1 1},\cdots,C_{R_1 k_{R_1}}$	$C_{R_1+1,1},\cdots C_{R_1+1,k_{R_1+R_2}}$	……	$C_{R_1+R_2,1},\cdots,C_{R_1+R_2,k_{R_1+R_2}}$		$C_{R_1+\cdots+R_{t-1}+1,1},C_{R_1+\cdots+R_{t-1}+1,k_{R_1+\cdots+R_t}}$	……	$C_{R_1+\cdots+R_t,1}\cdots C_{R_1+\cdots+R_t,k_{R_1+\cdots+R_t}}$
1	A_1										
2	A_2										
3	A_3										
⋮	⋮										
i	A_i										
⋮	⋮										
n	A_n										

なおここに (R_1+1) から (R_1+R_2) まで，……，$(R_1+R_2+\cdots\cdots+R_{t-1}+1)$ から $(R_1+R_2+\cdots\cdots+R_t)$ までは夫々同じ種類の要因なので，そのカテゴリーの数は夫々すべて同一であつて，夫々 $k_{R_1+R_2}$，……，$k_{R_1+R_2+\cdots+R_t}$ に等しい．

1 から R_1 までの要因は従前通り，(R_1+1) から (R_1+R_2) までの要因は同一種のもので，カテゴリーの数も同一，(R_1+R_2+1) から…… $(R_1+R_2+R_3)$ までの要因も同一種のものでカテゴリーの数も同一である．このように同じ要因の組が $(t-1)$ 個あつたとする．$R_1+R_2+\cdots\cdots+R_t=R$ とする．つまり全要因の数は R である．さて同じ要因の組には夫々同一の数値を与えるものとする．いま例をあげて説明してみよう．サンプルとあるはあるラジオ番組とする．A_i をあるラジオ番組の聴取率とする（対象はラジオ・テレビ共有の世帯の中の個人とする，以下の分析を有効にするためには，いろいろの人々の **break down** 別に行わねばならない．勿論聴きたいと思つてきいたグループ，そうでないグループと言つた様なものも **break down** に含めるものとする）．**1** から R_1 までは曜日，時間，そしてラジオ番組の特性と言う要因，(R_1+1) から (R_1+R_2) までの要因はラジオ番組の裏番組の特性（裏番組の数は R_2 あるとする），(R_1+R_2+1) から $(R_1+R_2+R_3)$ までの要因はテレビ番組の特性（この数は R_3 あるとする）とする．この場合 t は **3** である*.

前にものべたことであるが，相関係数を最大にする方法は，最少自乗法と同じ結果に到達するのである．記号をもう一度繰返しておこう．

$$\left.\begin{aligned}\delta_i(jk) &= 1 \cdots\cdots i\text{ なるものが } j \text{ アイテムで } k \text{ カテゴリーに反応しているとき}\\ &= 0 \cdots\cdots \text{しからざるとき}\end{aligned}\right\}$$

$$\sum_i^n \delta_i(jk) = n_{jk}$$

* 前述のテレビ視聴率の問題解析はこの手法に従つた.

$$\sum_{i=1}^{n}\delta_i(jk)\,\delta_i(lm)=f_{jk}(lm)=f_{lm}(jk)$$

j アイテム k カテゴリーに x_{jk} なる数値を与えるものとする．i なるものに $\sum_j^R\sum_k^{kj}x_{jk}\delta_i(jk)$ なる値を与えるとする．A_i とこれとの相関係数を最大にするように x_{jk} を与えることを考えるのであるが，これは $\sum_i^n(A_i-\sum_j\sum_k x_{jk}\delta_i(jk))^2$ を最小にすることと等価になる．いまの場合，この考えを用い最後の結果がどうなるか書きあげてみよう．

