

# Tromp-Curve 解析に関する注意

樋口 伊佐夫

(1955年10月受付)

## Notes on Tromp-Curve Analysis

Isao HIGUTI

Many engineers of coal mining in Japan are making use of Tromp-curve analysis. But some of them seem to misunderstand the true meaning of that analysis. We, therefore, intend to clarify the statistical character underlying in it.

Institute of Statistical Mathematics

日本の選炭技術者の間でも Tromp 曲線\* による解析が行われているようであるが、その中にあらわれる Gauss 分布曲線に似た曲線が禍いしてか統計的解釈が混乱しているのではないかと思われる\*\*。そこで解析の統計的性格を明かにすることは実際家のために何らかの役に立つだろう。

ここでは原炭が精炭と廃石との二種類に分けられる場合だけを考える。二号炭を取出すような場合にも機構に応じて考えを拡張すればよい。

選炭機の優劣をきめる要素はいうまでもなく、精炭の歩留りと品質及び石炭の損失であろう。しかしこれ等は互いに絡み合いしかも用いる原炭の組成に依存するから、或る選炭機は A なる炭坑には向くが、B には向かないということが起り得ると考えられる。選炭機の優劣は Tromp 曲線だけでは一概に決定するわけにいかない。Tromp 曲線にあまり頼り過ぎないようにということを警告したい。

### §1. Tromp 曲線と確率との結びつき

実験値は次のようであるとする。

比重区分	$\rho_1$	$\rho_2$	.....	$\rho_i$	.....	$\rho_n$
原炭の重量	$a_1$	$a_2$	.....	$a_i$	.....	$a_n$
廃石の重量	$b_1$	$b_2$	.....	$b_i$	.....	$b_n$

比重区分  $\rho_i$  とは  $\rho_i - \frac{1}{2}\Delta\rho \sim \rho_i + \frac{1}{2}\Delta\rho$  (但し  $\rho_{i+1} - \rho_i = \Delta\rho$ ) を意味する。 ( $i=1, 2, \dots, n$ )

廃石とは選炭機を出るときに原炭から除去するものことである。

Tromp 曲線は  $b_i/a_i$  を比重  $\rho_i$  に対して plot したものを結んだものである。

以下粒子の個数は非常に大であるとして、全体の粒子の中である属性 A をもつ粒子の個数の割合と全体の中から任意の一個を at random に選んだときそれが A をもつ確率とが等しいと考える。

原炭の全個数 :  $N$

\* K. P. Tromp : Notion of Probability in Coal Washing. Some Notes on Frequency Curves of migrated material (Revue de L'industrie minerale) (1950 p. 64)

\*\* 例えば、高原良一 選炭第7号 376頁

原炭の中で比重が  $\rho - \frac{1}{2}\Delta\rho \sim \rho + \frac{1}{2}\Delta\rho$  の間にあり且つ容積が  $v - \frac{1}{2}\Delta v \sim v + \frac{1}{2}\Delta v$  の間にあ  
 るような粒子の個数 :  $Nf(\rho, v) \Delta\rho\Delta v$

( $f(\rho, v)$  は二変数の確率密度函数の意味をもつ)

比重  $\rho$  で容積  $v$  なる一つの粒子が選炭機を出て来る時廃石の中に入つて来る確率 :  $p(\rho, v)$

(これは用いる原炭組成による場合も多いであろうが, ここでは一応それに無関係で, ただ機械  
 とその操作法のみ関係すると考える.)

廃石として出て来る粒子の個数 :  $N \int_0^\infty \int_0^\infty f(\rho, v) p(\rho, v) dv d\rho$

その重量 :  $N \int_0^\infty \int_0^\infty \rho v f(\rho, v) p(\rho, v) dv d\rho \iff \sum_{i=1}^n b_i$

( $\iff$  は最初に書いた実測値との対応を示す.)

Tromp 曲線 :

$$T(\rho) = \frac{N\Delta\rho \int_0^\infty f(\rho, v) p(\rho, v) v \rho dv}{N\Delta\rho \int_0^\infty f(\rho, v) v \rho dv} \iff \frac{b_i}{a_i}$$

$$= \frac{\int_0^\infty p(\rho, v) v f(\rho, v) dv}{\int_0^\infty v f(\rho, v) dv}$$

この式から明かな如く, 一般に  $T(\rho)$  は原炭組成  $f(\rho, v)$  に依存する. しかしもしも  $p(\rho, v)$  が  
 $v$  に関係しないならば, 即ち 比重  $\rho$  の粒子が原炭から除去される確率が, 粒子の大きさや他の  
 粒子に関係しないならば それを  $p(\rho)$  とすると  $p(\rho, v) = p(\rho) \dots\dots\dots(1)$   
 だから  $T(\rho) = p(\rho)$  となる. 従つてこのような場合に限つて Tromp 曲線は選炭機とその  
 操作法にだけ依存し, 選炭機の特性をあらわすものとして優れている. しかし東大今泉助教授の研究  
 から明かな如く, \*\*\*湿式サイクロンでは分離が粒度に関係するから成立たないし, 他の場合で  
 も原炭組成に依存するようである.

