

対数正規型分布函数の Laplace 変換

樋口伊佐夫

(1956年8月受付)

Laplace-Transformation der Logarithmischnormalen Verteilungsfunktion

von ISAO HIGUTI

In praktischen Problemen, begegnet man oft dem Integral, das sich zum Laplace-Transformierte der logarithmischnormale Verteilungsfunktion führen läßt. Wir haben solches Integral in dem Aufgaben der Mikrowellenfunkttechnik und Kolloidstatistik, behandelt, und haben ihre annähernden Werte durch Sattelpunktmethode gerechnet. Dabei sind auch ihre einfacheren mathematischen Eigenschaften gesucht worden. Über diese Resultaten wollen wir hier berichten.

Institut der Statistischen Mathematik.

電気通信工学, コロイド統計などの実際問題で対数正規型分布の Laplace 密度函数の変換を計算してみる必要を生じた。精密な計算はまだ出来ないが, 取敢えず概算を行い, またついでに簡単な数学的性質も調べてみたので, それらを報告する。

1. $\exp\{-(\alpha \log t)^2\}$ の Laplace 変換の一般性

α を 0 でない実数とし

$$\int_0^{\infty} \exp\{-\alpha^2(\log t^2)\} e^{-st} dt \equiv f(s; \alpha) \dots\dots\dots (1.1)$$

とする。この積分は $\Re s > 0$ で存在するが, 例えば次のような積分はみな $f(s; \alpha)$ の計算に帰せられる。

$$i) \int_0^{\infty} t^{\beta} \exp\{-(\alpha \log t)^2 - st^{\gamma}\} dt = \int_0^{\infty} \exp\{-(\alpha \log t)^2 + \beta \log t - st^{\gamma}\} dt$$

(α, β, γ は実の常数で $\gamma \neq 0$)

$$\text{これは } \frac{1}{|\gamma|} \exp\left\{\frac{(\beta+1)^2 - \gamma^2}{4\alpha^2}\right\} \cdot f\left(e^{\frac{\gamma(\beta+1-\gamma)}{2\alpha^2}} s; \frac{\alpha}{\gamma}\right) \dots\dots\dots (1.2)$$

となる。

$$\text{従つて対数正規分布の密度函数, } g(t; \mu, \sigma) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma t} \exp\left\{-\frac{(\log t - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

$$\text{の Laplace 変換は } \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\sigma^2}{2}} \cdot f\left(e^{\mu - \sigma^2} s; \frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right) \text{ となる。}$$

$$\text{ii) } \int_{s_1}^{s_2} f(s; \alpha) ds = e^{-\frac{1}{4\alpha^2}} \left\{ f\left(e^{-\frac{1}{2\alpha^2}} s_1; \alpha\right) - f\left(e^{-\frac{1}{2\alpha^2}} s_2; \alpha\right) \right\}. \dots\dots\dots (1.3)$$

($s_1, s_2 > 0$)*

iii) Laplace 変換のよく知られた性質により

$$\int_0^\infty dt e^{-st} \int_0^t d\tau \exp\{-(\alpha \log \tau)^2\} = \frac{1}{s} f(s; \alpha) \quad (s > 0) \dots\dots\dots (1.4)$$

従つて対数正規分布函数 $\int_0^t g(\tau; \mu, \sigma) d\tau$ の Laplace 変換は $\frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma s} e^{-\frac{\sigma^2}{2}} f\left(e^{\mu - \sigma^2} s; \frac{1}{\sqrt{2} \sigma}\right)$.

iv) Laplace 変換のもう一つのよく知られた性質 (収束半平面の内部での正則性) から

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{ds^n} f(s; \alpha) &= (-1)^n \int_0^\infty t^n \exp\{-(\alpha \log t)^2 - st\} dt \\ &= (-1)^n \exp\left\{\frac{n(n+2)}{4\alpha^2}\right\} \cdot f\left(e^{\frac{n}{2\alpha^2}} s; \alpha\right). \dots\dots\dots (1.5) \end{aligned}$$

2. $f(s; \alpha)$ の数学的性質

容易にわかるように, この Laplace 変換の収束座標も絶対収束座標も 0 である. 従つて $f(s; \alpha)$ は $\Re s \geq 0$ でのみ定義されているものとする.

Laplace 変換の連続性から s を $\Re s > 0$ の複素とした時, 虚軸にふれないよう道じで 0 に近づけると

$$\lim_{s \rightarrow 0} f(s; \alpha) = f(0; \alpha) = \int_0^\infty \exp\{-(\alpha \log t)^2\} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{|\alpha|} \exp\left\{\frac{1}{4\alpha^2}\right\}. \dots\dots (2.1)$$

$$\text{また } \lim_{\Re s \rightarrow \infty} f(s; \alpha) = 0 \dots\dots\dots (2.2)$$

$$\text{従つて (1.3) から } \int_0^\infty f(s; \alpha) ds = \sqrt{\pi} / |\alpha|. \dots\dots\dots (2.3)$$

(2.1) と (1.5) から

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{d^n}{ds^n} f(s; \alpha) = (-1)^n \frac{\sqrt{\pi}}{|\alpha|} \exp\left\{\frac{(n+1)^2}{4\alpha^2}\right\} \dots\dots\dots (2.4)$$

$f(s; \alpha)$ を収束半平面の内部の点 s_0 で巾級数に展開すると (1.5) により

$$f(s; \alpha) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!} \exp\left\{\frac{n(n+2)}{4\alpha^2}\right\} f\left(e^{\frac{n}{2\alpha^2}} s_0; \alpha\right) (s-s_0)^n \dots\dots\dots (2.5)$$

となる. この右辺の巾級数の収束半徑は $|s_0|$ であるから, これにより, 左半平面の中まで解析接続が出来るとはいうまでもないが, 立入らないで (2.5) を用いて $s \rightarrow \infty$ のときの収束の速さをしらべよう. Cauchy Hadamard の式から

