実験計画法についての或る実験

橋　爪　浅　治

(1956 年 10 月 受付)

Some Experiments on the Design of Experiment

ASAJI HASHIZUME

Introduction

Many authors have discussed on the validity of presumption setted in solving problems of experimental designs. In this paper, we treat a some kind of probloms for some special cases.

In attacking the problems, the most popular approach is the use of the F-test. However, there are two alternatives. The one is an unexact method of using unbiased estimates of a population variance instead of using its true value —— in a form of range mutliplied by a canstant —— and the other is the method of randomization with troublesome computations.

In the **part I** of this paper, we discuss an exact theory of range method for some of special cases. In the **part II,** from the some viewpoint, we consider Welch's statistis, when the number of replication is not too large.

Part I

Let $x_{ij}s$ $(i=1, 2, \cdots, m\,;\ j=1, 2, \cdots, n)$ be $m\times n$ observations satisfying the condition of the equal variance ratio (see 1). We define a range-ratio statistic t by (3). We have calcalated significant points of t for the significant levels of $\alpha=5.$, 1. and 0.5, (%) respectivily (**Table I**). We have conducted some computational experiments to see the accuracy of our method (**Tabl IV & V**).

Part II

We consider statistic G and H, defined by (15) and (16) respectively, which satisfy Welch's conditions. The number of different values which G and H take, amount to $(m!)^{r-1}$ and the number of Latin Square arrangements with r dimension, respectiuely. To see the usability of these statistics, we have performed an numerical experiment employing agricultural data (**Tadle VI**), which were obtained dy summing up yields for each block in a plot (see **Diagram II** and **III**). We have calculated, at random, 150 (**Table VII**) and 156 (**Table IX**) different values of G and H, respectively. Comparisons of resulting frequency curves with χ^2-distributions, having degree fo freedom of 9 (**Table VIII**) and (**Table X**) respectively, revealed that the theory holds approximately for small number of replications as it does for large.

Institute of Statistical Mathematics.

Introduction

統計数学においていわゆる実験計画法という名前で呼ばれている問題——それについては今までに数多くの議論がなされ，今後もそうであろうが——について大局的な批判はしばらく措いて，ある特殊問題に限定してそれについて新らしい提案を試みたい.

さて，実験を行つた後のデータの処理において一番 popular で殆んどの実際統計家が採用しているのは F-検定を用いる方法である．これに対抗する理論は，次の二つの idea からそれぞれ出発している.

一つは，統計的分析の段階において，数値計算の簡便を計ることを考慮したもので，概略を述べると，未知の母集団分散 (parameter) の代りに，それの不偏推定値である (*proper const.*) × (*range*) (statistic) を用いて議論を進めるやり方である．しかして parameter を statistic で代用するのは，いかにそれが不偏推定値でわあれ，あくまで，簡便法であり，勿論 exact な議論ではない．そこで，理論の厳密性を失わずに，なおかつ，計算の簡便にできる新しい統計量を定義した，Part I において，それについて議論しよう.

もう一つの話の進め方は，前に述べた F-検定が，実際には適合するかどうか分らないような，非常に強い仮定（実験値に対し正規回帰論の仮定を承認すること）を *a priori* にもうけることに不満を持ち，そのような仮定は一切置かず，その代りに，適当な probability field を設定し，実験者は，その probability law に従つて実験を進める方法—— *randomized method* という名で呼ばれている——がある．この方法は，正規回帰論に較べて母集団設定の違いは不問に附しても，*a priori* な仮定を置かない点で非常にすぐれているのであるが，やはり実用的な面から，難点が起きやすい．というのは，概してこの方法によつて導かれる exact な分布函数の形が，普通の統計数値表にのつているような分布（仮にこれを popular distribution という名で呼ぶことにする）ではないので，いざ使用というとき困ることが多い．またこれが，popular distribution に近似するための exact な議論をするためには，実行困難な実験を行わなければならぬ場合が多い．これについては part II で具体的な説明をするであろう．とも角 randomized method より F-検定がより頻繁に，実際統計家によつて使われるのは，この辺にも理由があると思われる．しかしてこの際実行困難な実験計画をもうけずにして得られた分布が，それをもうけたとしたならば得られる popular distribution に近似することを実験的に確認できるならば，もつと多く randomized method を利用してもよいのではないか．この目的のため part II ではやや不完全ではあるが，一つの実験を試みた.

本報告は，全般については林知己夫氏（数研），計算法は鍋谷清治氏（一橋大学），農業実験は奥野忠一氏（農業技術研究所）の御教示に負うところが大きい．また，602 A 統計機をつかつて計算した **Table I**（後出）は鴨志田清氏（通産省）[1] の絶大なる御援助によつた．同氏なくしては，この Table の製作は私に独力で出来なかつたであろう．上記の諸氏に感謝の意を表する.

Part I

range-rotio の統計量

§ 1.1. **range-rotio の分布** m 行 n 列に排列された観測値 x_{ij} $(i=1,\cdots,m;\ j=1,\cdots,n)$ について次の仮定を置く．

（1） $x_{ij}=M+V_j+z_{ij}$,

ここに誤差項 z_{ij} は平均零で分散 σ_{ij} が未知の正規分布から互に独立にとられた確率変数とする．

さて，帰無仮説として

(H_0) $\quad \sigma_{ij}=\sigma \quad (i=1,\cdots,m;\ j=1,\cdots,n)$

を置く，（1）から固定された各 j について

（2） $\underset{1\leq i\leq m}{\mathrm{range}}(x_{ij})=\underset{1\leq i\leq m}{\mathrm{range}}(z_{ij})\equiv y_j$

が成立つ，さて y_j の（累積）分布を $F_m(y_j)$ とおき

（3） $t=v/u$

という統計量をここで定義する．ただし

$$\max_{1\leq j\leq n}\{y_j\}=u,$$

$$\min_{1\leq j\leq n}\{y_j\}=u,$$

とする．この統計量 t の（累積）分布 $G_{mn}(t)$ を計算してみる．(H_0) により $\{y_j\}$ が互いに独立な同じ分布法則にしたがうことがわかり

（4） $$\overset{*}{G}_{mn}(t)=n(n-1)\int_{0\leq v/u\leq t}\{F_m(u)-F_m(v)\}^{n-2}dF_m(u)dF_m(v)$$

$$=1-n\int_0^\infty\{F_m(x)-F_m(tx)\}^{n-1}dF_m(x)$$

が容易に得られる．ここで t の定義からして，最初に仮定した正規分布 z_{ij} を標準化されたものとしても一般性を失わない．われわれは $\alpha=0.5,\ 1,\ 5\%$ の各々について

（5） $G_{mn}(t_0)=\alpha$

なる棄却点 t_0 を $3\leq m\leq 20,\ 2\leq n\leq 21$ の範囲で算出した．これを **Table I** で与えてある．

なお z_{ij} を正規分布でなく $(-d,\ d)$ $(d>0)$ で定義された一様分布であると仮定したときの **range-ratio** の分布函数 $H_{mn}(t)$ は

（6） $$H_{mn}(t)=1-m^2(m-2)^2t^{m-1}\sum_{r=0}^{m-1}\binom{n-1}{r}\{m(1-t^{m-1})\}^{n-1-r}$$

$$\times\left\{-(m-1)(1-t^m)\right\}^r\left\{\frac{1}{(m-1)(n+1)+r+1}\right.$$

$$\left.-\frac{t+1}{(m-1)(n+1)+r+2}+\frac{t}{(m-1)(n+1)+r+3}\right\}$$

---

* $n=2$ のときは文献〔2〕の数表の一部分と本質的には一致する．またここで論ぜられている range を用いている統計量 t に対応する理論として Peanson Hartley Biometrika Tables for statisticians Vol 1 Cambridge 1954 がある．

で与えられることを附言しておく.