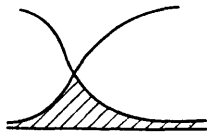


Fig. 1

$T(\rho)$  曲線が Gauß 又は対数 Gauß 曲線に似ているからといつて  
 これを分布曲線であると考えたり  $1-T(\rho)$  と  $T(\rho)$  のグラフを図 1  
 の如くつないで確率密度曲線だとすることは誤りである. 確率偏差  
 (écart probable) なども実際の確率とは関係はない. こういう言葉が  
 技術者に判断を誤らせる原因になつていよう思う.

§2. 歩留り, 精炭品質

立ち入つた議論は差控え, いくつかの量とその数量的意義とを記す.

目的の分離比重を  $\rho^*$  とする; 即ち  $\rho^*$  以下のものは精炭,  $\rho^*$  以上は廃石と予め指定されている  
 ものとする.

又  $\rho \int_0^\infty v f(\rho, v) dv$  を  $g(\rho)$  であらわす.  $g(\rho)$  は比重  $\rho$  なる原炭粒子の平均重量である.

i) 精炭であるべきものが廃石中に迷込む量 :  $N \int_0^{\rho^*} \rho d\rho \int_0^\infty dv p(\rho, v) f(\rho, v) v \iff \sum_{i=1}^{i^*} b_i$   
 (但し  $\rho_{i^*} = \rho^* + \frac{1}{2}\Delta\rho$ )

(1) が成立つならばこれは

\*\*\* 今泉常正 湧式サイクロンの分離性について 日本鉱業会誌, 第70巻 第797号

$$N \int_0^{\rho^*} p(\rho) g(\rho) d\rho \text{ となる.}$$

ii) 廃石であるべきものが精炭に入り込む量 :

$$N \int_{\rho^*}^{\infty} \rho d\rho \int_0^{\infty} dv (1-p(\rho, v)) f(\rho, v) v \Leftrightarrow \sum_{i=i^*+1}^n (a_i - b_i)$$

iii) 迷込み総量 (上記 i) と ii) の和) の原炭の全重量に対する割合は一種の誤差率と考えられる。(但し確率誤差ではない)

iv) 原炭中の一つの粒子が迷込む確率

$$\int_0^{\rho^*} d\rho \int_0^{\infty} dv p(\rho, v) f(\rho, v) + \int_{\rho^*}^{\infty} d\rho \int_0^{\infty} dv (1-p(\rho, v)) f(\rho, v).$$

これは  $a_i, b_i$  では計算出来ない。

v) 歩留り :

$$\frac{\int_0^{\rho^*} \rho d\rho \int_0^{\infty} dv (1-p(\rho, v)) f(\rho, v) v}{\int_0^{\infty} \rho d\rho \int_0^{\infty} dv f(\rho, v) v} \Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^n (a_i - b_i)}{\sum_{i=1}^n a_i}$$

vi) 迷込みによる損失: これは生産者の立場と消費者の立場とで異なる。同じ迷込みの中でも  $\rho^*$  に近いものはあまり問題にならないことを考慮に入れると 一般に weight  $w_1, w_2$  をつけて

$$\varepsilon_1 = \frac{\int_0^{\rho^*} \rho d\rho \int_0^{\infty} dv p(\rho, v) f(\rho, v) v w_1(\rho, v)}{\int_0^{\infty} \rho d\rho \int_0^{\infty} dv p(\rho, v) f(\rho, v) v}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\int_{\rho^*}^{\infty} \rho d\rho \int_0^{\infty} dv (1-p(\rho, v)) f(\rho, v) v w_2(\rho, v)}{\int_0^{\infty} \rho d\rho \int_0^{\infty} dv (1-p(\rho, v)) f(\rho, v) v}$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$  は夫々生産者危険率。消費者危険率に対応するものであつて、もしも  $w_1, w_2$  及び  $p$  が  $v$  に無関係ならば

$$\varepsilon_1 \Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^{i^*} b_i w_{1i}}{\sum_{i=1}^n b_i} \quad \varepsilon_2 \Leftrightarrow \frac{\sum_{i=i^*+1}^n (a_i - b_i)}{\sum_{i=1}^n (a_i - b_i)}$$

となる。

原炭の組成  $f(\rho, v)$  に応じて歩留り  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  をにらみあわせて機械の操作法を決定することが実際的な問題である。imput の  $f(\rho, v)$  が時間的に変化してゆく場合は問題は複雑になるが同一の炭坑ではほぼ一定とみなされる。