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{n}{4\alpha^2}} n^{-1} \sqrt[n]{|f(e^{\frac{n}{2\alpha^2}} s_0; \alpha)|} = \frac{1}{|s_0|} e^{-\left(\frac{1}{4\alpha^2} + 1\right)}.$$

特に $s_0 = 1$ とすれば s が実数のとき

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{s}}{2\alpha^2 \log s} \left\{ f(s; \alpha) \right\}^{\frac{1}{2\alpha^2 \log s}} = e^{-\left(\frac{1}{2\alpha^2} + 1\right)} \dots\dots\dots (2.6)$$

s が実数のとき (1.5) から $f(s; \alpha)$ は単調減少であるが (2.6) から $s \rightarrow \infty$ のときその order は

$$O\left\{\left(\frac{2\alpha^2 \log s}{\sqrt{s}}\right)^{2\alpha^2 \log s} \cdot \left(\frac{1}{s}\right)^{2\alpha^2 + 1}\right\}. \dots\dots\dots (2.7)$$

* $f(s; \alpha)$ は $|\arg s| \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ で一様収束だから実は (1.3) の左辺の積分路がこの領域内であれば積分順序の交換が出来て右辺を得る.

** $f(s; \alpha)$ を $s = 0$ で巾級数に展開することは出来ない. (2.4) を用いて形式的につくった級数は収束しない. しかしそれは $s = 0$ のときの $f(s; \alpha)$ に対する漸近級数ではある.

より大きくはないことがわかる。

つぎに複素平面で実軸と φ なる角をなすような原点からひいた半直線に沿う積分

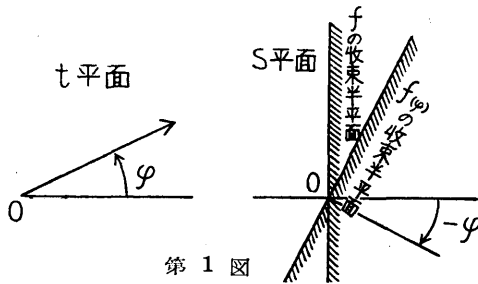
$$f_{(\varphi)}(s; \alpha) = \int_0^{\infty(\varphi)} \exp\{-\alpha^2(\log t)^2 - st\} dt$$

を考えることにより次のような結果が得られる。

$$f_{(\varphi)}(s; \alpha) = \int_0^{\infty} \exp[-\alpha^2(\log t)^2 + \alpha^2\varphi^2 - |s|t \cos(\varphi + \arcs s) + i\{\varphi + 2\alpha^2\varphi \log t - |s|t \sin(\varphi + \arcs s)\}] dt \dots\dots\dots(2.8)$$

となるが, これから

$$|f_{(\varphi)}(s; \alpha)| \leq e^{\alpha^2\varphi^2} f(|s|\cos(\varphi + \arcs s); \alpha) \dots\dots\dots(2.9)$$



第 1 図

$f_{(\varphi)}$ の収束半平面は (2.8) から第 1 図に示した如くなることわかる。 t 平面で扇形の道すじで積分を行い, $|t|$ の大きな所での円弧にそう積分の絶対値が小さくなることを使うと Cauchy の定理により f と $f_{(\varphi)}$ との共通な収束領域に於ては $f_{(\varphi)}(s; \alpha) = f(s; \alpha)$ が成立つことがわかるから (2.9) の左辺は $|f(s; \alpha)|$ としてよい。従つて s が複素数の場合の評価式

$$|f(s; \alpha)| \leq e^{\alpha^2\varphi^2} f(|s|\cos(\varphi + \arcs s); \alpha) \dots\dots\dots(2.10)$$

(但し $|\varphi + \arcs s| < \frac{\pi}{2}$)

を得る。また (2.8) から $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, $s > 0$ に対して

$$\int_0^{\infty} \{\sin(\varphi + 2\alpha^2\varphi \log t - st \tan\varphi)\} \exp\{-\alpha^2(\log t)^2 - st\} dt = 0$$

などの複雑な恒等式が得られる。今後は s を実数として議論をする。先づ次の定理を証明しよう。

p, q を 1 より大きい任意の実数とすると

$$f(pqs; \alpha) f(s; \alpha) > f(ps; \alpha) f(qs; \alpha) \dots\dots\dots(2.11)$$

が成立つ。

証明: $g_1(t) = \exp\{-(\alpha \log(t/q))^2\}$, $g_2(t) = \exp\{-(\alpha \log t)^2\}$, $h_1(t) = e^{-pqt}$, $h_2(t) = e^{-st}$ とすると, 積分変数の変換により $f(pqs; \alpha) = \frac{1}{q} \int_0^{\infty} g_1(t)h_1(t)dt$, $f(qs; \alpha) = \frac{1}{q} \int_0^{\infty} g_1(t)h_2(t)dt$ とあらわせる。また, $f(ps; \alpha) = \int_0^{\infty} g_2(t)h_1(t)dt$, $f(s; \alpha) = \int_0^{\infty} g_2(t)h_2(t)dt$ で, かつ仮定により q は正だから (2.11) は

$$\left| \begin{array}{cc} \int_0^{\infty} g_1(t)h_1(t)dt & \int_0^{\infty} g_1(t)h_2(t)dt \\ \int_0^{\infty} g_2(t)h_1(t)dt & \int_0^{\infty} g_2(t)h_2(t)dt \end{array} \right| < 0 \dots\dots\dots(2.12)$$

を証明すれば得られる。ところで f_1, f_2, g_1, g_2 はみな $(0, \infty)$ で積分可能だから (2.12) の左辺の行列式は Andréief-Stieltjes の公式により

$$\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \begin{vmatrix} g_1(t_1) & g_2(t_1) \\ g_1(t_2) & g_2(t_2) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} h_1(t_1) & h_2(t_1) \\ h_1(t_2) & h_2(t_2) \end{vmatrix} dt_1 dt_2 \dots\dots\dots(2.13)$$

