数量化理論の応用例

——予測の判断的中率と相関比 η との関係についての一つの考察と共に——

林　知　己　夫

(1954 年 2 月受付)

Examples of the Theory of Quantifcation

Chikio HAYASHI

In the present paper the applications of the theory of quantification to analysis of social phenomena are described.

Three examples are shown; (i) decision of status of persons—quantitative representation of the judgements of experts, (ii) prediction of behaviour of persons by social and cultural factors, (iii) prediction of personality of child by the home education he received.

The theoretical parts of this method are described in the following papers: C. Hayashi, Multidimensional quantification Ⅰ, Ⅱ, Proceedings of the Japan Academy, vol 30, No, 2, 3, 1954; C. Hayashi, Multidimensional quantification—with the applications to analysis of social phenomena, Annals of the Institute of Statistical Mathematics, vol. Ⅴ, No. 2, 1954.

Furthermore, the relation between success rate of prediction and correlation ratio is discussed and the meaning of taking generalized variance as a measuse of dispersion is considered.

ここでは数量化理論を実際現象解明に応用した例についてのべてみる．このやうな応用例があつて始めて理論の構造が理解されやすいものとなり，又その応用分野（方法）も明らかになるものと考へ，ここに記する次第である．ここで述べた理論は，Multidimensional quantfication Ⅰ, Ⅱ, Proceedings of the Japan Academy, No 2, No 3, vol 30, 1954 又は Multidimensional quantification,—with the applications to analysis of social phenomena, Annals of the Institute of Statistical Mathematics, vol Ⅴ, No. 2, 1954 に記述したものである．したがつて数式等については全く説明をしない．

ここで少し数量化の考へについて述べておこう．数量化と言ふことも現象の予測と言ふことと関聯させて考へてくる必要がある．現象の予測を行ふに当り，一つには im kleinen（広義に解されたい，局限された場においての意味をも含む）に構造を抽象し，単純化，形式化し，ストカスティックな微(積)分方程式，或は階差方程式の形にもちこみ，或は電気的なアナローグによつて問題を解明しようとする立場がある．この方法によるととりあげる要素は比較的簡単であり，複雑な現象パタンを問題にせず大きく筋を通す考へ方である．しかしこれが有効であるのは社会現象のみならず，社会的場における自然現象の場合少いのではないかと思はれる．勿論大局的にみた場合この方法が妥当な場合もあることは疑ひを入れない．一方現象を解明するとき複雑な条件を考へに入れ，行動のダイナミックなパタンを考へに入れて逐次的に一歩一歩予測を行はうとする立場がある．これにおいては操作的立場から如何に妥当な調査を行つて現象を調べてゆけばよいか，この様にして得ら

れる多相多元現象を如何に表現し（数量化し），如何に分類（予測）を行つてゆくか．この三つの点が重要な意味をもつてくるのである．如何に現象を formulate し，この中にメトリックを入れ，これを綜合してゆくかが中心問題となるのである．自づと前者の予測方法と理論の発展方法を異にすることになるのである．

社会現象の取扱ひに関しては後者を主軸として，前者を参考にしつつ進めるのがよいのではないかと思はれる*．さて数量化の根本の考へに触れてみよう．

現象の分析にあたつて我々が帰納的立場をとつて，条件分析から現象の予測の問題をとりあつかふに際しては，多元多相的なパタンをもつものの表現とその分類の問題が中心問題となつてくるものである．表現とは現象の複雑性を操作的立場**から科学的に index 化して把へることであり，分類とは現象のカテゴリー化（即ち予測）を意味するものである．

この分類とは我々の行為の有用な指針として科学的方法の究極の目的と言つてよいものである．予測に絡めた数量化の問題をとりあつかつてゆくのである．

数量化はあるものに数量をあたへることである．特に定性的なものに数量をあたへてゆくことである．所謂実態的立場に立つて**数量を見出す**ことではなく，操作的立場において**数量をあたへて**ゆかうとするものである．ここが大切なところである．数量は実際的な目的に応じてあたへるものであつて，目的と相対的な関係にあり，妥当性と言ふことが極めて大切なことになるのである．つまり，操作的立場をとつて機能的に数量をあたへるのである．妥当性とは「現象の解明には何を知ることが肝要であるかを考へ，その知らうとすることを正に知り得られるようにすること」であり，また我々の目的とする「現象予測の精度の高い」ことを意味するのである．

実態的なものそのものを全面的に我々は数量化して把へようとするのではなく，一つの予測しようとする，或は狙ふ面を限つて，それを量的に取扱はうとするのである．非合理（これは人々の手にとる単純な論理或は理論関係では説明の出来ないことを意味する）の相を豊富に示す人間現象全

---

* 所謂前者の理論によつて説明しようとする立場は，少くとも社会現象をとりあつかふ際，えてして次のやうなことになると考へられ，我々としては後者の立場をとつてゆくのである．理論をある仮想された條件の下につくりあげる．これを験証しようとするために，ある限定された場に於いて単純な実験を行ふ．これによつて理論がたしかめられたとする．しかしこれは全くその條件とその実験の操作のみによつて得られたものであるからその限りにおいてのみ解釈されねばならないのである．ところが確かめられると，これを限定されぬ我々の世界に理論を持ちこまふとする――條件そのものが絶えず我々の行動によつて変化させられる世界に．ここに問題があるのである．単純な実験の場合の條件設定は，我々の行動とは独立に変化させ又各條件に等しいウェイトを与へてゐることにも注意しなければならない．この條件に与へるウエイトも我々の世界なみに考へてゆかねばならないにも拘らず，斯くされてゐない場合も亦多いのである．したがつて我々が動かし同時に動かされる世界におけるダイナミックなもの（勿論條件をも含む），これに相当する條件を簡単につくり得ないことも多いのである．したがつて単純な実験における條件は我々の世界には存在しない虚構のものとなることも考へられる．複雑な條件を操作し，それによつてつくられる多相的多元的な理論（前者の立場の理論）をつくることは正にのぞましいのであるが，現在まであまり信用できるものは少い．我々としてはこれを考へてゆかねばならないのである．単純な理論を，制約された條件の下での簡単な実験で「験証された」として不当に拡大して適用してゐるものが多い現状である．我々としては，この方法を従とし，後の方でのべた，動かし動かされる世界，そしてまた條件にウエイトのついてくる世界での複雑なものの間の関係を把へ描写し，表現し予測を考へてゆかうとし，このための調査（それと共に，よく考へられた実験）をも行ふ．これらのためには如何なるデータを如何にそして又如何様にとらへてゆくか，これを如何に表現し，数量化し，予測をあたへてゆくかの過程をも含め，それらから結論を統計数理のいみで妥当性を以て紡いでゆく方法を検討することを主としてゆきたいのである．単純な概念的命題は妥当性の少いものであることを痛感する次第である．