§ 1.2. 棄却点を求めるための数値計算法 〔1〕 **Table I** を求めるための数値計算は二段階に分ける. 先づ

$$(7)\quad \alpha_i = G_{mn}(t_i),\quad i = 1,\ 2,\ 3$$

$$0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3,$$

$$\alpha_1 \leqq \alpha_0 \leqq \alpha_3$$

となるような適当な $t_1 < t_2 < t_3$ を選び α_1, α_2, α_3 を算出する. 次にこれを用いて α を自変数 t を他変数とする二次補間により α_0 に対する t_0 を算出する.

Table I The signifficant point of the range-ratio statistic

0.5 % point of Range-Ratio Statistic

m \ n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	13	15	17	19	21	n / m
2	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.								2
3	054	031	023	019	017	014	015	014	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	3
4	123	084	071	062	057	052	049	047	044	043	040	037	035	034	032	4
5	184	134	113	105	097	091	087	083	080	077	072	069	066	064	062	5
6	215	175	155	142	133	125	120	115	111	107	101	097	094	091	089	6
7	251	210	189	174	163	155	148	143	138	134	127	122	117	113	110	7
8	283	240	218	203	192	184	177	171	167	162	155	150	145	141	138	8
9	309	266	243	228	217	208	200	194	188	183	176	171	166	162	158	9
10	332	289	266	251	239	231	223	217	213	208	201	195	190	185	181	10
12	373	331	309	294	282	274	266	260	254	250	237	229	223	219	214	12
14	395	354	331	311	303	294	286	279	274	270	260	253	248	243	240	14
16	418	377	354	338	327	317	310	303	297	293	285	278	272	266	262	16
18	437	396	374	358	347	337	330	324	318	314	305	298	293	288	283	18
20	453	415	390	374	363	354	346	340	334	330	321	314	308	303	298	20

1 % point of Range-Ratio Statistic

m \ n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	13	15	17	19	21	n / m
2	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.								2
3	069	047	035	029	026	023	020	018	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	3
4	152	107	089	078	071	066	062	058	055	053	049	046	043	041	040	4
5	212	161	174	126	116	108	104	098	095	091	085	081	077	074	072	5
6	250	205	181	166	155	146	139	134	129	125	118	113	108	104	101	6
7	288	243	217	201	188	178	171	165	159	155	147	140	135	131	126	7
8	319	271	245	229	216	207	199	192	188	182	175	168	163	158	154	8
9	345	297	271	254	241	232	223	216	212	206	196	190	184	179	177	9
10	367	320	296	276	263	253	245	238	233	228	219	214	208	203	198	10
12	405	358	333	316	303	293	285	278	273	267	258	252	243	238	233	12
14	430	382	357	339	327	317	309	301	295	291	281	274	268	262	258	14
16	452	405	380	362	350	340	332	325	318	313	304	298	292	287	282	16
18	470	424	399	382	370	359	352	344	340	334	325	318	312	307	302	18
20	485	440	416	398	386	376	368	360	356	350	341	334	328	323	318	20

5 % point of Range-Ratio Statistic

$m \backslash n$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	13	15	17	19	21	n / m
2	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.								2
3	161	107	083	069	060	054	049	045	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	3
4	253	187	158	138	125	116	108	101	096	092	085	080	075	071	067	4
5	317	250	217	194	179	168	159	152	145	139	132	124	118	114	109	5
6	364	295	261	238	222	210	200	192	185	179	170	162	156	150	145	6
7	401	332	297	274	258	246	235	227	220	213	204	195	187	181	176	7
8	430	362	327	304	287	275	264	255	248	242	231	223	215	209	204	8
9	454	387	352	329	312	299	289	280	272	266	255	246	240	233	228	9
10	474	408	373	350	333	321	309	301	293	287	276	267	260	253	248	10
12	506	442	408	386	369	356	346	337	329	323	311	303	295	288	283	12
14	530	467	434	411	395	382	371	363	355	348	338	329	322	315	309	14
16	550	488	455	433	417	404	393	385	378	370	360	350	344	338	331	16
18	566	507	473	451	435	423	412	404	396	389	379	370	363	356	350	18
20	580	520	488	466	450	438	428	420	412	406	395	386	379	372	367	20

α_i は次の計算法に従つた．

混乱のおそれのない限り m, n, i 等の添数は固定されているものとし，省略することにした．$F(x)$ は文献［3］より採用した．例えば Table II を参照せよ．即ち $x_k = .05\,k$ ($k = 0, 1, 2, \cdots\cdot$) に対する $F(x_k) = F_k$ が小数点以下4桁で支えられてある．(つまり ± 0.00005 の誤差をともなつている)．t に適当な数値を与えたとき $F(tx_k)$ は $\{F(x_k)\}$ より一次の補間により求めた．さて $F(tx)$ を x の函数ではなく F の函数として考え，これを $T_t(F)$ とおく．$T_t(F)$ の前述の方法で数値的に求めた値を $T_t^*(F_k)$ とおけば，それは勿論 $F_t(F_k)$ に対し四捨五入，一次補間法等による誤差をともなつてくる．

さて

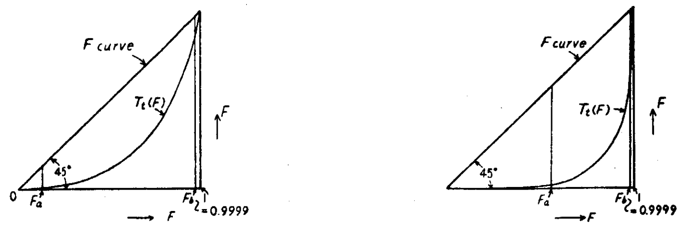
$$(8)\quad l(k,\ t) = \frac{\{F_{k+1} - T_t^*(F_{k+1})\} + \{F_k - T_t^*(F_k)\}}{2}$$

とおき

$$(9)\qquad \begin{aligned} T_t^*(F_a) &= 0.0001 \\ F_b &= 0.9999 \end{aligned}$$

となる整数 a, b を決める．a は一意的に決められないのが普通である（四捨五入による誤差のため）が，そのときは（9）を満足する maximum な a を選んだ．式（4）に於て積分変数 x を F に積分変換してまたこれを，次の如く分解する．

Diagram I



n : small (or t large) n : large (or t : small)

Table II

$m = 10$
$t = 0.27$

x	$F_m(x)$	$F_m(xt)$	x	$F_m(x)$	$F_m(xt)$	x	$F_m(x)$	$F_m(xt)$	x	$F_m(x)$	$F_m(xt)$
	0.	0.		0.	0.		0.	0.		0.	0.
2.25	1470	0001	3.35	6553	0007	4.45	9474	0064	5.55	9965	0301
2.30	1645	0001	3.40	6769	0008	4.50	9527	0069	5.60	9970	0319
2.35	1830	0001	3.45	6978	0009	4.55	9575	0075	5.65	9974	0338
2.40	2025	0001	3.50	7180	0010	4.60	9620	0081	5.70	9977	0359
2.45	2230	0001	3.55	7373	0011	4.65	9660	0088	5.75	9981	0380
2.50	2443	0001	3.60	7558	0013	4.70	9696	0096	5.80	9983	0400
2.55	2665	0001	3.65	7735	0014	4.75	9729	0103	5.85	9986	0424
2.60	2894	0001	3.70	7902	0016	4.80	9759	0111	5.90	9988	0447
2.65	3130	0001	3.75	8062	0018	4.85	9786	0119	5.95	9989	0471
2.70	3372	0001	3.80	8212	0019	4.90	9810	0129	6.00	9991	0496
2.75	3617	0001	3.85	8355	0021	4.95	9832	0138	6.05	9992	0523
2.80	3867	0001	3.90	8488	0023	5.00	9851	0148	6.10	9993	0550
2.85	4119	0002	3.95	8614	0026	5.05	9869	0159	6.15	9994	0577
2.90	4372	0002	4.00	8731	0028	5.10	9884	0170	6.20	9995	0607
2.95	4625	0002	4.05	8841	0031	5.15	9898	0181	6.25	9996	0637
3.00	4878	0003	4.10	8943	0035	5.20	9911	0194	6.30	9996	0667
3.05	5129	0003	4.15	9038	0038	5.25	9922	0208	0.35	9997	0701
3.10	5378	0003	4.20	9126	0042	5.30	9931	0221	6.40	9997	0734
3.15	5623	0004	4.25	9208	0046	5.35	9940	0236	6.45	9998	0767
3.20	5864	0005	4.30	9283	0050	5.40	9948	0251	6.50	9998	0803
3.25	6099	0005	4.35	9352	0054	5.45	9954	0267	6.55	9998	0840
3.30	6329	0006	4.40	9416	0059	5.50	9960	0283	6.60	9999	0880