いくつあつても同じなので簡単のため $t=3$ とし，$1\cdots\cdots R_1$ までの要因に x_{jk} なる数値，(R_1+1) から (R_1+R_2) までのすべての要因の夫々のカテゴリーに同一数値 y_m $(m=1,2,\cdots\cdot k_{R_1+R_2})$ なる数値を与える．これは y_1 から $y_{k_{R_1+R_2}}$ までの $k_{R_1+R_2}$ 個しかない．何となららば，カテゴリーの数はすべて $k_{R_1+R_2}$ 個であり，(R_1+1) から (R_1+R_2) までの要因はすべて同種で，同一の数値を与えようとしているからである．同様に (R_1+R_2+1) から $(R_1+R_2+R_3)$ までの要因のカテゴリーに z_q なる数値を与える．これは z_1 から $z_{k_{R_1+R_2+R_3}}$ までの $k_{R_1+R_2+R_3}$ 個しかない．理由は前と全く同様である．

このとき i なるサムプルに与うべき値として

$$\sum_j\sum_k x_{jk}\delta_i(jk)+\sum_l\sum_m y_m\delta_i(lm)+\sum_p\sum_q z_q\delta_i(pq)$$

が考えられる．そこで

$$Q^2=\Big[\sum_i A_i-\Big\{\sum_j\sum_k x_{jk}\delta_i(jk)+\sum_l\sum_m y_m\delta_i(lm)+\sum_p\sum_q z_q\delta_i(pq)\Big\}\Big]^2$$

を最小にするような x_{jk}, y_m, z_q を求める式を書きあげてみよう．

$$\text{(A)}\quad\left\{\begin{aligned}
&x_{su}n_{su}+\sum_{\substack{j\\ j\neq s}}\sum_k x_{jk}f_{su}(jk)+\sum_m y_m\Big(\sum_l f_{su}(lm)\Big)+\sum_q z_q\Big(\sum_p f_{su}(p,\ q)\Big)=\sum_i A_i\delta_i(su),\\
&\sum_j\sum_k x_{jk}\Big(\sum_l f_{jk}(lv)\Big)+y_v\Big(\sum_l n_{lv}\Big)+\sum_{m\neq v}y_m\Big(\sum_{\substack{l\\ l\neq l'}}\sum_{l'}f_{lm}(l'v)\Big)+\sum_q z_q\Big(\sum_p\sum_l f_{pq}(lv)\Big)\\
&\qquad=\sum_i A_i\Big(\sum_l\delta_i(lv)\Big)\\
&\sum_k\sum_k x_{jk}\Big(\sum_p f_{jk}(pw)\Big)+\sum_m y_m\Big(\sum_l\sum_p f_{lm}(pw)\Big)+z_w\Big(\sum_p n_{pw}\Big)+\sum_{q\neq w}z_q\Big(\sum_{\substack{p\\ p\neq p'}}\sum_{p'}f_{pq}(p'w)\Big)\\
&\qquad=\sum_i A_i\Big(\sum_p\delta_i(pw)\Big)
\end{aligned}\right.$$

但し，

$$\text{(B)}\quad\left\{\begin{aligned}
&\begin{cases}s=1,2,\cdots\cdots,R_1,\\ u=1,2,\cdots\cdots,k_s,\end{cases}\qquad\begin{cases}j=1,2,\cdots\cdots,R_1\\ k=1,2,\cdots\cdots,k_j\end{cases}\\
&v=1,2,\cdots\cdots,k_{R_1+R_2},\\
&w=1,2,\cdots\cdots,k_{R_1+R_2+R_3},\\
&l,l'=R_1+1,\cdots\cdots,R_1+R_2\\
&m=1,2,\cdots\cdots,k_{R_1+R_2}\\
&p,p'=R_1+R_2+1,\cdots\cdots,R_1+R_2+R_3\\
&q=1,2,\cdots\cdots,k_{R_1+R_2+R_3}
\end{aligned}\right.$$

となつている．独立でないものがあるので，例えばここで

$$\text{(C)}\quad\left\{\begin{aligned}
&x_{j1}=0,\qquad j=2,\cdots\cdots,R_1\\
&y_1=0,\qquad z_1=0
\end{aligned}\right.$$