に等しい。(2.13) の最初の行列式 (g のつくる行列式) を $D(g)$, あとの行列式を $D(h)$ とすると

$$D(g) = \exp[-\alpha^2\{\log t_1\}^2 + (\log t_2)^2 + (\log q)^2] \\ \times \{\exp(2\alpha^2 \log q \log t_1) - \exp(2\alpha^2 \log q \log t_2)\}$$

$q > 1$ だから $\log q > 0$ 従つて $D(g)$ は $t_1 > t_2$ のとき正, $t_1 < t_2$ のとき負となる. また

$$D(h) = \exp\{-s(p t_1 + t_2)\} - \exp\{-s(p t_2 + t_1)\}$$

これは明かに $q t_1 + t_2 < p t_2 + t_1$ のとき正, 逆のとき負になる. $p > 1$ だから $t_1 > t_2$ のとき負 $t_1 < t_2$ のときに正となる. 従つて (2.13) の integrand は積分領域のうち $t_1 = t_2$ の直線上の点を除いて常に負 $t_1 = t_2$ では 0 になるから (2.13) は負になる. (証明終り)

上の定理は $f(ks; \alpha)/f(s; \alpha)$ が $k > 1$ なる常数に対して, s に関して単調減少であることを言つている. 即ち

$$\frac{d}{ds} \frac{f(ks; \alpha)}{f(s; \alpha)} < 0 \quad (k > 1) \dots\dots\dots (2.14)$$

(1.5) をつかえば, これから $k > 1$ に対して

$$k f(e^{\frac{1}{2\alpha^2}} ks; \alpha) f(s; \alpha) > f(e^{\frac{1}{2\alpha^2}} s; \alpha) f(ks; \alpha) \dots\dots\dots (2.15)$$

が成立つことがわかる.

さらに, $k > 1$ に対して

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{f(ks; \alpha)}{f(s; \alpha)} = 0 \quad (k > 1, \alpha \neq 0) \dots\dots\dots (2.16)$$

が成立つ. ***

3. 確率密度函数 $|\alpha| f(s; \alpha)/\sqrt{\pi}$

(2.3) から $|\alpha| f(s; \alpha)/\sqrt{\pi}$ ($0 \leq s < \infty$) は α を parameter とする或る分布の密度函数を与えることがわかる. この分布の n 次の積率 $\langle s^n \rangle$ は

$$\langle s^n \rangle = \Gamma(n+1) \exp\left\{\frac{n^2}{4\alpha^2}\right\} \dots\dots\dots (3.1)$$

次にこの分布の変数の対数をとつたものの平均値 $\langle \log s \rangle$ はやはり積分順序の交換により

*** $f(s; 0) = \int_0^\infty \exp(-st) dt = 1/s$ 従つて $\lim_{s \rightarrow \infty} f(ks; 0)/f(s; 0) = 1/k \neq 0$ 従つて $\alpha = 0$ のときは (2.16) は成立たない. (2.16) は次のようにして証明される. $f(ks; \alpha)/f(s; \alpha)$ は単調減少で常に正であるから, 負でない極限が存在する. その極限が 0 でなく $\epsilon_0 (> 0)$ であるとすれば $f(ks; \alpha) - \epsilon_0 f(s; \alpha)$ はどんな s に対しても常に非負であるはずである. ところでこの式は

$$(1/s) \cdot \exp\{-(\alpha \log s)^2\} \int_0^\infty \{\exp(-kt) - \epsilon_0 \exp(-t)\} \times \exp\{2\alpha^2 \log t \log s - (\alpha \log t)^2\} dt$$

と書きかえられる. 今 $M \equiv -\log \epsilon_0 / (k-1)$ とおきこの積分を $\int_0^M + \int_M^\infty$ にわけると

$$\int_0^M < A \exp\{2\alpha^2 \log M \log s\}, \int_M^\infty = B(s) \exp\{2\alpha^2 \log M \log s\}$$

但し $A = \int_0^M \{\exp(-kt) - \epsilon_0 \exp(-t)\} \exp\{-(\alpha \log t)^2\} dt$

$$B(s) = \int_M^\infty \{\exp(-kt) - \epsilon_0 \exp(-t)\} \exp\{-\alpha^2(\log t - \log M) \log s - (\alpha \log t)^2\} dt$$

となる. A は s に関係しない常数であるが, $B(s)$ をみるに積分範囲では $\log t > \log M$, $\exp(-kt) > \epsilon_0 \exp(-t)$ だから $B(s)$ の integrand は t を固定して $s \rightarrow \infty$ とすると $-\infty$ に近づく. 従つて $B(s) \rightarrow -\infty$ であるから十分大きな s に対しては $A + B(s) > 0$ このことから十分大きな s に対して $f(ks; \alpha) - \epsilon_0 f(s; \alpha) > 0$ となり仮定に反する. (証明終り)

**** $\int_0^\infty s^n f(s; \alpha) ds = \int_0^\infty ds s^n \int_0^\infty dt \exp\{-\alpha^2(\log t)^2 - st\}$ に於て右辺は容易にわかる如く積分順序の交換が出来る. そうして計算すれば (3.1) を得る.

$$\langle \log s \rangle = \frac{|s|}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dt \exp\{-\alpha^2(\log t)^2\} \int_0^\infty ds \log s \cdot \exp\{-st\}$$

ところで周知の如く, $\int_0^\infty e^{-st} \log s ds = \frac{\Gamma'(1)}{t} - \frac{\log t}{t}$ (但し $\Gamma'(1)$ は Euler-Mascheron の常数で $\Gamma'(1) = -0.5772156649\dots$) であるから, これを用いれば, 容易に

$$\langle \log s \rangle = \Gamma'(1) = -0.5772 \dots \dots \dots (3.2)$$

を得る. 即ち $\log s$ の平均値は α に依存しない自然常数となる.