$$(10)\quad G(t) = 1 - \left\{\int_0^{F_a} + \int_{F_a}^{F_b} + \int_{F_b}^{1}\right\} n\,(F - T_t(F))^{n-1} dF$$

$$= [\,1 - F_a{}^n - n \sum_{k=a}^{b-1} l^{n-1}(k,t)\,\{F_{k+1} - F_k\} - \frac{n}{2}\,(0.9999 - T_t(0.9999))^{n-1}$$

$$\times\, 0.0001] + \varepsilon$$

われわれは [　　] の計算式によつて $G(t)$ を数値的に求めた[1]. 誤差 ε を

$$(11)\quad \varepsilon = [F_a{}^n - \int_0^{F_a}\,] + [\,n \sum_{k=a}^{b-1} l^{n-1}(k,t)\,(F_{k+1} - F_k) - \int_{F_a}^{F_b}\,]$$

$$+ \left[\frac{n}{2}\,(0.9999 - T_t(0.999))^{n-1}\,0.0001 - \int_{F_b}^{1}\right]$$

$$\equiv \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

$n = 2,\ 21$; $m = 3,\ 20$ で有意水準 α がなるべく 0.5% に近いようなの価について, ためしに求めてみたい. まず

$$0 < \varepsilon_1 = F_a{}^n - n \int_0^{F_a} (F - T_t(F))^{n-1} dF$$

$$> F_a{}^n - n \int_{0.0001}^{F_a} (F - 0.0001)^{n-1} dF$$

$$(11)\qquad = F_a{}^n - (F_a\, 0.0001)^n < n\,F_a{}^{n-1} \times 0.0001,$$

$$0 > \varepsilon_3 > -\,n \int_{F_b}^{1} (F - T_t(F))^{n-1} dF > -\,n)F^p - T_t(F)^{n-1}$$

$$\times\, 0.0001$$

$\therefore\quad |\varepsilon_1+\varepsilon_3| \leqq [\max_{a,b}(F_a,\ F^\circ T_t(F_b))]^{n-1}_{\cdot n}\times 0.0001$

$\quad \overset{*}{=} n\,(F_b - T_t{}^*(F_b))^{n-1}\cdot 0.0001$

ε_2 は $n=2$ のとき

$$|\varepsilon_2| = 2\,\Big|\sum_{k=a}^{b-1}\Big[\frac{F_{k+1}+F_k}{2}(\varDelta F_k) - \int_{F_k}^{F_{k+1}} F\,dF + \int_{F_k}^{F_{k+1}} T_t(F)\,dF - \frac{T_t(F_{k+1})+T(F_k)}{2}\varDelta F_k\Big]\Big| \tag{12}$$

$$\leqq \sum_{k=a}^{b-1} |Tt(F_{k+1}) - T_t(F_k)|\,\varDelta F_k$$

$$\doteqdot \sum_{k=a} |T_t{}^*(F_{k-1}) - T_t{}^*(F_k)|\,\varDelta F_k,$$

ただし $\varDelta F_k = F_{k+1} - Fk$

$n = 21$ のとき

$$|\varepsilon_2| < 21\sum_{k=a}^{b'-1}\{|(F_{k+1} - T_t{}^*(F_{k+1}))^{20} - (F_k - T_t{}^*(F_k))^{20}|\}\,\varDelta F_k \tag{13}$$

を用いた．これによる誤差評価表を Table III にて示す．

有意水準 $\alpha = 0.5(\%)$ の場合について考えよう．**Table III** は，見掛け上，誤差が大きすぎ，

Table III

m	n	t	$G(t)$ (%)	$\lvert\varepsilon_1+\varepsilon_2\rvert$ (%)	ε_3 (%)	ε (%)
3	2	0.05	0.4321	negligible	0.02	0.02
3	21	0.032	0.4868	0.11	0.01	0.12
20	2	0.45	0.4423	0.01	0.02	0.03
20	21	0.29	0.4584	0.12	0.01	0.13

Table I の数字の誤差安全度にうたがいを起させる．しかし，実際は，**Table III** は非常にラフな過大評価式を用いて計算したものであり，そうかと云つて，**Table I** の信頼性を確立するにたる精密な評価式は文献［3］よりもつとこまかい数表がない限り無理である．であるからといつて，**Table I** の $\alpha = 0.5(\%)$ のあぶない部分を捨てるのは，惜しい．将来，安全性を確認できるかも知れないから，敢て $\alpha = 0.5\,(\%)$ の表をも掲げた理由はこのためである．

$\alpha = 1.$ および 5％ の場合は問題は起らないと思う．

§1.3 Table I に対する人工実験． **Table I** は（9）式によつて計算されたものであるが，これを別の面から確めてみたいため，次の如き実験を計画した．即ち 0.0000 より 1.00000 までの数が記してある乱数表**より n 個を1組とする N 組（合計 Nn 個）の乱数を at rondom にとりだし，i—番組における最小値 c_i 最大値 d_i を書き出す．

ここでは $n=15$, $N=960$ として (c_i, d_i) は **Table IV** の如き結果を得た．

次に

$$c_i = F_m\,(x_i{}^{(1)}),\quad d_i = F_m\,(x_i{}^{(2)})$$

となる．$x_i{}^{(1)}$, $x_i{}^{(2)}$ $(i=1,\ 2,\cdots:\cdots,\ N=960)$ を（函数的意味で）逆算し，t_0 を与え，$t_i = x_i{}^{(1)}/x_i{}^{(2)} < t_0$ となる頻度から $G_{mn}(t_0)$ $(n=15$ で固定）の経験分布値が得られる．

実際には，このような面倒なことをする必要がなく，2つの数表 $\{F(x_k),\ F(t_0x_k)\}$ (**TableII**), $\{c_i, d_i\}$ (**Table IV**) において，適当な k に対し