この細目については，林知己夫「心理学研究に必要な統計的方法」，心理学講座，中山書店 1953 参照．

** 操作的，本来の operational な意味において用ふる．我々の行為（操作）を中心にものを考へてゆくのであり，ここをはなれて独り歩きする理論や解釈をみとめない立場である．実験やデータの処理もそれから出される結論もその操作の方法（過程）に依存するものであり，その限りにおいてみとめられるものと考へるのである．これが意味をもつためには目標の現実的決定（行為の立場から明らかなものであることは絶対必要），妥当性と言ふことが極めて大切なことになるわけである．

般を数量的に取扱ふことの困難さは恐らく明らかなことであらう．また単純な理論によつて割切つてゆかうとすることは透徹する心をもつならば更に不可能なのは言ふまでもない．後にものべるのであるが，予測しようとすること——これを我々は有限な排反的行動様式として我々の方法，技術において把へることが出来，且つこの様にしてのみ現象を取りあげてゆくのである．これは決して狭いことではない．我々の行動として決定される現実は，排反的有限なものとして把へうる（行為的立場から）ことが出来るものであるからである．人間の行動は同一時点に同時に二つのことをなし得ないのである．考へめぐらしてゐることは輻輳してゐようとも，行為として決断によつて現実化された行動様式そのものは範疇化し得るのであり，これを我々は問題にするのである．これを明確な操作的立場で組合はせて，現象を次の様な立場から解析してゆくことが出来る——，これが明らかにされるならば（これによつて始めて，これによつてこそ，これによつてのみ予測の現実的，直接的有用性が確保せられる）それを予測するために豊富な要因をとり，組みあげてゆくのである．非合理を非合理とみとめて，そのままに要因のパタンを取扱つてゆくのである．これは予測しようとすることは，鋭く，狭く，具体的に且つ単純に（行動様式として把へ得る事を意味する）その要因は複雑に把へてゆく立場をとつて始めて可能となるのである．

この有力な数量化はいままでの理論ではあまりかへりみられてはゐなかつたが，予測法と共に統計数理の極めて重要な領域を占めるものなのである．

これによると目的即ち「知らうとする事」を鋭く，具体的に明確にすれば，これに応じて態度，意見を数量的に表現することが可能となり，又いろいろの事の勘案から決定に至るプロセスも，目的が定まれば数量的関係においてとりあつかふことが出来てくるのである．

又勘と言ふやうなものもこれを分解して，数理的に把握し，特定の人の勘を多くの人の共有財産たらしめてゆくことも可能となるのである．

複雑なものを一応分解し，数量化しつつ綜合し，事象を操作的意味で再構成すると言ふ方法をとるのである．これによつて事象を操作的に明解にし，以て現実的に妥当な知識を我々に得しむることが出来てゆくのである．客観的な統計的操作によつて，定性的なものに重みをつけ距離をあたへてゆくことが出来，又予め数量があるもの* に対してはそれを新しい観点の下に再評価してゆくことが出来るのである．

数量化と言ふ事は以上の様な事を目標として，それならば如何にして数量をあたへる如き統計的操作を行つたらよいか，又実際に数量をあたへる考へ方をとつたらよいか，又，その具体的な数理的な形を導き，これをどう運用して，数量をあみだしてゆけばよいか等のことを考へてゆくことになるのである．

この数量化を行ふには，その全操作において——調査から結論までに亘る——次の様な性質，妥当性（**validity**），信頼性（**reliability**）伝達可能性＝客観性＝説得性(**objectivity**)，再現性（**reproducibility**），実際性（**adequacy**）を持たしめることが要求せられるのである．

数量化を行ふために，まづ調査（実験）を行はねばならない．このために調査法理論，実験法理

---

* あらかじめ数量が与へられてあつたとしても，これは数であると言ふ丈で意味をもたないのである．これを単純に数として操作したとしても妥当な結論を得ることは出来ない場合が多いのである．このやうな「数」として測定されたものも，我々の目的に応じて妥当な意味をもつやうに再評価（数量化——定性的なものと同様にあつかつて数量をあたへなほしてゆく）してゆかなければならない．「数」としてあたへられてゐてもこれは定性的な標識の場合と同様に考へ，単純に無制限に計算的操作を加ても意味が出てはこないのである．生のまゝの「数」に意味が与へられて，つまり再数量化されて，そこで始めて許さるべき妥当な操作がその数に対してなさるべきである．この点の注意は非常に大切である．あらかじめ測定結果が「数」で与へられた場合，却つて誤つた考へがおこりやすいので警戒しなければならない．「数」をみても常に操作を加へる時にその意味づけを考へて時に応じ定性的な場合と同様，数量化しなほす事を忘れてはならない．

これらの考へは佐々木達治郎氏の言はれる「スカラー量の統計」（本彙報，昭和28年度研究発表会アブストラクト，佐々木達治郎，統計数理研究所の研究方針に就てを参照）に通ずるものがある．

論の研究がおこなはれる必要がある．これは狭い意味のものではなく，サムプリング調査法に限らず，調査項目の検討にも及ぶものなのである．この段階の中にもの上述の性質を具備さすやうにつとめるのである．

さてこれらの資料から，数量化に於て実際的操作を行ふ立場は，求めてゐる事を統計数理的意味に於て信頼度高くしようとする立場である．このため，我々の数量化する行動に，所謂 optimum を狙ふ rational behaviour と言ふ事が考へられねばならない．これがある場合には相関比を最大にする，判断の的中率を最大にする，ある場合には安全性を狙ふ min.-max.（max.-min.）の下に思考するといふ形等々で現はれてきてゐるのである．

外的規準（outside criterion）があたへられた時行ふ数量化の問題の例を以下に論ずる．外的規準が与へられてゐる場合，注意すべきは何等かの意味で non-relative なものが存在するものでなければならない．規準が判断されるものとの対応(相対性)によつて変動するものであつては工合がわるいのである．このやうな場合，数量化されたもの＝我々の心の中の規準を数量であらはすことになるのである＝は予測の意味で性能の悪いものとなつて了ふのである．ここで述べる数量化の方法の直接的応用はこの対応性の場合の変容までをも考へに入れたものとはなつてゐないのである．non relative scale とは「ものの判断」の frame が判断される個々のものに依存しないこと，即ち判断されるべき個物の状態の一々によつて変化するものでないことを意味する．即ち判断規準 J は判断される個物 O_i とは無関係，$J(O_i)=J(O_j)$ なることを示す．$J(O)$ は O を判断するときの規準の frame を表すものとする．ある種の判断，特に比較判断ではこれは成立しないかもしれない．勿論この変容性ある場合も，更に分類の綜合操作によつて数量化の考へを用ひて解明してゆくことが出来るのである．