とおいて一次方程式を解けば欲するものが一意的に解が求められる．

§2.　ウエイトをつけた誤差項を最小にしようとする場合．

前述の単純な場合

$$Q^2=\sum_i^n\left\{A_i-\sum_j\sum_k x_{jk}\delta_i(jk)\right\}^2$$

を最小にすることを考えたが，いまウェイト w_i を考え

$$Q^2=\sum_i^n\{(A_i-\sum_j\sum_k x_{jk}\delta_i(jk))w_i\}^2$$

なるものを考えるとしよう．それでは w_i を何ととるかが問題である．

ここで

$$Q^2=\sum_i^n[\{(A_i-\bar{A}_i)+(\bar{A}_i-\sum_j\sum_k x_{jk}\delta_i(jk))\}w_i]^2$$

を考える．$\bar{A}_i$ は A_i の平均値である．§1 でのべた様な番組を単位にとつた時は $\bar{A}_i$ は所謂母集団（人を対象にした場合の母集団）平均をあらわしている．つまり A_i は，その母集団からサムプルされた一部分の人々に対する調査から得られるので，確率変数となつている．したがつて第一項の分散は普通のサムプリング分散をあらわしている．もし等確率母集団のサムプリングであればその分散は $\dfrac{\bar{A}_i(1-\bar{A}_i)}{n}$，（$n$ は A_i を知るために調査したサムプルの大きさ），となるものである．第二項は，常にこれが 0 になれば望ましいのであるがそうとはなつていない．ここで分散（又はバイアス）が考えられるとすれば，これは仮定した構造上の誤差となる．これにはいろいろのものが仮定されるが，いま $\bar{A}_i$ の函数であり $f(\bar{A}_i)$ としておく．

そうすると Q^2 について人に関する母集団についての平均，構造を考える上での平均をとれば，$E(Q^2)=\sum_i(\sigma_{\bar{A}_i}{}^2+f(\bar{A}_i))w_i^2$ となる．但し $\sigma_{\bar{A}_i}{}^2=\dfrac{\bar{A}_i(1-\bar{A}_i)}{n}$ である．また第一項と第二項とは，両者の平均をとる上で統計的に独立としておく．この考え方は理論的にも，実際応用的にも，無理のない仮定である．さてかうした上で $E(Q^2)$ が最小になるようなウェイト w_i，($\sum_i^n w_i=1$ としておく)，を求めるのが妥当なことになるのは容易に想像できる．そうすると

$$w_i=\frac{\sigma_{\bar{A}_i}{}^2+f(\bar{A}_i)}{\sum_i\left\{\sigma_{\bar{A}_i}{}^2+f(\bar{A}_j)\right\}}$$

となる．

かうして求められた w_i を用い，

$$Q^2=\sum_i\{(A_i-\sum_j\sum_k\delta_i(jk)x_{jk})w_i\}^2$$

を最小にするように x_{jk} を求めるならば前の場合と全く同様に計算が行える．この時前述の A_i の代りに (A_iw_i) を用い $\delta_i(jk)$ の代りに $(\delta_i(jk)w_i)$ を用いていままでの式を書きなおせばよい．したがつて，

$$\left.\begin{aligned}f_{jk}(lm)&=\sum_i\delta_i(jk)\delta_i(lm)w_i^2\\ n_{jk}&=\sum_i\delta_i(jk)w_i^2\end{aligned}\right\}$$