さらに $\Gamma^{(n)}(1) = \int_0^\infty e^{-s} (\log s)^n ds$ (n は正の整数) なる常数を用いて

$$\int_0^\infty e^{-st} (\log s)^n ds = \frac{1}{t} \left\{ (-1)^n (\log t)^n + \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} (\log t)^{n-i} \Gamma^{(i)}(1) \right\}$$

と書けるから $(\log s)^n$ の平均は n が偶数 ($n = 2m$) の場合と奇数 ($n = 2m + 1$) の場合とにわけて

$$\langle (\log s)^{2m} \rangle = \frac{2 \cdot (2m-1)!}{(2\alpha)^{2m} (m-1)!} + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{(2m)! \Gamma^{(2i)}(1)}{(2\alpha)^{2(m-i)} (m-i)! (2i)!} + \Gamma^{(2m)}(1)$$

$$\langle (\log s)^{2m+1} \rangle = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{(2m+1)! \Gamma^{(2i+1)}(1)}{(2\alpha)^{2(m-i)} (m-i)! (2i+1)!} + \Gamma^{(2m+1)}(1)$$

と計算される.

つぎに $\alpha \rightarrow \infty$ としたときのこの分布の極限分布は指数型になることすなわち

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} (|\alpha|/\sqrt{\pi}) f(s; \alpha) = e^{-s} \dots \dots \dots (3.3)$$

を言っておく.

$$(|\alpha|/\sqrt{\pi}) f(s; \alpha) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^\infty \exp(-x^2 - \frac{x}{\alpha} - se^{\frac{x}{\alpha}}) dx$$

に於て右辺の integrand は $\alpha \rightarrow \infty$ のとき任意の有限区間で一様に $\exp(-x^2 - s)$ に収束する. 従つて (3.3) を得る.

このことは Dirac の δ 関数を用いて

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} |\alpha| \exp\{-\alpha^2(\log t)^2\} = \sqrt{\pi} \delta(t-1)$$

により形式的に計算してよいことを示している.

4. 鞍部点の方法による近似計算

$f(s; \alpha)$ を鞍部点の方法 (正確には鞍部点の方法といえないかも知れない) によつて概算した.

$f(s; \alpha) = \int_0^\infty \exp\{-(\alpha \log t)^2 - st\} dt$ に於て t を $\tau = \log t - \frac{1}{2\alpha^2}$ にかえると

$$f(s; \alpha) = \exp\left\{ \frac{1}{2\alpha^2} \right\} \int_{-\infty}^\infty \exp\{-\alpha^2 \tau^2 - s^* e^\tau\} d\tau \left. \vphantom{f(s; \alpha)} \right\} \dots \dots \dots (4.1)$$

但し $s^* = s \exp\left\{ \frac{1}{2\alpha^2} \right\}$

となる $\alpha^2 \tau^2 + s^* e^\tau \equiv \varphi(\tau; \alpha, s)$ とすると

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = 2\alpha^2 \tau + s^* e^\tau \quad \frac{d^2\varphi}{d\tau^2} = 2\alpha^2 + s^* e^\tau > 0$$

従つて φ は $e^\tau/\tau = -2\alpha^2/s^*$ をみたす τ に対して唯一の極小値をとる. $x = e^\tau/\tau$ の逆関数を $\tau = \tau(x)$ とすると $x < 0$ に対してこれは一価函数である. $\varphi(\tau)$ を $\tau_0 = \tau(-2\alpha^2/s)$ の近傍で巾級数に展開する. $\varphi(\tau) = \varphi(\tau_0) + \varphi^{**}(\tau)$.

$$\varphi^{**}(\tau) \equiv \varphi(\tau_0) + \frac{1}{2} \varphi''(\tau_0) (\tau - \tau_0)^2 \dots \dots \dots (4.2)$$

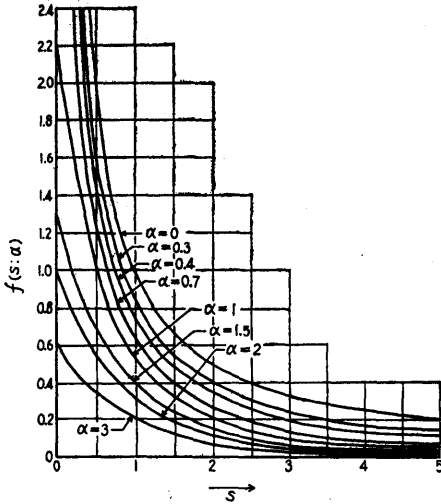
積分えの寄与は τ_0 の附近のみが非常に大きいと考えられるから $\varphi(\tau)$ を $\varphi^*(\tau)$ でおきかえると

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\varphi(\tau)\} d\tau \sim \sqrt{2\pi/\varphi''(\tau_0)} \exp\{-\varphi(\tau_0)\} \dots\dots\dots(4.3)$$

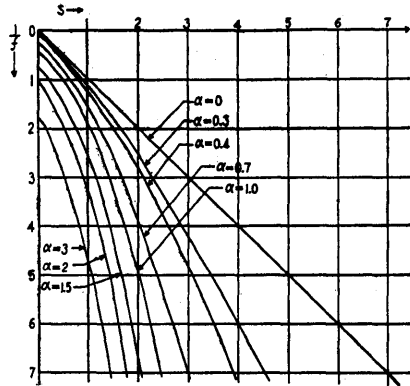
$s^*e^{\tau_0} = -2\alpha^2\tau_0$ なる関係があるからそれを用いると (4.3) は

$$f(s; \alpha) \sim \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^2(1-\tau_0)}} \exp\left\{-\alpha^2\tau_0(\tau_0-2) + \frac{1}{4\alpha^2}\right\} \dots\dots\dots(4.4)$$