なほ以下の計算法は僚友赤池弘次氏によつて工夫され，田熊雅子嬢，三枝三重子嬢によつて遂行せられたものである．この計算法については稿をあらためて論ずる予定である．いづれにしてもこの計算は逐次近似によらねば不可能であるし，それには正に莫大な手間がかかるのであり——この手間のかかることはのぞき得ない——ここに新しい計算機の工夫が要請されてくるわけである．

§1 まづ前論文 Case 1 の場合について考へてみよう．これは前の論文にもあるやうに外的規準が一次元的世界にあるものである．

（i） 階層判定について

伊賀上野市において，国立国語研究所，統計数理研究所の協同研究によつて行はれた研究，「社会現象としてみた敬語現象の研究」の一部としてなされた資料である(この調査は主として島崎稔氏によつて行はれた)．これは上野市在住の人の“市における status (階層)”をきめようとする問題である．status はそれの成立する社会的場において始めて意味をもつ概念である．上野市における status は東京都における status とはならないのであつて，場との相対的関係にあるものである．我々が我々の立場から考へて上野市において個人の status をきめても一般にこれは上野市における status とくひちがひが生じてくるわけである．しかも status はその「場」における生活とは深い関係をもつものなのである．ことに敬語現象においてはさうであると考へられるのである．これを決定するために上野市の expert（よく事情に通じてゐる人）に判定してもらふより仕方がない．しかしその expert はすべての人について行ふわけにはゆかない，何とならばすべての市の人々に対して expert は同じ規準で判定できないからである——すべての人を同程度によく知つてゐないからである——．又サムプルを抽出したとしても市に万遍なく行きわたつてゐるサムプルのすべてをよく知らぬことも同様である．そこで市の中から町をいくつか抽出し，その町のサムプルについていく人かの expert に判定を要求したわけである．これは可能なことである．大きさを町に限るならば狭い所であるから expert はよく町の人々の事を知つてゐるからである．この expert の判定にはおそらく複雑な事情が考慮されてゐるであらう．

これを6段階にわけて判定させた．これを outside variable と考へるのである．これが一次元的性格をもつことは明らかである．status としての階層は一列にならばせ得るものであるからである（勿論最初にのべた $J(O_i)=J(O_j)$ の条件は必要）．さてこれを我々がとらへ得る要因から表現できないものであらうかと考へてみるのである．もしこれが可能となるならば我々にても把へ得る要因から，その市での expert の意見を予測することが出来ることになるわけであるからである．つまり外的要因を知り，「もしも expert がすべての市の人々をよく知つてゐて status を判定すれば‥‥となるであらう——さらに厳密に言へば，調査の時判定を行つた expert と同じ悉知度，方法，考へ方，によつてもしも判定を行ふならば得られるであらう——その status」を推定することになるわけである．この我々のとり得る要因として税金，職業，家の構へ，公職の履歴をとり，各を高い方から低い方へ6階級の分類を行つた．これらは調査票型式により人から容易にきき出すことが出来るのである．ただ職業については，社会学を専攻する島崎氏の社会学的立場より地位，職業，学歴を加味しての判定で6階段にわけたのである（これは我々の desk work より可能である）．このやうなものから expert の明確に表明されてゐない複雑な判断操作からの結果をいかに再現できるであらうかの問題となるのである．6段階では数も少くなり且つ判定の性質から言つて所謂 reliability が少いので二段階づつあつめてすべて3段階にした．かうすれば市民の各個人は expert の判定（outside variable）と各4つの調査項目における反応（response pattern）をもつこととなる．今全体についての結果を示すと次の通りになる．

		税金			職業			役員			家			判定		
		上	中	下	上	中	下	上	中	下	上	中	下	上	中	下
税金	上	15	0	0	5	9	1	2	11	2	9	5	1	9	6	0
	中		54	0	13	31	10	7	21	26	18	30	6	7	41	6
	下			47	1	20	26	3	14	30	6	31	10	3	19	25
職業	上				19	0	0	7	8	4	13	6	0	10	9	0
	中					60	0	3	28	29	17	37	6	8	43	9
	下						37	2	10	25	3	23	11	1	14	22
役員	上							12	0	0	7	5	0	5	6	1
	中								46	0	17	24	5	11	25	10
	下									58	9	37	12	3	35	20
家	上										33	0	0	14	09	0
	中											66	0	5	40	21
	下												17	0	7	10
判定	上													19	0	0
	中														66	0
	下															31

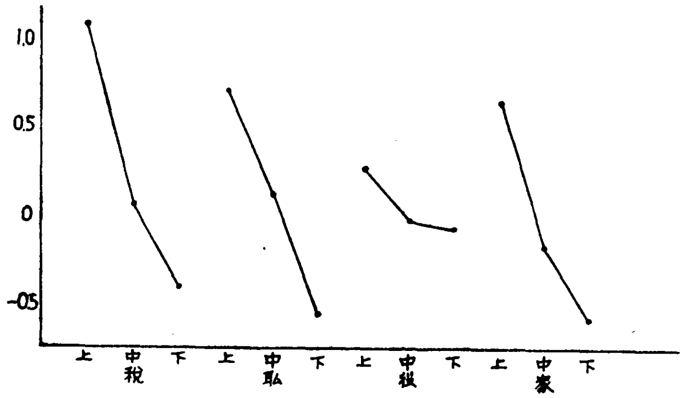
これより Case 1 の考へで x_{Jk} をきめ各個人の階層点を $\alpha_i=\sum\sum x_{Jk}\delta_{i(Jk)}$ によつてあたへて求めるのである．これは最初にのべた仮定により一応妥当である．かうすると弁別力をあらはす所の相関比は