となるのは言うまでもない．

次の問題は $f(\bar{A}_i)$ である．この函数形を決定しなければ実際には先へ進むことはできない．$f(\bar{A}_i)=\alpha^2\bar{A}_i^2$，$\alpha$ は常数，と考えることも一つの合理的な仮定であろう．何とならば $f(\bar{A}_i)$ を構上の誤差と言えるものであるから，また $f(\bar{A}_i)$ は誤差の二乗とも言うべき量であるから，$\bar{A}_i^2$ に比例すると考えることは，相対誤差一定と言う考え方に帰着せられるからである．この場合でもサムプリングの分散がない場合には，つまり $\sigma_{\bar{A}_i}{}^2=0$，$(i=1,2,\cdots\cdot n)$，の場合は α はどんなものであつても，問題は解決せられるものであるが，そうでない場合は α をさだめなければならない．従つて最も正当的には

$$\frac{1}{n}\sum_i\left(\frac{\bar{A}_i-\sum\sum x_{jk}\delta_i(jk)}{\bar{A}_i}\right)^2=\alpha^2$$

として，α^2 を x_{jk} であらわしもとの方程式に入れて解かねばならないのであるが，これは計算が甚だ面倒になるので，α をまず仮定し，式を書き下し，しかる後，解を求め，これから α を計算して再び式を解くと言う風に，逐次的に α と実際誤差とが一致するように試みるのが実際的であろう．しかも $\bar{A}_i$ が判明していないため $\bar{A}_i$ を推定しなければならない事を考えると，実際的にはこの程度の方法で order 的に求めるので十分であろうと思われる．

§3. outside variable が多次元的な場合．

§1. でのべた方法は，前記論文の変形にすぎないので，ここでは前記論文と同じ様な要因のとり方で，話を拡張してみようと思う．

outside variable が A_i と言う一次元的なものでなく，${}^1A_i, {}^2A_i, {}^3A_i, \cdots\cdots {}^SA_i$，と S 次元の数値で与えられているとしよう．このとき要因の方にも ${}^sx_{jk}$ ($s=1, \cdots\cdots, S$) と言う多次元的数値を与えることにする．そうして，

$${}^s\varepsilon_i=(A_i-\sum\sum\delta_i(jk)\,{}^sx_{jk})$$

と言う誤差を考え，(一般性を失うことなく $E({}^s\varepsilon_i)=0$ としておく，E の定義は下の通り)，

$$\sigma_{st}=E({}^s\varepsilon_i{}^t\varepsilon_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}{}^s\varepsilon_i{}^t\varepsilon_i,\quad s,t=1,2,\cdots\cdots S$$

なるものを考え，これについての covariance を考え，これからつくられる generalized variance $|\sigma_{st}|$ ($|\cdots|$ は行列式) を考えるのである．これが多次元の場合のちらばりの度合をあらわす一つの合理的測度であることは前にも示しておいた*．そこでこれが最小になるように ${}^sx_{jk}$ ($s=1, \cdots\cdots S$) を求めることが考えられる．このような手法は，ここまでくると多次元の相関（数量で与えられた多次元的 outside variable と数量で与えられたいくつかの要因との間の相関，つまり所謂ヴェクトル相関）を考えるものと同じになつてくる．これについて少しくのべる．但し多次元相関は増山氏の所謂ヴェクトル相関**ではない．まず，単相関，或は重相関のときを考えてみる．要因より outside variable を推定したときの誤差の減少度を現す測度としての相関（重相関）係数を頭におく．つまり y を推定するのに $\sum a_jx_j$ を考え，両者の誤差 $E(y-\sum a_jx_j)^2$ が最小になるような a_j を求めるとき（E は平均をとることを示す），これはよく知られているように $\sigma_y^2(1-\rho^2)$ となる．ρ は x 系と y との相関（重相関）係数，σ_y^2 は y の分散をあらわしている．この考え方を拡張し，ヴェクトルの場合の相関係数（このとき y を多次元的に考える，つまりヴェクトルと考える）を（y の generalized variance) $(1-\mu^2)$ における μ と考えるのである．さて $E(y-\sum a_ix_i)^2$ を最小にするのではなく，y が多次元なので，各次元毎に推定のための一次式を考え，その時各次元での誤差を求め多次元的誤差の一つの測度とも言うべき generalized variance を最小にするように係数をさだめるとき，（誤差の generalized variance) = (y の generalized variance) $(1-\mu^2)$ となり，

$$\mu^2=1-\frac{\begin{vmatrix}\sigma_{yy} & \sigma_{yx}\\ \sigma_{xy} & \sigma_{xx}\end{vmatrix}}{|y\text{ の generalized variance}|\;|x\text{ の generalized variance}|}$$

(σ_{yy}), (σ_{xx}) は夫々 y, x の variance covariance マトリックス，(σ_{xy}), (σ_{yx}) は x, y に関する covariance マトリックス，勿論 $(\sigma_{xy})=(\sigma_{yx})$ である．

となつてヴェクトルの相関係数が求められることになる***.