但し τ_0 は $e^{\tau_0}/\tau_0 = -(2\alpha^2/s)\exp\{-1/(2\alpha^2)\}$ の解

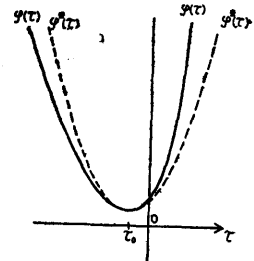


第 2 図



第 3 図

(4.4) によつて計算した $f(s; \alpha)$ の graph を第 2 図, 第 3 図に示す。 $\varphi(\tau)$ を $\varphi^*(\tau)$ でおきかえるのは非常に rough な計算であるがそれにもかかわらず結果は実用上困らない程度に正確である。それは τ が τ_0 を遠ざかると被積分函数が急速に小さくなるが、その上、 $\varphi(\tau)$ と $\varphi^*(\tau)$ とのグラフは図 3 のようになるから $-\infty$ から $+\infty$ までの積分で $-\infty$ から τ_0 までの部分と τ_0 から $+\infty$ までの部分とで差異がかなり打消されるからである。



第 4 図

更に近似を高めるためには

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\varphi(\tau)\} d\tau = \exp\{\varphi(\tau_0)\} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\varphi^{**}(\tau)\} \exp\left\{-\frac{1}{2}\varphi''(\tau_0)(\tau-\tau_0)^2\right\} d\tau$$

に於て $\exp\{-\varphi^{**}(\tau)\}$ を τ_0 のまわりで巾級数に展開してそれを用いればよい。

$$\exp\{-\varphi^{**}(\tau)\} = 1 + C_3(\tau-\tau_0)^3 + C_4(\tau-\tau_0)^4 + C_5(\tau-\tau_0)^5 + \dots$$

となるから

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\varphi(\tau)\} d\tau \sim \sqrt{2\pi/\varphi''(\tau_0)} \exp\{-\varphi(\tau_0)\} \cdot [1 + 3C_3/\varphi''(\tau_0)^2 + 15C_5/\varphi''(\tau_0)^3 + \dots]$$

$$f(s; \alpha) \sim \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^2(1-\tau_0)}} e^{-\alpha^2\tau_0(\tau_0-2) + \frac{1}{4\alpha^2}} \times \left(1 + \frac{\tau_0}{16\alpha^2(1-\tau_0)^2} + \frac{\tau_0(1+20\tau_0\alpha^2)}{192\alpha^4(1-\tau_0)^3} + \dots\dots\dots\right)$$

この τ_0 は (4.4) の τ_0 と同じである。

これにより誤差の評価も出来るが勿論 α, s の値に依存する。 τ_0 といったようなものを媒介にせず α, s の explicit な函数としての $f(s; \alpha)$ の近似式を得ることが望ましい。それが出来れば

ば対数正規型の分布のたたみこみがかなり正確に求まるであろう。

5. 電気通信工学に於ける応用

発信地に於て一定の強度の V. H. F. 波を送つても数百キロメートル離れた受信地に於ては電界強度は時間的に変化し、(いわゆる Fading) その瞬時値の分布は密度函数 ($r \geq 0$)

$$p(r) = (r/\psi) \exp \{-r^2/(2\psi)\} \dots\dots\dots (5.1)$$

をもついわゆる Reighleigh 分布に従うことが実験的にも確められている。ところが Reighleigh 分布は短時間(約1時間位)の統計では非常によくあてはまるが、長時間の間にはこの分布の中心的な位置自体が変動し、median value の分布はデシベルガウス型(対数正規型)に近いといわれる。その場合、電界強度の瞬時値の長時間に於ける分布を求めることが回線の設計の上で問題になった。*****

(5.1) の median ualue r_0 は

$$r_0 = \sqrt{2\psi \log 2} \dots\dots\dots (5.2)$$

であり平均値は $\sqrt{\psi(\pi/2)}$ であり mode は $\sqrt{\psi}$ であることが容易にわかる。従つて、平均値、mode、median の何れをデシベルガウスに従うと考へてもよいが、実験値の取扱いの使宜上 median r_0 の分布の密度函数を

$$q(r_0) = \frac{K}{\sqrt{2\pi} \sigma r_0} \exp \left\{ -\frac{\{K \log(r_0/R)\}^2}{2\sigma^2} \right\} \dots\dots\dots (5.3)$$

として話を進める。***** ここで K は真値とデシベル値との間の変換常数で $K = 20/\log 10 \doteq 8.6859$ *****

さて (5.1) は r_0 に対しての条件附確率密度函数と考へられる。すなわち (5.2) を用いて

$$p(r; r_0) = (2r/r_0^2) \log 2 \cdot \exp \{- (r^2/r_0^2) \log 2 \} \dots\dots\dots (5.4)$$

そこで求める分布(奥村氏と共に我々はこれを L 分布と名づけよう)の密度函数は (5.4), (5.3) を用いて

$$f(r) = \int_0^\infty p(r; r_0) q(r_0) dr_0 \dots\dots\dots (5.5)$$

とあらわされる。(5.5) は $R^2/r_0^2 = t$ とおいて変数変換すれば

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \frac{Kr \log 2}{\sqrt{2\pi} \sigma R^2} \exp \left\{ -\frac{(\frac{1}{2} K \log t)^2}{2\sigma^2} - t \frac{r^2}{R^2} \log 2 \right\} dt \\ & = \frac{Kr \log 2}{\sqrt{2\pi} \sigma R^2} f \left(\frac{r^2}{R^2} \log 2; \frac{K}{\sqrt{8}\sigma} \right) \dots\dots\dots (5.6) \end{aligned}$$

更に分布函数 $F(r) = \int_0^r f(r) dr$ は

$$F(r) = \frac{1}{2} \frac{K}{\sqrt{2\pi} \sigma} \int_0^{\frac{r^2}{R^2} \log 2} f(t; \frac{K}{\sqrt{8}\sigma}) dt$$