$$\eta=0.71$$

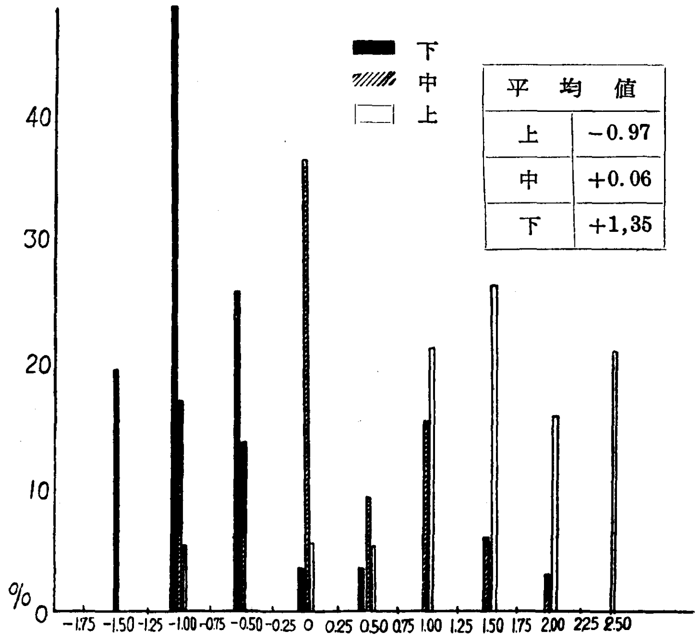
となり相当な予測力のあることが察せられる．これによつて得られた各項目の得点は

税			職			役			家		
上	中	下	上	中	下	上	中	下	上	中	下
1.066	0.056	−0.404	0.690	0.120	−0.550	0.265	−0.025	−0.035	0.640	−0.170	−0.580

となる．この間（上，下）の大きい順（有力な項目の順）は税(1.47)職業(1.24)家の構へ(1.22)，役員（公職）(0.30)で最後のものは利いてゐない．この上中下の利き方は直線的でなく次に示す様なものとなつてゐる．これらは上記要因の絡み合ひにおいて決定せられ，重みづけられたもので単独に要因を抽き出して論ずるのとは異つてゐる．



この得点を用ひ上中下の分布及び平均点を出すと．

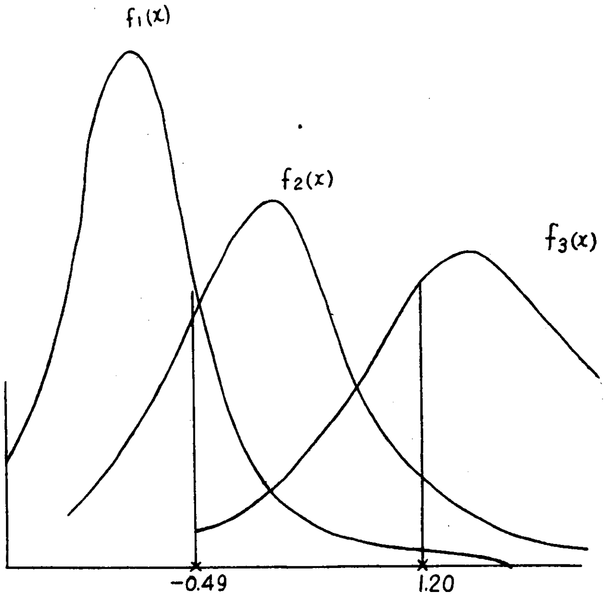


平均値	
上	−0.97
中	+0.06
下	+1,35

次に得点から上中下を分離する得点の境の点を求める．まづ max-min 理論を用ひて分点をきめると（この場合成判断的中率 $P=p_1\int_{-\infty}^{x_1} f_1(x)\,dx+p_2\int_{x_1}^{x_2} f_2(x)dx+p_3\int_{x_2}^{\infty} f_3(x)\,dx$，$x_1$，$x_2$ は夫々分点，$f_1(x)$，$f_2(x)$，$f_3(x)$ は夫々下，中，上における分布を示すものに相当する．近似的な密度函数を考へ $\max_{(x_1,\,x_2)}\min_{(p_1,p_2,p_3)} P$ より x_1，x_2 を求めること）

階　層	得　　点	成功率
上	$0.95 \leqq x$	73.6%
中	$-0.74 \leqq x < 0.95$	69.7%
下	$x < -0.74$	71.0%

となり全体的的中率は $p_2=0.707$ となる．又 p_1, p_2, p_3 として現在我々の得てゐる値を用ひ不連続のヒストグラムをなめらかな函数で近似したる後 $\partial p/\partial x_i=0$ より分点を求めると



上は 1.20 以上 $(x_2=1.20)$, 下は −0.49 未満 $(x_1=-0.49)$

となりいささか分点はことなる．これより P を求めると $P=0.716$ となる．いづれにてもこの様に数量化し，分点をきめて判別を行ふとその的中率は約 72％ となることを知る．この点数式の方法を用ひた判定と我々の行つた我々なりの主観的判定（上野市民についての上中下の status 判定）との関係をみると次の様になる．

Sample	得点による判定	我々の判定			Sample	得点による判定	我々の判定		
		I	S_l	S_b			I	S_l	S_b
1	中	下	下	上	13	下	下	中	下
2	中	中	中	中	14	下	下	下	下
3	上	中	上	上	15	中	中	下	中
4	下	下	下	中	16	下	下	下	下
5	上	下	下	中	17	上	中	上	上
6	中	中	上	中	18	中	中	下	中
7	上	上	上	上	19	中	中	上	中
8	中	下	中	下	20	上	中	上	中
9	中	下	中	中	21	中	下	中	下
10	下	下	中	下	22	中	中	中	上
11	中	下	中	中	23	中	下	上	中
12	中	上	中	中	24	中	上	下	中

この式による判定は多くの場合3人の中2人が一致した方に判定を行つたことになり，3人ともくひちがつた場合，或は上下とひどくくひちがつた場合はその中位が数量による判定になつてゐるのは興味深い．

（ii） これは統計数理研究所で行つた「国民性に関する統計数理的研究」の一部の結果である．この調査の細目については別にこれを述べる．ここではその第 30 問をとりあげてみる．

「日本の復興の為には，すぐれた政治家が出てきたら，国民がたがいに議論をたたかわせるよりは，その人にまかせた方がよい」という意見がありますが，あなたはこれに賛成ですか，それとも反対ですか？」