$$c_i < F\,(t_0x_k) < F\,(x_k) < d_i \tag{14}$$

* この等号は数値的にわれわれの行つた計算の範囲で確認できたことである．

** 統計数理研究所作製の乱数表を用いた．

Table IV max. and min. value of random number's group with size 15

No.	max.	min.	No.	max.	min.	No.	max.	min.	No.	max.	min.
1	9919	0098	48	9877	0799	95	9070	0333	142	8063	0283
2	9826	0220	49	9449	0789	96	9655	0634	43	9264	0443
3	9976	0166	50	8901	0382	97	9405	1403	44	9213	0229
4	9348	0941	51	9068	0023	98	9566	0335	45	9690	0098
5	8805	0031	52	8773	0559	99	9192	1234	46	9885	0860
6	9609	0540	53	9999	1012	100	9231	0382	47	9896	0429
7	8091	0923	54	9942	1215	1	9170	0480	48	9694	0311
8	7679	0446	55	9993	0014	2	8599	0847	49	9478	1160
9	7975	0882	56	9274	0659	3	9904	0045	50	9821	0177
10	9632	1008	57	9380	0560	4	9096	0303	51	7773	0171
11	8623	0870	58	9847	0334	5	9622	0314	52	9990	1085
12	8456	0021	59	8883	0302	6	9812	0526	53	9098	0360
13	8188	0141	60	9987	0284	7	8227	0762	54	9858	0588
14	8813	0820	61	8774	0637	8	9721	1245	55	9658	0528
15	9923	0861	62	9965	1035	9	9817	1540	56	9916	0315
16	9114	0561	63	8802	1519	10	9926	0361	57	8371	0864
17	9238	0404	64	8967	0253	11	8144	0879	58	9360	0903
18	8336	0446	65	9586	1719	12	8714	0630	59	9685	0314
19	9463	0221	66	8682	0292	13	9868	0268	60	9927	0538
20	8876	0660	67	9998	0190	14	9281	0289	61	9459	0359
21	9800	0622	68	9896	0100	15	9877	0254	62	9944	1815
22	9288	0049	69	9820	0010	16	8540	0132	63	9768	0643
23	8858	0709	70	9944	0512	17	9686	0851	64	8305	0585
24	9572	0069	71	8446	0431	18	9388	1182	65	8705	0112
25	8905	1729	72	9536	0160	19	9059	0312	66	8936	0543
26	8559	0523	73	8143	0482	20	9590	0716	67	8873	0051
27	8958	0201	74	9969	0105	21	9879	2419	68	9233	0584
28	7288	0180	75	7958	0582	22	7902	0508	69	9407	0168
29	9776	0020	76	8219	0693	23	9809	0261	70	9445	0219
30	8821	0269	77	9619	0829	24	9291	0957	71	9307	0694
31	9978	0139	78	8747	0760	25	9182	0740	72	9442	0266
32	8717	0821	79	9671	1399	26	9504	0407	73	9082	0448
33	8124	1354	80	9914	0497	27	9413	0057	74	8272	0730
34	9338	0234	81	9101	1476	28	9765	0316	75	7578	0126
35	9897	0880	82	8297	0099	29	8093	1345	76	9121	0231
36	9762	0075	83	9957	1091	30	9923	0143	77	8610	1931
37	9788	0363	84	9127	0601	31	9348	1358	78	9499	0203
38	9076	0337	85	8684	0149	32	9816	0461	79	9979	0328
39	9257	1355	86	8496	0556	33	8820	0617	80	9163	1486
40	9989	0237	87	9673	1746	34	8789	1728	81	9037	0551
41	8934	1125	88	9532	0626	35	8972	0044	82	9584	0740
42	9564	0349	89	9677	0634	36	9945	0159	83	9606	0493
43	9942	0748	90	9951	1400	37	9821	0767	84	9306	0614
44	8838	0686	91	9913	0058	38	9552	0907	85	9262	0469
45	8635	0238	92	9180	1300	39	9611	0365	86	9563	0105
46	8592	1080	93	9430	0038	40	9313	0295	87	9214	0460
47	9930	0041	94	6852	0038	41	9550	1335	88	9747	0590

No.	max.	min.	No.	max.	min.	No.	max.	min.	No.	max.	min.
189	9871	0026	238	9811	0045	287	9624	0548	336	9606	0254
90	8974	0262	39	9762	0403	88	9448	1178	37	9617	0054
91	9898	3433	40	9549	0242	89	8835	0390	38	9070	1409
92	9985	1081	41	8457	2168	90	8816	1560	39	8652	0720
93	9937	0346	42	9035	0681	91	9691	1383	40	8644	0142
94	8081	0403	43	8107	0830	92	9196	0687	41	8992	0794
95	9124	0384	44	9425	0136	93	9610	0636	42	9615	0517
96	9614	0031	45	9253	1099	94	8477	0137	43	9987	1503
97	9825	0846	46	9933	0533	95	7715	0071	44	9400	0323
98	9050	0259	47	8942	2572	96	9468	0423	45	9930	0086
99	9276	0813	48	9055	0633	97	9718	1007	46	9594	0085
200	9459	0428	49	8374	0349	98	9837	0736	47	9839	1025
1	9893	1162	50	9164	0042	99	9708	1123	48	9925	0561
2	9381	0734	51	9201	0694	300	9680	0800	49	8174	1139
3	9892	0880	52	9420	0157	1	8900	0084	50	9625	1018
4	9441	0702	53	9615	1990	2	9410	0048	51	7860	0462
5	7282	0245	54	9016	1581	3	8230	1053	52	9074	1293
6	9557	0675	55	8841	1289	4	8234	0047	53	9894	0113
7	9686	0984	56	9482	0049	5	9680	0255	54	9510	0408
8	8789	0821	57	9063	1130	6	9406	0163	55	9627	0931
9	9744	0257	58	8962	0016	7	9213	0234	56	9892	0224
10	9880	0102	59	9828	0702	8	9656	0023	57	9349	0653
11	8364	0631	60	9953	0249	9	9409	0765	58	9733	1017
12	9865	0349	61	9437	2056	10	6619	0913	59	8925	0211
13	8315	0530	62	9772	0774	11	7950	0086	60	8740	1016
14	9352	0549	63	8529	0457	12	9376	0956	61	9253	0147
15	9584	0129	64	6974	0329	13	9196	0069	62	9392	0306
16	9505	1687	65	9581	0634	14	9652	0100	63	9953	6047
17	8652	0530	66	9509	0396	15	8838	0053	64	9459	0188
18	9929	1061	67	9631	0827	16	9781	0214	65	9109	0538
19	9157	0378	68	9143	0795	17	9661	1431	66	9781	0179
20	8359	1490	69	9704	0085	18	9929	1971	67	9141	1637
21	9651	0368	70	9334	9334	19	9581	2069	68	9091	0132
22	9716	0621	71	9297	0173	20	9427	1050	69	9882	0103
23	9791	0091	72	9965	1165	21	9247	0681	70	9384	0152
24	9640	0365	73	9021	1508	22	9026	0584	71	8418	1400
25	9320	0591	74	8952	0261	23	6988	1822	72	8801	0084
26	9965	0472	75	9362	0898	24	9359	0360	73	7681	0018
27	7649	0491	76	9829	0196	25	9279	0046	74	8171	0826
28	9682	0639	77	9667	0277	26	9280	0325	75	9041	2081
29	8597	1263	78	8742	0072	27	9637	1837	76	9237	0571
30	9759	0236	79	9382	0769	28	9772	0466	77	9349	2064
31	9773	2818	80	9685	2131	29	9492	1383	78	6842	2041
32	7893	0096	81	8597	0785	30	9295	0613	79	9419	1088
33	9655	0244	82	9749	1639	31	9850	0586	80	9580	0563
34	9016	0257	83	9486	1015	32	9918	0157	81	9262	0262
35	9181	0205	84	8865	0930	33	9655	0119	82	8824	0470
36	9128	0231	85	9851	0865	34	9185	0980	83	9220	0050
37	9977	0812	86	9559	0162	35	8994	0456	84	9637	1518