(1.3), (2.1) によりこれは

***** 詳しくは 奥村善久：見透外遠距離伝播に於ける瞬時電界強度の長期間分布とフェーディングの推定：電気通信研究所成果報告 871 号

***** median : mean : mode の比は 1 : 1.229 : 0.849 で大して違わない。もしも平均値 \bar{r} の分布が $q(\bar{r}) = \{K/\sqrt{2\pi} \sigma' \bar{r}\} \cdot [-\{K \log(\bar{r}/R)\}^2/(2\sigma'^2)]$ だとして出発すれば median の分布は (5.3) に於て $\sigma = \sigma', R = R' \sqrt{\pi/(4 \log 2)}$ とおいたものになるから、そのことを用いれば本文の場合に帰する。

***** 従つて r_0 をデシベル値であらわせれば、 $K \log r_0 = 20 \log_{10} r_0$ でこれの分布はガウス型である。

$$= 1 - \frac{K}{\sqrt{8\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{2\sigma^2}{K^2}\right\} f\left(e^{-\frac{4\sigma^2}{K^2}} \frac{r^2}{R^2} \log 2; \frac{K}{\sqrt{8}\sigma}\right) \dots\dots\dots (5.7)$$

(4.4) の近似式を用いれば

$$F(r) \sim 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\tau_0}} \exp\left\{-\frac{K^2}{8\sigma^2} \tau_0(\tau_0-2)\right\} \left. \begin{array}{l} \\ \text{(但し } \tau_0 \text{ は } e^{\tau_0}/\tau_0 = -\frac{4\sigma^2 r^2 \log 2}{K^2 R^2} \text{ の解)} \end{array} \right\} \dots\dots\dots (5.8)$$

この L 分布の平均値は (5.6) から

$$\begin{aligned} \langle r \rangle &= \frac{RK}{2\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{\log 2}} \int_0^\infty \sqrt{t} f\left(t; \frac{K}{\sqrt{8}\sigma}\right) dt, \quad (3.1) \text{ により} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\log 2}} R \exp\left\{\frac{\sigma^2}{2K^2}\right\} \end{aligned}$$

分散も同様にして

$$\text{var } r = \left(e^{\frac{\sigma^2}{K^2}} - \frac{\pi}{4}\right) R^2 e^{\frac{\sigma^2}{2K^2}} / \log 2$$

と計算される。

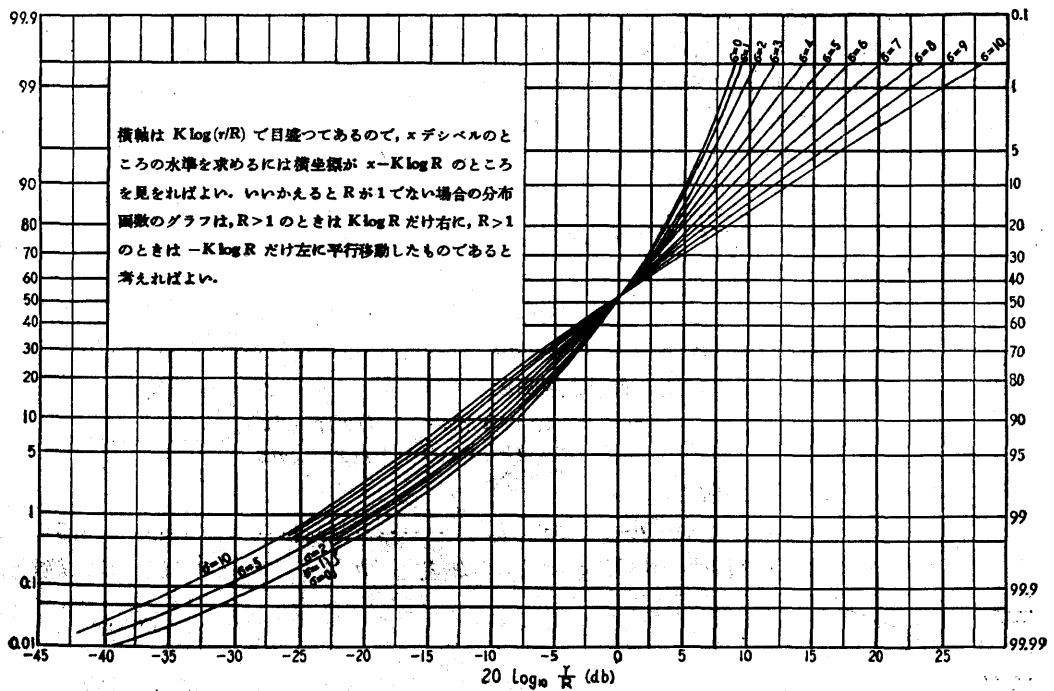
また r が L 分布に従うとき r のデシベル値 $v = K \log r$ の従う分布の密度函数は (5.6) から直ちに

$$f(v) = \frac{\log 2}{\sqrt{2\pi}\sigma R^2} \exp\left\{\frac{2v}{K}\right\} f\left(e^{\frac{2v}{K}} \frac{\log 2}{R^2}; \frac{K}{\sqrt{8}\sigma}\right)$$

従つてデシベル値の平均は

$$\langle v \rangle = \langle K \log r \rangle \quad (5.6)$$

ここで $\langle \dots \rangle_{(5.6)}$ は (5.6) による期待値をあらわす。これは (3.2) により



第 5 図

$$\langle v \rangle = \frac{1}{2} K (\Gamma'(1) - \log \log 2) + K \log R$$

となり σ に無関係である。これはまた Reighleigh 分布の median r_0 のデシベル値の長時間統計に於ける平均 ($=K \log R$) よりも一定の常数 (約 0.9151 デシベル) だけ常に小さいことをあらわしている。

種々の σ に対して (5.7) を (5.8) により計算したのが第5図である。

ついでに雑音を問題にするときに必要になる r の逆数 $u = 1/r$ の分布函数は r が L 分布のとき

$$\frac{K}{\sqrt{2\pi} \sigma} \exp \left\{ -\frac{2\sigma^2}{K^2} \right\} f \left(e^{-\frac{4\sigma^2}{K^2} \log 2} \frac{\log 2}{R^2 u} ; \frac{K}{\sqrt{8}\sigma} \right)$$