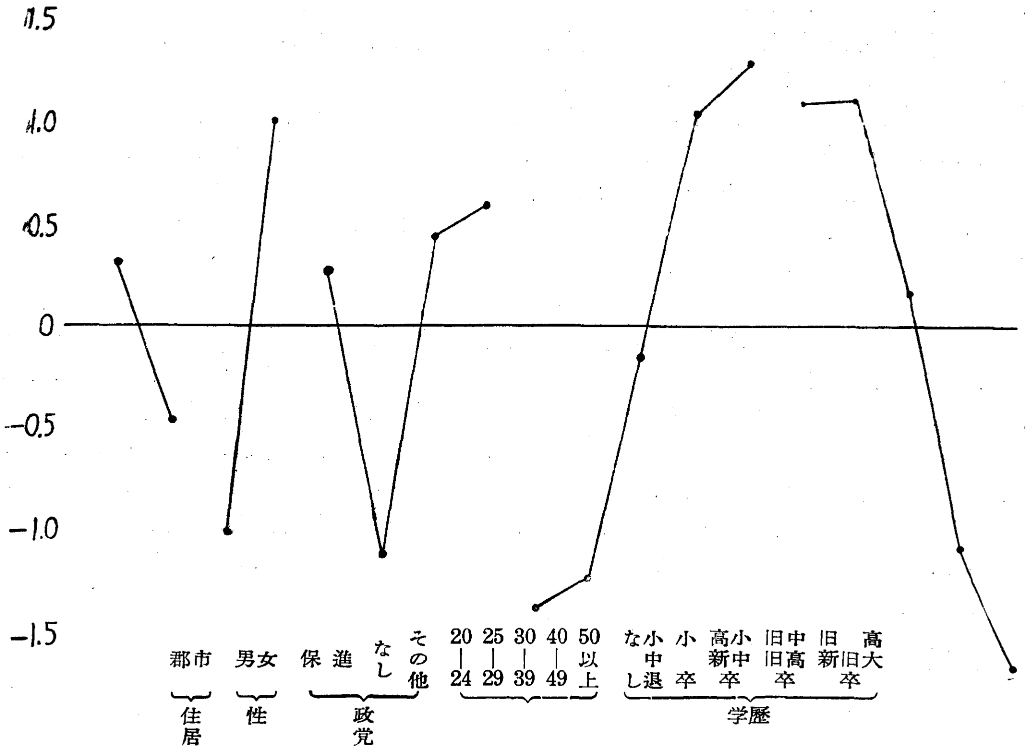
さてかうして3つの解答の肢，「賛成，中間，反対」の中どれかに反応することになるのであるが，この中のいづれへ人が回答するかをどの程度外的要因によつて決定してゆくことが出来るであらうか，つまり形式的要因からどの程度予測できるであらうか，これを解明しようと思ふのである．反応の3つの形を outside variable ととるのである．これが，解答の性質上一次元的であるのは明らかであらう．調査の結果が outside variable になるので $J(O_i)=J(O_j)$ は当然である．

これを決定するに用ひる要因として，住居（市郡），性（男女），年令（20～24，25～29，30～39，40～49，50以上），支持政党（保守党，進歩党，支持政党なし，その他），学歴（なし，小中退，小卒，高小・新中卒，旧中・新高卒，旧専・旧大・新大卒）をとりあげた．かかるものから $\alpha_i=\sum\sum x_{jk}\times\delta_i(jk)$ のシステムによつて x_{jk} を求めてこようとするのである．以上の要因の組み合せにより一応各類型的特色が表現されるものと考へられる．各人は調査票における問題に対する回答（outside variable）と各 face sheet の反応（上記調査票における反応，これが response pattern である）と

		住居		性		政党				年齢					学歴					答		
		郡	市	男	女	保	進	なし	その他	20～24	25～29	30～39	40～49	50～	なし小中退	小卒	高小新中	旧中新高	旧高新旧大	賛成	中間	反対
住居	郡	1222	0	607	615	532	246	253	191	234	189	265	224	310	67	381	497	232	45	635	114	473
	市		803	387	416	314	255	144	90	159	126	193	148	177	29	151	243	283	97	321	82	400
性	男			994	0	456	281	180	77	189	163	195	178	269	25	220	415	228	106	374	110	510
	女				1031	390	220	217	204	204	152	263	194	218	71	312	325	287	36	582	86	363
政党	保					846	0	0	0	121	136	186	171	232	24	239	308	218	57	421	81	344
	進						501	0	0	144	94	128	80	55	7	74	198	167	55	159	43	299
	なし							397	0	84	57	92	58	106	22	120	150	87	18	206	43	148
	その他								281	44	28	52	63	94	43	99	84	43	12	170	29	82
年齢	20-24									393	0	0	0	0	1	41	164	153	34	125	39	229
	25-29										315	0	0	0	1	48	136	103	27	108	30	177
	30-39											458	0	0	8	109	181	132	28	212	39	207
	40-49												372	0	11	129	127	78	27	209	42	121
	50～													487	75	205	132	49	26	302	46	139
学歴	なし小中退														96	0	0	0	0	68	10	18
	小卒															532	0	0	0	339	42	151
	高小新中																740	0	0	342	70	328
	旧中新高																	515	0	169	66	280
	旧高新日大																		142	38	8	96
答	賛成	635	321	374	582	421	159	206	170	125	108	212	209	302	68	339	342	169	38			
	中間	114	82	110	86	81	43	43	29	39	30	39	42	46	10	42	70	66	8			
	反対	473	400	510	363	344	299	148	82	229	177	207	121	139	18	151	328	280	96			

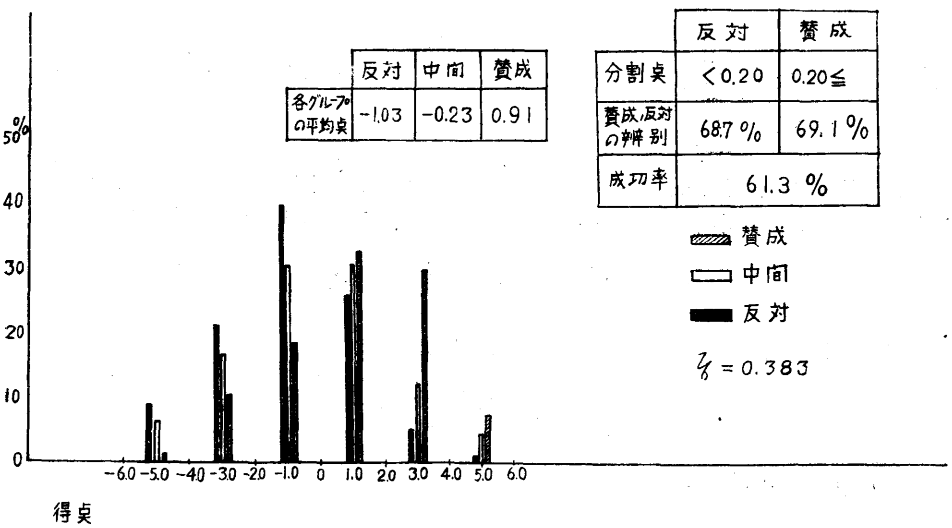
佐居		男女		政党			
郡	市	男	女	保守	進保	なし	その他
0.305	−0.465	−1.018	0.982	0.270	−1.120	0.430	0.580