No.	max.	min.	No.	max.	min.	No.	max.	min.	No.	max.	min.
385	9510	0822	434	9372	0019	483	8869	0327	532	8608	1254
86	7447	1030	35	8205	1312	84	9835	1348	33	9404	0839
87	9619	0388	36	9904	0283	85	9278	0039	34	9009	0495
88	8986	1845	37	9352	0436	86	9258	0121	35	9550	0926
89	9802	0430	38	8322	0514	87	9538	2128	36	9116	0284
90	9553	0298	39	8912	0486	88	9701	0729	37	9460	0532
91	9943	0434	40	9506	0311	89	9765	0044	38	9857	0237
92	9507	0436	41	9879	0386	90	9514	0259	39	9561	1221
93	9899	0094	42	9057	0323	91	9752	0534	40	8607	0624
94	9986	0165	43	9310	0708	92	9996	0206	41	9683	0347
95	8666	0088	44	9553	0862	93	9765	0437	42	9926	0256
96	9312	0001	45	9380	0417	94	9945	0310	43	9964	0267
97	9890	0146	46	9967	0604	95	8163	1081	44	8360	0430
98	9588	0048	47	9843	0451	96	9766	0101	45	9614	0709
99	9907	1369	48	9932	0670	97	8074	0129	46	8078	0941
400	9662	0736	49	8072	0790	98	9507	0014	47	9259	0803
1	9576	1018	50	9006	0399	99	9808	0621	48	9950	0320
2	9662	0279	51	9927	0222	500	9402	0278	49	7973	0627
3	9393	0477	52	8789	0301	1	8819	0267	50	8869	0001
4	9321	0100	53	9141	0139	2	9046	0094	51	7470	0101
5	9853	0017	54	8039	0229	3	9447	0261	52	9699	0158
6	9856	0166	55	8973	0945	4	8900	0469	53	8734	0036
7	9299	1264	56	9913	2489	5	9945	0283	54	9972	0077
8	9970	1001	57	9880	0128	6	9944	0894	55	9893	2629
9	9787	0107	58	8844	0757	7	9988	0507	56	9428	0276
10	8736	0678	59	9060	0898	8	9766	0714	57	9952	1111
11	8551	1026	60	9812	0170	9	9907	0607	58	8993	0036
12	9713	0030	61	9686	0740	10	9187	0730	59	9397	0154
13	9113	0094	62	9702	0806	11	9012	0241	60	9780	0153
14	9877	0670	63	8241	0172	12	8892	0175	61	9147	0563
15	8768	0514	64	9488	0874	13	9274	0352	62	8313	0604
16	9891	0329	65	9026	0883	14	8940	1088	63	9585	0188
17	9721	1700	66	9747	0844	15	9402	2133	64	9148	0016
18	8889	0077	67	8629	0588	16	9008	0010	65	9410	0741
19	9380	0804	68	8862	0269	17	9554	0817	66	9603	1045
20	9064	0419	69	8582	0753	18	9928	1743	67	9999	0344
21	9807	1307	70	8244	0200	19	9063	0037	68	9961	0514
22	9139	0667	71	9521	0066	20	9508	0136	69	9516	1057
23	9455	1032	72	9944	0738	21	9930	0803	70	8365	0453
24	9367	0026	73	9461	0676	22	9740	0388	71	9002	1100
25	9982	0532	74	9278	1116	23	8888	0784	72	8632	0032
26	8298	0524	75	9967	0211	24	9420	0073	73	9921	1079
27	9905	0878	76	9558	0159	25	9687	1182	74	9925	0374
28	9593	0397	77	8710	0044	26	9921	0435	75	9705	1183
29	9704	0111	78	9716	0097	27	9928	0292	76	9846	0311
30	9940	0064	79	9714	0817	28	9683	0728	77	9337	0130
31	8391	0092	80	8298	0500	29	9577	0102	78	9534	0342
32	9257	0070	81	9510	0522	30	9675	0266	79	9143	0973
33	9414	0619	82	9524	0238	31	9523	0267	80	9109	0060

No.	max.	min.	No.	max.	min.	No.	max.	min.	No.	max.	min.
581	9198	0873	630	9136	0095	679	9469	0032	728	9858	0901
82	9847	0358	31	9575	1564	80	8649	0709	29	9188	0104
83	8664	0351	32	9730	0508	81	9733	0507	30	8804	0078
84	9177	0326	33	9897	0554	82	9789	0688	31	9432	0496
85	7771	1262	34	9735	1188	83	9051	0093	32	9650	0442
86	8746	0792	35	8851	0068	84	9509	0164	33	6890	0125
87	9278	0930	36	9827	1060	85	9557	0195	34	9402	0318
88	7816	0084	37	9868	0082	86	9563	0115	35	9797	0206
89	9896	0092	38	8210	0270	87	9864	0100	36	9700	0425
90	9661	0834	39	9373	1087	88	9357	0049	37	9689	0093
91	9146	0831	40	9745	0770	89	9521	0082	38	9919	0623
92	9777	1099	41	9302	0338	90	9069	0114	39	9934	1257
93	9908	0079	42	9775	0259	91	6977	0928	40	9809	1212
94	9495	0107	43	9370	2851	92	8993	0767	41	9662	0907
95	9583	0030	44	9505	0006	93	9376	0394	42	9734	0768
96	8326	0547	45	9629	0561	94	9689	0287	43	9551	0486
97	9370	0661	46	9669	1009	95	8972	0148	44	8630	0287
98	9388	0757	47	9938	0593	96	9904	0989	45	9232	1039
99	9227	0886	48	9336	0237	97	9435	0035	46	6199	0131
600	9757	0769	49	9917	0124	98	8866	0337	47	9906	0385
1	9195	1472	50	9442	0444	99	8588	0845	48	9174	0021
2	9939	0412	51	9377	1045	700	9111	0214	49	9414	0393
3	8806	0777	52	9853	0513	1	9819	1196	50	9939	0923
4	8897	0047	53	9973	0322	2	9975	0772	51	9897	0099
5	9934	0293	54	9453	0195	3	9649	0722	52	9959	0252
6	9404	1795	55	9683	0088	4	8885	0734	53	8523	2153
7	9800	0418	56	8891	2653	5	9844	0033	54	7616	1543
8	9859	0055	57	9941	0398	6	9537	0013	55	9773	0220
9	7857	0809	58	9856	1338	7	9908	0157	56	9694	1336
10	9236	0030	59	8377	1496	8	8993	0830	57	9455	0232
11	9842	0838	60	9666	0063	9	9354	0299	58	8192	0582
12	8881	0677	61	9893	0544	10	9786	0116	59	9597	1297
13	8534	1001	62	9355	0001	11	8612	0186	60	9765	0119
14	8390	0165	63	8173	0127	12	9277	1294	61	8272	0119
15	9266	0407	64	9343	0438	13	9849	0660	62	7736	0122
16	8285	0762	65	7665	0030	14	9903	0300	63	9984	1427
17	9131	0789	66	8409	0365	15	9357	0014	64	8868	0007
18	9258	1480	67	9918	0162	16	9245	0544	65	9855	0607
19	9581	0491	68	9485	0504	17	9209	0478	66	8603	0217
20	9176	1576	69	8666	0471	18	9883	0249	67	9514	0373
21	8945	1835	70	9220	0047	19	9916	2789	68	8867	1447
22	9994	0131	71	7938	0963	20	9911	0718	69	9511	0599
23	9478	0627	72	9360	0197	21	9001	0529	70	9998	1158
24	9323	0844	73	9233	1069	22	9177	0183	71	9861	0109
25	9337	0585	74	8068	1005	23	9561	0757	72	9375	0288
26	8573	0070	75	9459	0558	24	9603	1149	73	9885	1282
27	9342	0413	76	9741	0137	25	9572	0165	74	9602	0098
28	9989	0933	77	9824	0496	26	9467	0714	75	9871	0248
29	9991	1109	78	9694	0039	27	9961	0109	76	9959	0285