さて要因が，数量ではなく，これに数量を与えようとする場合も全くそれと同様に考えられるの

---

* 脚註 数量化の応用例，統計数理研究所彙報，第2巻 第1号，1954.

** この拡張された相関の意味は私には理解できない．

*** 林知己夫，色彩の統計，現代色彩講座，第1巻，工業と色彩，修道社，160 p～163 p, 1957.

である．この結果は夫々の次元で別々に考えて，夫々の次元での誤差が最小になるように推定式を求めればよいのであり，更めて式を書き下すまでもないのであるが，全く一般的条件の下で*，

$$\sum_j\left\{{}^sA_i-\sum\sum\delta_i(jk)^s x_{jk}\right\}^2,\qquad s=1,\cdots\cdots S$$

を最小にするような ${}^s x_{jk}$ を夫々求めればよい事が示されるのである．これも前述のヴェクトル相関の場合と全く同様である．この時の相関係数も，σ_{st} を計算しこれより，上に示した式から直ちに求められる．

これによつて，多次元の場合も全く容易に解決がつけられることになる．

この研究に当り終始協力を惜しまなかつた高倉節子嬢（統計数理研究所・第二研究部）に深く感謝を表するものである．

（統計数理研究所）

---

* この時 $\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\sigma_{ss}}{\partial^s x_{uv}}=\dfrac{\partial\sigma_{st}}{\partial^t x_{uv}}$ に注意すれば

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\sigma_{11}}{\partial^1 x_{uv}}R_{11}+\dfrac{\partial\sigma_{22}}{\partial^2 x_{uv}}R_{12}+\dfrac{\partial\sigma_{33}}{\partial^3 x_{uv}}R_{13}+\cdots\cdots=0\\[2mm] \dfrac{\partial\sigma_{11}}{\partial^1 x_{uv}}R_{21}+\dfrac{\partial\sigma_{22}}{\partial^2 x_{uv}}R_{22}+\dfrac{\partial\sigma_{33}}{\partial^3 x_{uv}}R_{23}+\cdots\cdots=0\\[2mm] \dfrac{\partial\sigma_{11}}{\partial^1 x_{uv}}R_{31}+\dfrac{\partial\sigma_{22}}{\partial^2 x_{uv}}R_{22}+\dfrac{\partial\sigma_{33}}{\partial^3 x_{uv}}R_{33}+\cdots\cdots=0\end{cases}$$

となるから

$$\begin{vmatrix}R_{11} & R_{12} & R_{13} & \cdots\cdots\\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & \cdots\cdots\\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & \cdots\cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\end{vmatrix}\neq 0\quad \text{であれば，}$$

$$\frac{\partial\sigma_{ss}}{\partial^s x_{uv}}=0,\ \ s=1,2,\cdots\cdots S,\ \ u=1,2,\cdots\cdots R,\ \ v=1,2,\cdots\cdots k_u$$

をとけばよい事が解る．ここに R_{ij} は $|\sigma_{st}|$ の σ_{ij} の余因数とする．もし $|\sigma_{st}|\neq 0$ であれば（σ_{st}）の逆マトリックス（$\sigma_{st}{}^{-1}$）の行列式 $|\sigma_{st}{}^{-1}|\neq 0$ であるから R_{ij} の行列式は 0 とならない．つまり x が与へられたときつくられる variance covariance 行列式（つまり $|\sigma_{st}|$）が 0 とならないならばよいわけである．