年		齢			学		歴		
20～24	25～29	30～39	40～49	50～	なし 小中退	小卒	高小 新中 卒	旧中 新高 卒	旧高 新旧 大
−1.392	−1.242	−0.162	1.038	1.288	1.074	1.094	0.154	−1.086	−1.686



をもつことになる．

この数値を用ひ，賛成，中間，反対のグループの分布を描いてみると次の様になつた．



ここで中間グループを無視して，賛成，反対を弁別することを考へてみると，成功率は約69%，分点は 0.20 である．つまり，それ以上の得点をもつものを賛成それ以下の得点をもつものを反対と

判断すれば，成功率は約 69% となると言ふことになる．しかし中間グループがあるのでこれを考へに入れてみよう．なほこの時成功グループの比率は 0.48 反対グループ の比率は 0.41，中間は 0.11 である．この時の分点のきめ方を理論により勘案するに中間グループは無視してもよいと言ふことになる．この時前の分点を用ひて成功率を計算すれば 61.3% となる．なほこのとき分点を成功率が最大になるやうに所属比率を用ひても本質的な差異がみとめられなかつた．この成功率はすべての人の行動を得点ずけた外的要因から判断した時（これには難しい人とやさしい人とがある）の平均的な値であることに注意する必要がある．

他の知識がなければ成功率は高々 48% であつたものがそれだけ上昇すると言ふことになる．

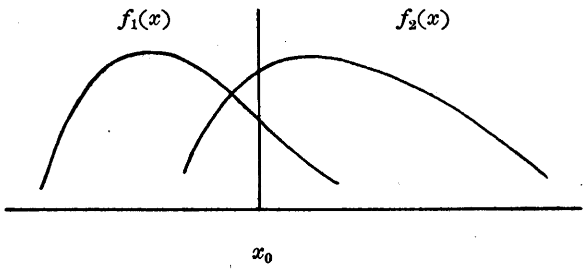
いづれにしても，社会現象のパタンは外的要因によつて，この程度決定されてくると言ふことは，外的要因が有力なものであるとして，又は力弱きものとして（つまり外的要因から決定できるものではないと言ふこと），深い反省を与へるものである．又要因のパタンの絡み合ひとしての利き方も興味あるものである（range の大なるものは利きが強いと言ふこと）

（補註）η と予測の的中率との関係について

ここに言ふ的中率とは A なるものを A と判断する比率を言ふことにする．我々は究極的には的中率を最大にするのが望ましいのであるが，ここでは η を最大にし，間接的に的中率を大きくすることを考へてきた．この η と的中率との関係は如何になるであらうか．これについての考察を次に述べてみよう．勿論 Case 1 の理論についての場合である．いくつかの要因を数量化して加へてゆくのであるから，ある意味の中央極限定理の考へに従つて，α なる綜合得点の分布は近似の意味でガウス分布に従ふと考へても大過はないものと考へてよい．この仮定の下に話を進めてみよう．

(イ) 外的規準が2つの場合

外的規準により2つのグループに弁別されるものとしておく，両グループの分布函数を $f_1(x)$，$f_2(x)$ とする．



$$f_1(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1}c^{-(x-m_1)^2/2\sigma_1{}^2}$$

$$f_2(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_2}c^{-(x-m_2)^2/2\sigma_2{}^2}$$

分点 x_0 を求め，x_0 未満ならば第1のグループ，x_0 以上ならば第2のグループに属すると判定するとしよう．この時の的中率を max.-min. の形で最大にする立場をとると x_0 は

$$\int_{-\infty}^{x_0} f_1(x)dx=\int_{x_0}^{\infty} f_2(x)dx$$

を満足することはさきの論文で示してある．これより

$$x_0=\frac{m_1\sigma_2-m_2\sigma_1}{(\sigma_1+\sigma_2)\sigma_2}$$

この時の判断の的中率 P は

$$Q=\int_{-(m_2-m_1)/(\sigma_1+\sigma_2)}^{\infty} g(x)dx,\qquad g(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$$

さて両グループに属するものの比率（出現比率）は等しいものとして η^2 を計算すると

$$\eta^2=\frac{\frac{1}{4}(m_2-m_1)^2}{\frac{1}{2}(\sigma_1^2+\sigma_2^2)+\frac{1}{4}(m_2-m_1)^2}$$

となる．ここで $m_2=-m_1$，$\sigma_1=c\sigma_2$ とおくと

$$P=\int_{-2/\varepsilon(1+c)}^{\infty} g(x)dx$$

$$\eta^2=\frac{m_2^2}{\frac{1}{2}\sigma_2^2(1+c^2)+m_2^2}=\frac{2}{2+\varepsilon^2(1+c^2)}$$