No.	max.	min.	No.	max.	min.	No.	max.	min.	No.	max.	min.
777	9325	2838	823	9629	2855	869	9251	1205	915	8974	1056
78	9620	0333	24	9822	0861	70	7846	0500	16	9910	0675
79	8308	0345	25	9397	0102	71	8189	0034	17	9115	0423
80	8586	0301	26	9729	0219	72	9672	0121	18	5987	0092
81	8787	0127	27	9797	0299	73	9926	1901	19	9555	0933
82	8765	0193	28	9900	2399	74	9754	0010	20	9310	1323
83	9922	0467	29	9411	0069	75	8643	1065	21	9360	0403
84	7335	0061	30	9604	0307	76	9394	0150	22	9304	0839
85	9951	0043	31	9898	0097	77	9827	0165	23	9791	0471
86	9932	0251	32	9949	0951	78	8851	2368	24	9286	0512
87	9982	0093	33	9839	0841	79	8604	2354	25	9002	0418
88	9590	0251	34	9686	1800	80	8662	0401	26	9983	0051
89	9005	0592	35	9827	0008	81	9707	0113	27	9717	1438
90	9643	0122	36	9918	0636	82	7933	0432	28	9576	1161
91	9779	0256	37	8817	0922	83	9584	0415	29	8839	0891
92	9222	2755	38	9517	0247	84	9577	0212	30	9729	0376
93	9909	3291	39	8091	1009	85	9809	0456	31	9484	0918
94	9967	0308	40	9347	0058	86	9473	0335	32	9356	1655
95	9389	0212	41	9311	0139	87	9140	0468	33	9337	0307
96	9457	1240	42	9797	1176	88	9874	0107	34	9641	0780
97	8086	0343	43	9923	0483	89	9603	0678	35	8653	0271
98	8625	0464	44	9783	0418	90	9333	0291	36	9889	0026
99	9663	0879	45	8302	0531	91	9721	1055	37	8132	0053
800	7930	0335	46	9179	0265	92	8379	0885	38	9052	0952
1	9876	0234	47	9593	0309	93	9963	1295	39	8005	2274
2	8846	0071	48	9616	0076	94	9590	0654	40	9764	0574
3	9201	0501	49	8952	0376	95	9876	0215	41	9733	0640
4	9505	0130	50	9493	0878	96	6995	0601	42	8980	1493
5	9978	0542	51	9303	0511	97	6608	0139	43	9543	2450
6	9513	0178	52	9769	0329	78	9836	0856	44	9359	0067
7	8636	1368	53	9894	0749	99	9133	0099	45	8288	0601
8	9923	0019	54	9459	0284	900	9955	0937	46	8805	0032
9	9652	0020	55	9736	0553	1	9187	0025	47	8809	0581
10	9712	0274	56	9619	1469	2	8729	0812	48	9383	0381
11	8070	0116	57	9689	1282	3	9353	0100	49	8790	0084
12	7571	0374	58	9783	0859	4	9512	0030	50	9531	0321
13	9878	0455	59	9371	0839	5	9783	0269	51	9245	0106
14	9170	0684	60	9855	1153	6	9501	0130	52	8782	0172
15	9648	0743	61	9237	1764	7	9287	0131	53	9693	0147
16	9798	0709	62	9378	1103	8	9461	0164	54	9506	0151
17	9334	0549	63	9459	0302	9	9897	0116	55	9589	0670
18	8390	1073	64	9596	0264	10	9735	0406	56	9472	0153
19	9040	0243	65	8935	0803	11	9936	0421	57	9816	1243
20	9067	0418	66	9100	0076	12	9217	0851	58	9908	1099
21	8983	0123	67	8158	0009	13	9754	0364	59	9961	0454
22	9996	0560	68	9469	0135	14	9210	0213	60	9053	0372

を満足するような i の数を数え上げればよいわけである.

以上の方法で得られたいくつかの結果を **Table V** に掲げる. 実験値の分散は

$$\sigma = \sqrt{\frac{pq}{N}} \doteqdot \sqrt{\frac{0.95 \times 0.05}{960}} \doteqdot 0.703 \times 0.01$$

Table V

m	n	t	$G(t)$ (%)	frequency	relative frequency
8	15	0.23	6.1367	57	5.9375
9	15	0.25	5.5899	54	5.6250
10	15	0.27	5.4693	50	5.2083

であるから, 3σ で約 2% の巾をもつ. このことから, **Table V** は **Table I** に対して有利な実験結果 (或はもつと N の数を大きくなければいけない) であるといえる. **Table V** をながめてみると, いずれも実験値が理論値より低目である. これは **Table I** の計算に bias があるのではなく, 次の理由であると思われる. つまり, **Table V** の各実験結果は共通の **Table IV** のを用いているよつて以上のようなことが起るのも当然である.

なお蛇足ながら, 本実験は, 始めから終りまで完全な人工実験ではないことを附加えておく. 即ち確率変数 (1) から出発している実験ではなく, $F(x)$ までは, 数値計算的に正しい値であるという前提のもとにそれ以後の数値計算を実験的に確めたいために行つたものである (またこれで必要充分であると思われる).

Part II

Welch の分布についての実験

§ 2.1. Welch の分布　序言に述べた目的の実験を行いたいため, randomized method の具体例として, ここでは Welch の導いた分布 [4] を挙げ, 先づこれについて簡単な説明をする.

m 個の block は各々 r 個の plot から構成されている農場を考える. さて m 個の処理を m 個の各 block の j 番目の plot に random order で施し, このような行為を独立に $j=1, 2, \cdots\cdots, r$ と行う. そしてその結果 i 番 block の j 番 plot において得られた収量を x_{ij} とする. Welch は統計量

$$G = \frac{(m-1)\,r^2 \sum_{i=1}^{n} (x_{i\cdot} - x_{\cdot\cdot})^2}{\sum_i \sum_j (x_{ij} - x_{\cdot j})^2},$$

ただし

$$x_{i\cdot} = \frac{1}{r} \sum_{j=1}^{m} x_{ij},$$

$$x_{\cdot j} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} x_{ij},$$

$$x_{\cdot\cdot} = \frac{1}{mr} \sum_{i,j} x_{ij}$$

は random order の仕方の数 $(m!)^{r-1}$ だけ, 勿論, 異なつた値をとりうるが, (ある仮定のもとで) もし取扱い効果がないという帰無仮説を立てたとき, G は r を無限大としたとき自由度 $m-1$ の χ^2-分布に法則収斂することを証明した [4] [5] [6]

ここで実際的な問題として, r が中心極限定理が成立する程大きくとることは, cost の点で困難であろう. 農事研究者は r の数は高々 5, 6 位に押えねばならぬことを主張している.

Welch [7] はまた，G の低次の moment を算出し，これから Pearson 曲線のあてはめを行い，棄却点の計算を行つた．

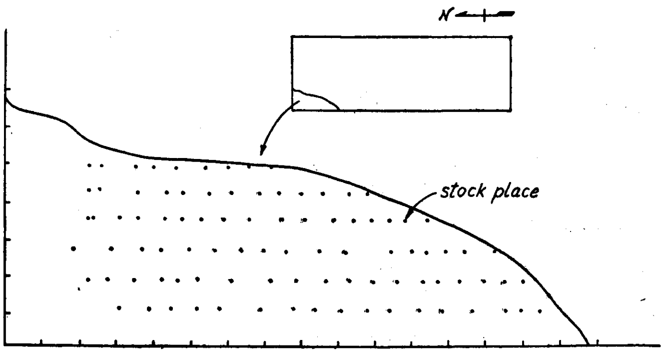
この方法は棄却点を求めるまでの数値計算はあまり楽ではない．しかしそれはとも角としても Pearson 曲線えの当てはめが，どの程度の精密な近似であるか検討の仕様もない．即ち，無条件にこの方法をつかつて，完全に安心というわけにわいかない．

それならば，いつそのこと r の数が小さいときでも G が χ^2–分布に近似するであろうかどうかということを model experiment によつて確め，もし肯定的な結論が得られるならば，この理論を F 検定法等と肩を並べて実際問題に使用するのに差支へのある理由があるとは思えない．しかしわれわれが必要とするのは，全体として近似して欲しいことではなく，ただ棄却点の附近がかなりの精度で近似することである．極端なことを言うなら他の部分はどうであつてもよいのである．これは前の Pearson 曲線のあてはめ法の場合にも云えることである．

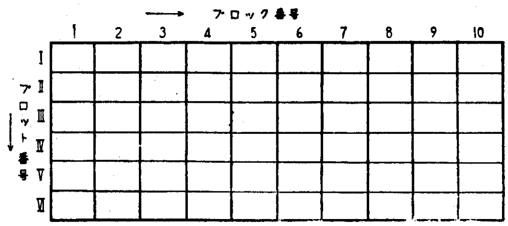
§2.2. 資料* 前章の目的に適う実験を行うため，(ここで採用した) 公平と思われる資料について紹介する必要がある．

農林省 [8]，[9] は圃場試験の基礎データを得ることを目的しとて，日本各地の試験場で米，麦等について uniformity trial を行つた．ここに引用したのはその一つで 1950 年兵庫農事試験場において行われたものである．

Diagram II



Diagran III



unit area : 1.5 tubo
I, II, ⋯⋯, IV : plot number
1, 2, ⋯⋯, 10 : block numder

Diagram II に示す実験面積に水稲を均一な処理条件で植え，収穫期に，各株の精籾重及びその他) を計測した．次に境界の水稲を除いた(境界条件による影響を除くため)ものについて，この実験圃場を，同型の矩型にいろいろの仕方で区切り，その各々の区切り方について変異係数を計算した．(本試験においてoptimum な plot size を決めたいためである) そして **Diagram III** の如き区切り方が，他のより変異係数の小さいことが判つた．これの各 plot あたりの総収穫量 (精籾量) を **Table VI** で示し，これをわれわれの資料として用いた．(但し後の便宜のため適当な常数を引いてある) これは農事において必要なことは各株あたりの収穫高ではなく，単位面積あたりの収穫高を問題とするからである．従つて **Diagram II** から判る通り各 plot における株数は，不ぞろいであるがそれは問題とする必要はない．また，変