密度函数は

$$\frac{K \log 2}{\sqrt{2\pi} \sigma R^2 u^2} f \left(\frac{\log 2}{R^2 u^2} ; \frac{K}{\sqrt{8}\sigma} \right)$$

この分布の平均は

$$\langle u \rangle = \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle_{(5.8)} = \frac{\sqrt{\pi} \log 2}{R} \exp \left\{ \frac{K^2}{2\sigma^2} \right\}$$

u の二次以上の積率は存在しない。

6. コロイド統計に於ける応用

うすいコロイド溶液を容器に入れて、平衡状態に到達させた時の高さによる濃度の変化をあらわすものとしては Perrin の公式が知られているが、これはコロイド粒子をすべて同一の大きさのものとして取扱っている。****実際には大低のコロイド粒子は粒度分布をもっており、大きい粒子程低い所にいる公算が大きい。また容器の上の方程粒度が揃つていられるから、静置法による精製が行われるが、以下このことに対する勘定をしてみる。

今粒子間に相互作用はないものとする、平衡状態に於ては

$$n_{xh} = P_{xh} n_x \dots\dots\dots (6.1)$$

が成立つと考えられる。ここで n_{xh} は容器内の底からの高さが h と $h + \Delta h$ の間のうすい layer の中に存在する大きさが x と $x + \Delta x$ の間の粒子の個数、 n_x は大きさが $x \sim x + \Delta x$ との間の粒子個数、 P_{xh} は大きさが $x \sim x + \Delta x$ の一つの粒子が $h \sim h + \Delta h$ に存在する確率 (これは x と h にだけ依存するとする) である。****

コロイド粒子の粒度分布の密度函数を $f(x)$ 、高さ h に於ける濃度を $C(h)$ 、高さ h に於ける粒度 $x \sim x + dx$ のものの濃度を $C(x; h) dx$ 、粒子の全個数を N 、容器の断面積を S とし $P_{xh} = p_{xh} dh$ とすれば (6.1) は

$$C(x, h) = (N/S) f(x) p_{xh} \dots\dots\dots (6.2)$$

$$C(h) = (N/S) \int f(x) p_{xh} dh \dots\dots\dots (6.3)$$

高さ h のところに於ける粒子の粒度分布の密度函数を $f(x, h)$ とすると

$$f(x, h) dx = \frac{n_{xh}}{n_h} = \frac{C(x, h) dx}{C(h)} = \frac{f(x) p_{xh} dx}{\int f(x) p_{xh} dx} \dots\dots\dots (6.4)$$

ところでコロイド統計の教える所によれば

$$P_{xh} \propto \exp \{ -(\rho - \rho_0) xgh / (kT) \} \dots\dots\dots (6.5)$$

(ρ 及び ρ_0 は夫々粒子及び溶媒の比重、 g は重力の加速度、 h はボルツマン常数、 T は絶対温

**** 濃度からコロイド粒子の定義を与えたものとして、 牟田明徳：コロイドの大きさの限界について 昭和 24 年 4 月 日本化学会年会講演

**** 粒子が独立に自由に動きまわるとき上記のような個数配置が起る確率は $\Pi \Pi (n_{xh}! n_{xh}!) P_{xh}^{n_{xh}}$ となるが、統計力学で行うように平衡状態に於てはこの確率が最大値に近いと考えて計算しても (6.1) なる結果に到達する。

度) 容器の高さを H とすると

$$p_{zh} = A x e^{-A x h} / (1 - e^{-A x H}) \dots\dots\dots (6.7)$$

但し $A = (\rho - \rho_0)g / (kT)$

Monodisperse, 即ち $f(x) = \delta(x_0 - x)$ としたときは (6.3), (6.5) から $C(h) \propto e^{-A x_0 h}$ となるが, これは Perrin の法則である.

ところでコロイド粒子の粒度分布として代表的なものは Hatch-Coate 型 (対数正規型) である. 膠質黒鉛, カーボンブラックについては, 筆者もこの型が非常によく適合することを経験している***** すなわち, 密度函数は

$$f(x) = (1 / (\sqrt{2\pi} \sigma x)) \exp \{ -(\log x - \mu)^2 / 2\sigma^2 \} \dots\dots\dots (6.8)$$

である.

もしも H が非常に大きく $p_{zh} = A x e^{-A x h}$ と見做し得れば, (1.2) により

$$\int_0^\infty f(x) p_{zh} dx = \frac{A}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{\mu} f(e^{\mu} A h; 1 / \sqrt{2\sigma^2}) \dots\dots\dots (6.9)$$

(6.8) の分布の median \bar{x} は e^{μ} であるから, これを用いて (6.3) より

$$C(h) = (N A \bar{x} / (\sqrt{2\pi} S \sigma)) \cdot f(A \bar{x} h; 1 / \sqrt{2\sigma^2}) \dots\dots\dots (6.10)$$

粒度が \bar{x} のもののみからなる系, 即ち粒度分布の密度函数が $\delta(x - \bar{x})$ のものの濃度を $C^*(h)$ とすると

$$C(h) / C^*(h) = (1 / \sqrt{2\pi\sigma^2}) \exp \{ A \bar{x} h \} f(A \bar{x} h; 1 / \sqrt{2\sigma^2}) \dots\dots\dots (6.11)$$

これは常に 1 より大きい. 何故なら 3. の密度函数は α を固定した時 α に関して単調減少で (3.3) により $\alpha \rightarrow \infty$ のとき指数型になるからである. 従つて median size をつかつて Perrin の法則により濃度を estimate すれば実際よりも underestimate になつていくことがわかる.