但し　$\varepsilon=\dfrac{\sigma_2}{m_2}$

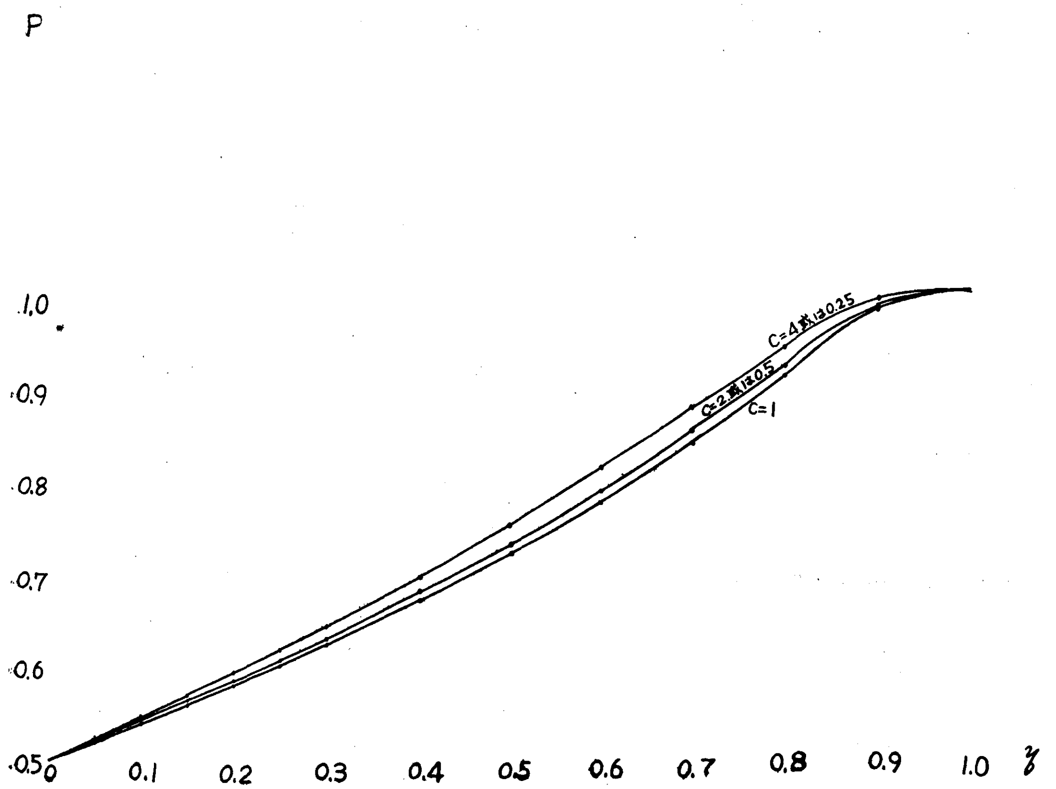
$$\varepsilon^2=\frac{2(1-\eta^2)}{1+c^2}$$

から

$$P=\int_{-h(\eta)}^{\infty} g(x)dx$$

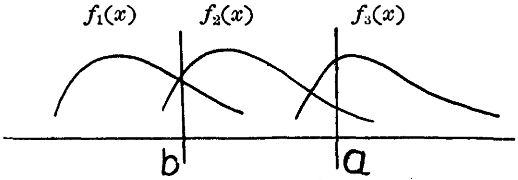
$$h(\eta)=\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{1+c^2}}{1+c}\sqrt{\frac{\eta^2}{1-\eta^2}}$$

となり，P は η の単調増加函数となり η を大にすることは P を大にすることになる．これらの関係を図示すると次の様になり P と η との関係は通常我々のよく遭遇する範囲内では略直線的と考へてよい．



(ロ)　外的規準が3の場合

外的規準によつて3のグループに弁別されるものと考へよう．この3つのグループの分布函数を $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ とする．この時



$x<b$　ならば第1のグループ

$b\leqq x<a$　ならば第2のグループ

$a\leqq x$　ならば第3のグループ

に属するものと判定するとする．この時の判断的中率を max.-min. の考へで求めると

$$\int_{-\infty}^{b} f_1(x)dx=\int_{b}^{a} f_2(x)dx=\int_{a}^{\infty} f_3(x)\,dx$$

により a,b は求められこれに応じ的中率 P がきめられる．今簡単のため $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ はガウス分布とし分散は皆等しく（$\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3=\sigma=1$）とし，平均は夫々 $-m$, 0, m としておく．かうすると分点は

$$\int_{-\infty}^{b+m} g(x)\,dx=\int_{b}^{a} g(x)\,dx=\int_{a-m}^{\infty} g(x)dx$$

により求められる．これより $a=-b$ を得る．かくして a は

$$\int_{-\infty}^{-a+m} g(x)\,dx=\int_{-a}^{a} g(x)dx$$

より求められる．

一方また各グループに属すべきものの比率が皆等しいとして η^2 を求めてみると

$$\eta^2=\frac{\frac{2}{3}m^2}{1+\frac{2}{3}m^2},\qquad \frac{\sigma}{m}=\frac{1}{m}=\varepsilon \text{ とすると}$$

$$\eta^2=\frac{3\varepsilon^2+2}{2},\qquad \text{これより } \varepsilon=\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{1-\eta^2}{\eta^2}}$$

となるから a は

$$\int_{-\infty}^{-a+\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{\eta^2}{1-\eta^2}}} g(x)dx=\int_{-a}^{a} g(x)dx \qquad \text{より求められる．}$$

さて P は

$$P=\int_{-a}^{+a} g(x)dx$$

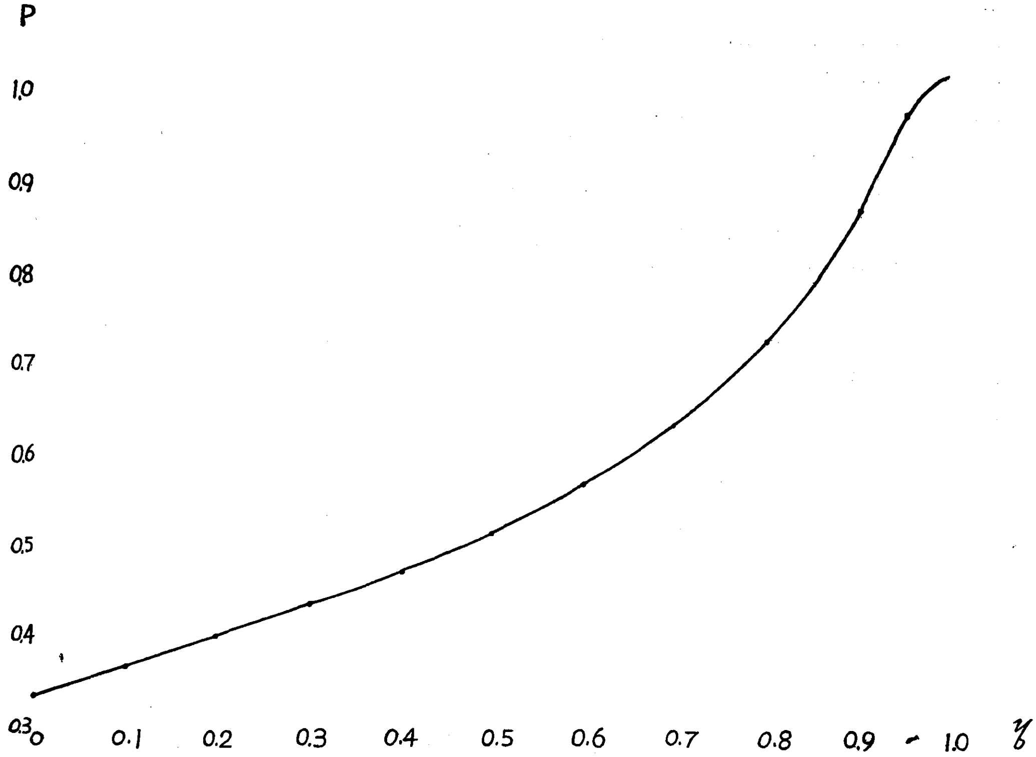
ここで $dP/d\eta$ を求めてみると

$$\frac{dP}{d\eta}=2\,g(a)\frac{da}{d\eta}>0$$

となり P は η の単調増加函数となる．

この関係を図示してみると次の様になるが，我々の通常用ひる所位は直線的関係がみられ $\eta>0.7$ となると急激に η の増加は P の増加に強い影響をもつ．したがつて η が 0.7 以上になると η を

最大にすることは P にきはめて強い影響を与へることが知られる.