* 農業技術研究所の御好意により種々の便を計つて頂いた．

Table VI　Agricultual Date

Treat ment (or Variety) (← Block)			Replication (——> plot) 1	2	3	4	5	6
Randomized Blocks	Latin Seuare	1	80.5	− 60.0	153.0	156.5	300.5	155.0
		2	128.0	− 1.5	149.0	244.0	218.0	236.0
		3	175.5	−114.0	182.5	283.0	100.5	42.5
		4	91.5	99.5	167.5	143.0	118.5	238.5
		5	122.0	− 7.0	161.0	99.0	56.5	217.0
		6	229.5	227.5	335.0	69.5	145.5	267.5
		7	263.0	106.0	324.0	168.5	322.5	362.0
		8	90.0	146.5	200.0	121.5	436.0	311.0
		9	228.0	155.0	359.5	248.0	288.5	292.5
		10	28.5	149.0	713.0	210.0	151.0	381.5

Note.: This date is respectively, substituted by 450 frem the actual value

異係数の小さな区切り方（plot）を選んだ理由は，われわれの実験をできるだけ実際に近付けるためである．しかし理想的なことを云えば，もつと不利な条件（変位係数の大きい）である区切り方で行い，なおかつ，われわれの実験結果が肯定的な結論に到達すれば，なお良いことである．本報告では，そこまで立ち入らず，他の機会にゆづることにした．*

§ 2.3.　実験計画　　実験は **Randomized Blocks** と **Latin Square** との二つの場合について行つた．

i）**Randomized Blocks**

$$(15)\qquad G=\frac{(m-1)\,r^2\sum_{i=1}^{m}(x_{i\cdot}-x_{\cdot\cdot})^2}{\sum_i\sum_j(x_{ij}-x_{\cdot j})^2}$$

を前述の Welch の方法で，その分布を求め，これらと自由度 m–1 の χ^2–分布との比較を行う．

使用資料は **Table VI** である．即ちこの場合 $m=10$, $r=6$ で G は $(10!)^{6-1}$ 個の異なつた値をとりうるが，われわれはそれを 150 個まで算出した．この操作は次の通りである．

10 枚を 1 組とする 6 組の card 群（合計 60 枚の card）を用意する．これを 1 組から 6 組までと番号附けを行う．さて j 組の 10 枚の card に Table VI の j 番目の replication の 10 個の variety の数字を配す（$j=1,\cdots,6$）．次に 2 番組から 6 番組までをそれぞれ，組ごとに独立によく切り（variety の randomization），切つた後，j–番組（$j=1,\cdots,6$）に於て k 番目の card の数字——これを $x^{(1)}_{j(k)}$ とおく——を k を固定して j について加え合せる——$\sum_{j=1}^{6}x^{(1)}_{j(k)}$ を求める．次に再び始めの card 群に直し，2 番組から 6 番組までを組ごとに独立してよく切り，切つた後 j 番組における k 番目の card の数字を $x^{(2)}_{j(k)}$ とおき $\sum_{j=1}^{6}x^{(2)}_{j(k)}$ を計算する．とこのような行為を反復繰返す．そして

$$(15)'\quad G^{(s)**}=\frac{(10-1)\,6^2\sum_{k=1}^{10}\left\{\left(\frac{1}{6}\sum_{j=1}x^{(s)}_{j(k)}\right)-\left(\frac{1}{6\times10}\sum_{j=1}^{6}\sum_{k=1}^{10}x^{(s)}_{j(k)}\right)\right\}^2}{\sum_{j=1}^{6}\sum_{k=1}^{10}\left\{x^{(s)}_{j(k)}-\frac{1}{10}\sum_{k=1}^{10}x^{(s)}_{j(k)}\right\}}$$

* $m=4$, $r=4$ の場合，G の値は $(4!)^{4-1}=13824$ 個とり得るが，これの全数計算を資料が均一な条件で植えられたものと，biase がかかつた条件のものと各々について計算機 Facom 128 の使用によつて行うことを計画中である．

** Welch [5] の定義とは常数を多少異なるやうにしてある．

$$
= \frac{9 \times 36 \sum_{k=1}^{10} \left\{ \frac{1}{6} \sum_{j=1}^{6} x^{(s)}_{j(k)} - x_{..} \right\}^{2\,*}}{\sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{6} (x_{ij} - x_{.j})^2}
$$

を $s = 1, 2, \cdots,$ 150 まで計算した，これの価を **Table VII** で示す．ここで x_{ij} は **Table VI** の始めの数字あでる (i: variety, j: replication)

Table VII　Experimental value (Randomized Blocks)

No.	experimental value	No.	experimental value	No.	experimental value	No.	experimental value	No.	experimental value
1	16.782	31	10.689	61	5.857	91	9.804	121	10.641
2	8.253	32	19.229	62	4.587	92	17.254	122	14.193
3	12.824	33	14.159	63	11.597	93	7.234	123	6.690
4	10.433	34	7.401	64	12.276	94	11.292	124	8.914
5	9.755	35	7.391	65	6.745	95	10.004	125	5.193
6	2.682	36	12.373	66	12.564	96	3.085	126	9.887
7	9.171	37	12.789	67	3.451	97	12.471	127	8.178
8	9.840	39	14.663	68	10.887	98	8.815	128	7.378
9	5.660	39	7.682	69	5.455	99	4.286	129	3.931
10	10,359	40	5.777	70	4.964	100	6.468	130	11.864
11	5.482	41	7.193	71	6.956	101	7.470	131	10.948
12	12.571	42	12.144	72	9.480	102	4.543	132	4.774
13	14.684	43	7.395	73	7.759	103	16.474	133	11.311
14	7.304	44	12.496	74	5.268	104	9.687	134	11.654
15	7.890	45	14.856	75	7.345	105	13.866	135	8.065
16	7.827	46	3.774	76	7.331	106	7.252	136	9.983
17	10.393	47	10.523	77	6.202	707	8.261	137	12.471
18	8.197	48	6.090	78	5.689	108	11.562	138	7.272
19	2.325	49	6.466	79	12.165	109	10.811	139	8.533
20	7,090	50	5.528	80	2.783	110	3.290	140	6.742
21	10.298	51	2.630	81	11.477	111	7.412	141	18.490
22	15.563	52	11.279	82	3.731	112	13.884	142	19.925
23	9.240	53	12.967	83	8.644	113	4.807	143	10.993
24	5.183	54	6.504	84	7.698	114	9.554	144	7.441
25	4.414	55	5.577	85	9.474	115	5.182	145	11.268
26	11.542	56	12.018	86	7.603	116	4.249	146	13.391
27	5.881	57	9.482	87	10.954	117	5.149	147	3.240
28	8.523	58	8.701	88	8.397	118	10.807	148	13.649
29	12.282	59	7.907	89	4.276	119	9.894	149	15.098
30	7.380	60	6.137	90	11.021	120	11.807	150	9.764

次にこれから低次の moment 及び，頻度を計算し，これらと自由度 10–1 の χ^2 分布の場合とを比較した．その結果を **Table VIII** および **Diagram IV** で示す．