次に高さ h の所に於ける粒子の粒度分布は (6.4), (6.9) から

$$f(x, h) = \exp \left\{ -\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2} - A x h - \mu \right\} / f(e^{\mu} A h; 1 / \sqrt{2\sigma^2}) \dots\dots\dots (6.12)$$

高さ h の所の平均粒度 $\bar{x}(h)$ は (6.12), (1.2) から

$$\bar{x}(h) = \int_0^\infty x f(x, h) dx = e^{\mu + \frac{3}{2}\sigma^2} f(e^{\mu + \sigma^2} A h; 1 / \sqrt{2\sigma^2}) / f(e^{\mu} A h; 1 / \sqrt{2\sigma^2}) \dots\dots\dots (6.13)$$

$e^{\sigma^2} > 1$ だから (2.14) から $d\bar{x}(h) / dh < 0$ 従つて高い所ほど平均粒度が小さくなることが証明されたことになる.

高さ h の所の粒度分布の分散は

$$\begin{aligned} \text{var } x(h) &= e^{2\mu + 4\sigma^2} f(e^{\mu + 2\sigma^2} A h; 1 / \sqrt{2\sigma^2}) / f(e^{\mu} A h; 1 / \sqrt{2\sigma^2}) \\ &\quad - e^{2\mu + 3\sigma^2} \{ f(e^{\mu + \sigma^2} A h; 1 / \sqrt{2\sigma^2}) / f(e^{\mu} A h; 1 / \sqrt{2\sigma^2}) \}^2 \dots\dots\dots (6.14) \end{aligned}$$

ところで (1.7) を用いて $d\bar{x} / dh$ を計算すると

$$\frac{d\bar{x}(h)}{dh} = -A \text{var } x(h) \dots\dots\dots (6.15)$$

なる関係があることがわかる. 従つて我々の場合には (2.14) の証明を必要とせずに $\bar{x}(h)$ の単調減少性はわかる. (variance が正ということから!)

更に
$$\frac{d \text{var } x(h)}{dh} = -A \langle (x(h) - \bar{x}(h))^3 \rangle \dots\dots\dots (6.16)$$

なる関係も確めることが出来る. しかし平均のまわりの三次の積率をで微分しても平均のまわりの

***** 樋口: 統計数理研究所集報 2巻1号,

I. Higuti: Ann. Inst. St. Math. Vol v No. 2, A. Muta & I Higuti: ibd. Vol vi No. 2.

四次の積率には比例しない。

Acheson Aqua Dag (米英製) とか Hitasol (日立化工製) などの名で市販されている膠質黒鉛の大きさの order の数値で常温 (15°C) に於ける高さを指定したときの平均粒度を (6.13) により勘定してみると次のようになる。

$\mu = -4.8$ ログ立方ミクロン $\sigma = 2$ (即ち平均 0.06 立方ミクロン標準偏差 0.45 立方ミクロン) のものでは

$h = 1 \text{ cm}, 10 \text{ cm}, 100 \text{ cm}$ で $\bar{x}(h)$ は夫々 1.2×10^{-4} , 9.0×10^{-6} , 3.0×10^{-6} (立方ミクロン) となり

$\mu = -4.8$ ログ立方ミクロン $\sigma = 1.5$ (平均 0.025 立方ミクロン標準偏差 0.074 立方ミクロン) では $h = 1, 10, 100 \text{ cm}$ で夫々 2.3×10^{-3} , 3.7×10^{-4} , 1.8×10^{-4} (立方ミクロン) となる

実際には仲々このように沈降しない。分散媒の作用やわずかな温度差による対流が本質的な役割をしているので、このように純統計力学的な簡単な計算だけでは間にあわない。***** しかし条件がととのつた時の限界値としてこのような計算は強ち無意味でもなからう。殊に粒度が一様でないことは非常に現象にひびく筈であるということを知ることは重要であろう。

7. 結 び

以上対数正規変数の Laplace 変換について、うわすべりにわかつたことを羅列したに過ぎないが、この題目はただ漫然とつくつた函数ではなく、理論的にも実際的にも意味のあるものにつながっているように思える。

1) 通信工学に於て多中継回路の design をする際に、分布の 99% 値とか 1% 値とかいう所が問題になつてくるので、デシベルガウス型や 5. で述べた L 型分布など一連の分布の畳み込みの正確な計算が要求されている。これ等は我々の題目のもつとつた研究により解決される。

2) 一般に高分子以上の大きさの粒子集団をあつかう場合、従来の統計力学と組合わせようとすると $\exp\{-\text{energy}/kT\}$ が出てくるから題目の函数におつつかるであろう。しかし高分子以上の大きさの粒子現象では通常媒質の熱振動とのつりあい以外の力が本質的な役割を占めるのではなからうか。そうすると根本的に新しい統計方法を考えねばならないが、差しあたつて、コロイド科学の盛んであつた往時に比べて実験の精度が増した今日、更に多くのことにあたつてみることは問題のあり家をさぐることにもなるだろう。

3) 対数正規型も指数型も共に自然界によくあらわれる統計分布であるがその合成がうまく初等函数であらわせないことの根源は、その生いたちの本質的なちがひにあるので確率論的にもつと出発点に立ちかえつて考えるべき問題を含んでいる。(累加のプロセスと累乗のプロセスとのサケ目がひしひしと感ぜられる。)

以上のような理由により今後の研究の備忘のために未完成のまま、つまらぬことも一応書きとめておこうと思つたまでである。

電気通信研究所の奥村善久氏には通信工学の実際面に関して種々教わり作図の御厄介になつた。また、日立中研牟田博士、通研 森田氏、統数研 鈴木(雪)、横田、赤池の諸氏にそれぞれ部分的に討論と御意見をいただいた。感謝の意を表す。また数値計算の大部分は吉田薫嬢に、一部分は横山玲子嬢に負うものである。(統計数理研究所)

***** 温度差の効果を入れた計算としては、佐々木達治郎：コロイドの浮游理論 (未発表)

参 考 文 献

- G. DOETSCH: Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation.
E. F. BURTON: The Physical Properties of Colloidal Solutions.