“分離比重” というものが問題になるようであるが原理的にも考えにくいし、実際的にもあまり重要でないように思う。  $T(\rho) = \frac{1}{2}$  なる  $\rho$  を**実際**の分離比重だと定義してもよいが、これは単に定義である。今この値を  $\rho^{**}$  とする。  $\rho^{**}$  は  $T(\rho)$  曲線と  $1-T(\rho)$  曲線の交点に対応する  $\rho$  であるが、二種類の迷込みの曲線、即ち

$$N\rho \int_0^{\infty} dv p(\rho, v) f(\rho, v) v \Leftrightarrow b_i \text{ と, } N\rho \int_0^{\infty} dv (1-p(\rho, v)) f(\rho, v) v \Leftrightarrow a_i - b_i \text{ との交点も}$$

$$T(\rho) = \frac{1}{2} \text{ をみたまう。}$$

$\rho^*$  と  $\rho^{**}$  とが一致していなければ、図 2, 3 の如くなるから、一見一致している場合に比して迷込み量は大きいように見えるが、 $\rho^{**}$  を  $\rho^*$  に一致させるように作動させれば迷込みがより少くなるということは保証出来ない。

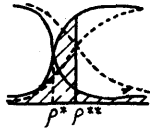


Fig. 2

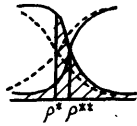


Fig. 3

(図の点線の如くなるかも知れないから)

とに角迷込みというのは実際分離比重  $\rho^{**}$  を基準に考えるべきでなく指定された  $\rho^*$  を基準に考えなければ不合理である。

最後に分級 (sizing) の場合には  $\rho$  と  $\nu$  とが位置を交替するだけであることを附言しておく。

### §3. 誤りの原因となつた見かけの誤差曲線

最初に述べた如く  $T(\rho)$  が誤差積分に似ていることから解釈の混乱が生じているらしいが、その現象は大略次のように理解出来るよう。

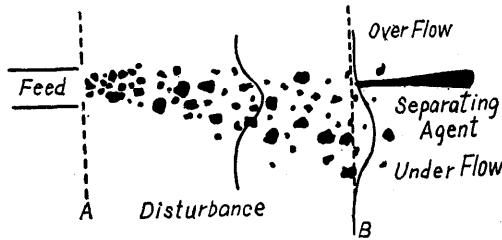


Fig. 4

Jig や重液選炭は Feed→拡乱→分離という過程をたどるから、今図のような簡単な model を考える。先ず同じ比重  $\rho$  の粒子群だけを考える。Aに於いて上下の位置の分布が一様であつた粒子群は拡乱によつて次第に Gauss 分布に近い分布をもつようになる。(一種の Diffusion が起るからである) それと同時にもしも  $\rho$  が用いる液の比重  $\rho^{**}$  より大きいなら平均的にだんだん下に落ちて来るし逆の場合はだんだん上

つて行く。その状況は比重にだけ関係して容積に関係しないとする。Bでは粒子の高さ  $h$  の分布は密度関数が  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(h-\mu)^2}{2\sigma^2}}$  の形に近くなる。Bで高さ  $h_0$  のところで分離されるとすると、比重  $\rho$  の粒子群で underflow に入る粒子の割合は

$$\int_{-\infty}^{h_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(h-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dh = \int_{-\infty}^{\frac{h_0-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$= \int_{\alpha}^{\rho} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\mu-h_0)^2}{2\sigma^2}} \frac{d}{d\rho} \left(\frac{h_0-\mu}{\sigma}\right) d\rho$$

(但し  $\alpha$  は  $\frac{h_0-\mu(\rho)}{\sigma(\rho)} = -\infty$  となる  $\rho$ .)

$\mu$  や  $\sigma$  が  $\rho$  に関係する仕方は種々の場合で異なるかも知れないが、主としては  $\sigma$  は拡乱にだけ関係し  $\rho$  に関係せず  $\mu$  は  $\rho$  の単調減少函数であることが想像される。  $\mu(\rho) = -K_1\rho + K_2$  ( $K_1 > 0$ ) という形なら  $T(\rho)$  はガウスの誤差積分になり、  $\mu(\rho) = K_3 \log \frac{1}{\rho}$  ( $K_3 > 0$ ) なら対数正規型の分布函数になる。  $\mu$  は上下に無限にひろがる拡乱の場を考えているから  $(-\infty, \infty)$  の範囲にわたるのに  $\rho$  は正の量だから  $\log$  変換で移る場合(後者)の存在が考えられる。しかしこれだけでは勿論何故こうなるかの説明にならない。これには種々の拡乱に対してくわしい議論が必要であるが、それに耐えるだけの精密な data も手もとにないので又更めて論じたい。ここでは  $T(\rho)$  が確率に対応しないが分布函数の形をとることの説明をしたまでである。

最後に本稿を草する際に筆者の如き全くの素人に選炭機に関して懇切に御教え下さつた工学博士 児玉八郎氏に感謝する次第である。

(統計数理研究所)