これの 100 まで，および 150 までの経験分布と χ^2–分布との適合度を χ^2 によつて検定すると

100 までのとき

$\chi^2 = 5.6$　　自由度 7

150 までのとき

$\chi^2 = 9.41$　　自由度 7

* 前述の card の順列行為に対し，分母及び分子の一部は不変であるからである．

で，勿論適合することが判る．

Table VIII Comparison between χ^2-dis. & Experimentel dis. (Randomized Blocks)

moment

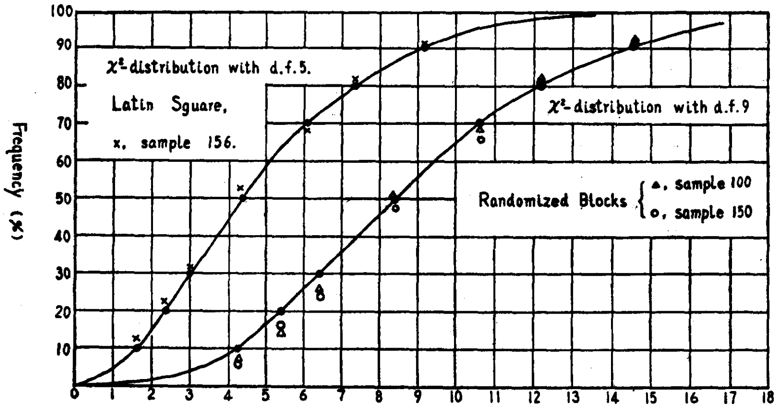
		mean	variance
χ^2-dis. (d. f. 9)		9.	18.
experimental dis.	sample size 100	8.750	12.1884
	sample size 150	9.018	13.0546
	universe	9.	13.7033

distribution

interval	0 ～ 4.168	4.168 ～ 5.380	5.380 ～ 6.393	6.393 ～ 8.343	8.343 ～ 10.656	10.656 ～ 12.246	12.246 ～ 14.684	14.684 ～ ∞
(probability of χ^2-dis. with d. f. 9) × 100	10	10	10	20	20	10	10	10
frequency of experimental dis. with sample size 100	8	7	12	24	18	13	12	6
(frequency of experimental dis. with sample size 150)÷150	11/1.5	14/1.5	12/1.5	35/1.5	27/1.5	23/1.5	18/1.5	10/1.5

Diagram IV

χ^2-distributions and these experimental distributions.



ii) Latin Square の場合はわれわれの数値計算の便宜上だけの理由で文献［7］とは多少異なつた次の統計量

$$(16)\quad H=\frac{(r-1)^2\left\{r^2\sum_k(\bar{x}^2_{(k)}-x..^2)\right\}}{r\left\{\sum x_{ij}^2-\frac{1}{r}\sum x_i^2-\frac{1}{r}\sum x_j^2+\frac{1}{r^2}x..^2\right\}}$$

を定義した（この統計量は母集団 moment の算出が困難なので Pearson 曲線へてあてはめは行えなかつた）．ここで，r は **Latin Square** の次元数，$x_{(k)}$ は，k 番目の取扱いが施こされた面積の作高平均とする．

さて次元数6の **Latin Square** の並べ方の可能数は 9408 通りあり，これらは，15 個の型に分類される［10］われわれは抽出比 1/60 で，この 15 個の型に属する数に比例して 156 個（≒9408/60）

の並べ方を配分し，その配分法に従つて **Table VI** の資料から H を計算した．その結果を**Table IX** で示す．

Table IX Experimental value (Latain Square)

No.	No. of* type	experimental value	No.	No. fo type	experimental value	No.	No. of type	experimental value	No.	No. of type	experimental value
1		1.02	41		7.52	81		1.67	121		3.16
2		9.16	42		2.54	82		5.27	122	VII	2.14
3		2.14	43		1.85	83		0.65	123		3.80
4		2.23	44		2.62	84		3.35	124		4.37
5		3.76	45		2.86	85		3.27	125		3.47
6		6.38	46		4.49	86		6.44	126		3.96
7		8.99	47	II	6.13	87		6.89	127		4.54
8		2.19	48		9.72	88		2.21	128		2.40
9		11.59	49		5.62	89		2.21	129		3.89
0		3.88	50		6.62	90		7.54	130		8.92
11		7.09	51		10.54	91		2.63	131	VIII	4.48
12		1.62	52		0.79	92		1.87	132		10.75
13		3.93	53		6.17	93		0.61	133		3.00
14		7.68	54		1.46	94		1.08	134		2.58
15		2.49	55		0.30	95		3.21	135		3.75
16		6.82	56		4.78	96		2.63	136		7.19
17		4.06	57		5.27	97		5.97	137		6.33
18	I	3.70	58		0.27	98		6.33	138		9·49
19		7.98	59		0.68	99	V	5.34	139		3.82
20		7.21	60		7.43	100		4.45	140	IX	7.72
21		0.75	61		8.86	101		4.82	141		10.62
22		4.06	62		3.86	102		5.43	142		5.14
23		2.88	63		1.41	103		4.20	143		7.25
24		5.19	64	III	3.01	104		3.47	144		2.73
25		5.19	65		10.49	105		1.97	145	X	7.55
26		8.50	66		5.97	106		10.59	146		4.50
27		6.92	67		6.81	107		3.52	147		6.61
28		6.00	68		2.29	108		1.11	148		6.89
29		2.42	69		11.49	109		3.03	149	XI	1.56
30		3.19	70		4.12	110		3.13	150		4.18
31		10.21	71		0.56	111		4.16	151		1.07
32		2.10	72		2.51	112	VI	2.75	152	XII	9.74
33		4.44	73		1.13	113		1.56	153	XIII	9.65
34		2.11	74		4.22	114		5.73	154	XIV	11.84
35		9.57	75		1.49	115		5.81	155	XV	1.50
36		3.90	76		6.66	116		7.65	156	XVII	6.79
37		13.06	77		2.35	117		2.88			
38		6.42	78		7.26	118		3.34			
39		5.23	79		1.69	119		0.84			
40		3.19	80	IV	6.80	120		5.95			

* 文献 [10] p 61 に記せられた type 番号

これからつくられる平均，分散，頻度を自由度6–1の χ^2–分布のそれと比較した結果を **Table X** および **Diagrom IV** で示す．頻度について適合度を調べるため，χ^2–検定を行うと，

Table X Comparison between χ^2-dis. and Experimental dis. with sample size 156 (Latin Square)

moment

	mean	variance
χ^2-dis. (d. f. 5)	5.	10.
Experi. dis.	4.76	8.3199

distribution

interval	0 ～ 1.610	1.610 ～ 2.343	2.343 ～ 3.000	3.000 ～ 4.351	4.351 ～ 6.064	6.064 ～ 7.289	7.289 ～ 9.236	9.236 ～ ∞
(prob. of χ^2-dis.) × 100	10	10	10	20	20	10	10	10
(frequency of Exper dis with sample size 156)÷1.56	20/1.56	15/1.56	15/1.56	32/1.56	24/1.56	22/1.56	13/1.56	15/1.56

$\chi^2 = 6.05$ 自由度 5

でよく合うことが判る.

以上の結果からいえることは，われわれが，この報告の最初に掲げた問題に対し，それを否定する証明は得られなかつた．即ち，ある程度の安心さをもつて，この方法を使つてもよい．むしろ計算が簡便であるからそれだけこの方法を使つた方がよいということを主張してもよいと思う．何故ならば，他にも，これと同程度ほどの根拠で頻繁に実用化されている理論の例によく遭遇しているからである.

以上は私の主張であるが，これらの結果をみて読者の御批評御教示を乞う次第である.

(統計数理研究所)

文　献

[1] 橋爪浅治，鴨志田清 602A 統計機による rauge-ratio の計算法（未印刷）

[2] R. F. Link: The sampling distribution of the Ratio of two Ranges from independent Samples.

[3] E. S. Pearson and Hartley H. O. (1942)
The pobability integral of the range in samples of n observations from a normal population Biometrika 32, 301

[4] Pitmon Biometrika p 322, Feb 1938

[5] Welch 〃 29, pp 21—52

[6] A. Wald "Note on the efficient design of experimental Investigation"

[7] Welch

[8] 近藤康男，農事試験の設計に関する統計数理的研究（1950 年度成績中間報告）

[9] Data of Uniformity Trials on Several Crops in Japan Laboratory of Statistics and Laboratory of Desing of Experiment Section of Physics and Statistics National Institute of Agricultural Sciences.

[10] Fisher and Yate: Statistical Table for Biological, Agricultural and Medical Research. p 61