ここで示した η と P との関係は全く特殊的な形の下においてのものであるが，大略の見当はこれで得られることと思ふ．複雑な場合には，この考へに準じて計算してみるのもよいが，心構へとしての又見当づけとしての第一近似は上述のものでまづ十分であらうと思ふ．

外的規準が4つ以上の時も同様に行ふことが出来る．

§2 outside variable として一次元的と見做せない Case 2の場合の例をあげよう，これは御茶ノ水女子大学の水原泰介氏によつてなされた調査である．狙ひは子供の家庭での育て方と幼児のパーソナリティとの関係を求める問題である．調査は調査票システムによつてその育て方を家庭の人に対して調査し，一方幼稚園の先生にその幼児のパーソナリティを記入させる方式に依つて行はれた．かうして，育て方として三つの次元「民主的か独裁的か」「厳密か寛宥か」「親子の関係は心理的に調和か不調和か」がとりあげられた．この三つに対して三つのカテゴリーに分類し「民主，中間，独裁」「寛宥，中間，独裁」，「調和，中間，不調和」の三つのカテゴリーにわけて育て方の型をみた．これが我々の言ふ予測に用ゐる要因の三つの次元（アイテム）であつて，これに対する回答が各人の反応型（response pattern）となる．この質問票は次の様なものである．

民主一独裁

「私は子供というものは単にかんし，かんとくすべきものでなく，意見は尊重しなければならないと思つています.」

「家族で何かプランをたてる時，この子供に意見を云わせます.」

「私はこの子の意志を尊重してやります.」

「私は，この子供に理屈を云わず素直である様に望みます.」

「私は，この子供を叱る時何故叱るかを説明してやります.」

「私は，この子供が独立的であるより，大人らしいのよりも，甘つたれで赤ちやんらしいのを好

みます.」

厳格—寛容

「私はこの子供に対し厳格にしています.」

「私はこの子供の教育をきびしくしています.」

「私はこの子供の躾はおだやかにしています.」

「この子供が私の云いつけを好まない様な時はそれを強制しません.」

「私はこの子供をしつける時，打つことがあります.」

「私はこの子供を押入れや部屋に閉じこめて叱ります.」

「私はこの子供にいつまでも悪い子ならもう可愛がつてあげない，と云つて叱ります.」

調　和—不調和

「私はこの子供と一緒に遊んでやります.」

「私はこの子供にやさしくしてやります.」

「私はこの子供に対し愛情を示してやります.」

「私はあまり忙しいのでこの子供の質問に答えられません.」

「この子供は母親に愛情を示します.」

「私は，この子供の質問に気軽に丁寧に答えてやります.」

「この子供は，私に自分の考えや希望や恐怖などを話します.」

答は“常に”“時々”“ほとんどない”である.

パーソナリティとしては　「グループ遊び的にして協調的」Ⅰ

「孤立的にして協調的」Ⅱ

「グループ遊び的にして反抗的」Ⅲ

「孤立的にして反抗的」Ⅳ

の四つの型にわけた．これが我々の言ふ層になるのである．これらが一次元的なものとなつてゐないのは明らかであらう，又調査票による調査であるから $J(O_i)=J(O_j)$ も明らかである．なほこの調査の細部は水原泰介，井田薫子，家庭での育て方と幼児のパーソナリティ，児童心理と精神衛生，No. 17，8月，1953，牧書店，を参照せられたい.

各人は各分類分け（outside variable）と各調査票の反応（response pattern）とをもつことになるのである.

なほ軸として　民主—独裁を　X軸　　厳格—寛宥を　Y軸　　調和—不調和を　Z軸として表現することにする.

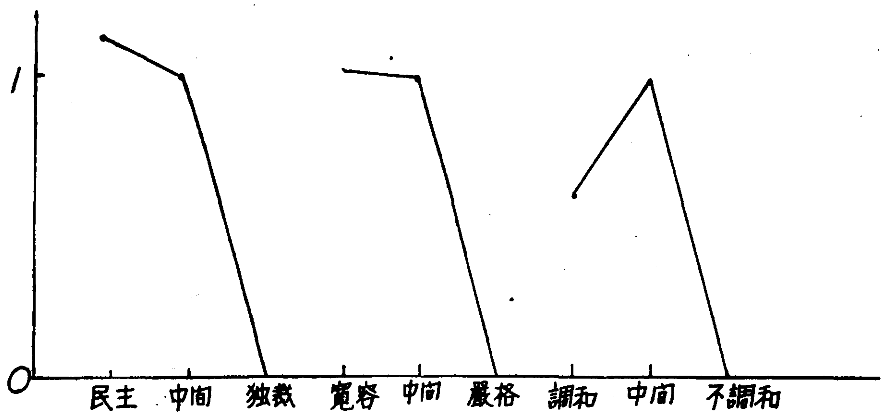
我々の場合男子のみをとりあげた．この時の全体の cross tabulation は次の通りである.

		民主X			厳格Y			調和Z		
		民主	中間	独裁	寛宥	中間	厳格	調和	中間	不調和
民主X	民主	31	0	0	9	15	7	12	14	5
	中間		30	0	6	12	12	5	15	10
	独裁			19	6	6	7	3	7	9
厳格Y	寛宥				21	0	0	7	10	4
	中間					33	0	9	13	11
	厳格						26	4	13	9
調和Z	調和							20	0	0
	中間								36	0
	不調和									24

これを "Case 2" の立場でカテゴリーに夫々数量をあたへてゆくと（なほこの時尺度として中間ともう一つの端を単位にとり夫々 0, 1 とし，測定の基準にした）なほ理論の様に平均を 0, 中間のカテゴリーに 1 をあたへても内容的には同等の結果を得る.

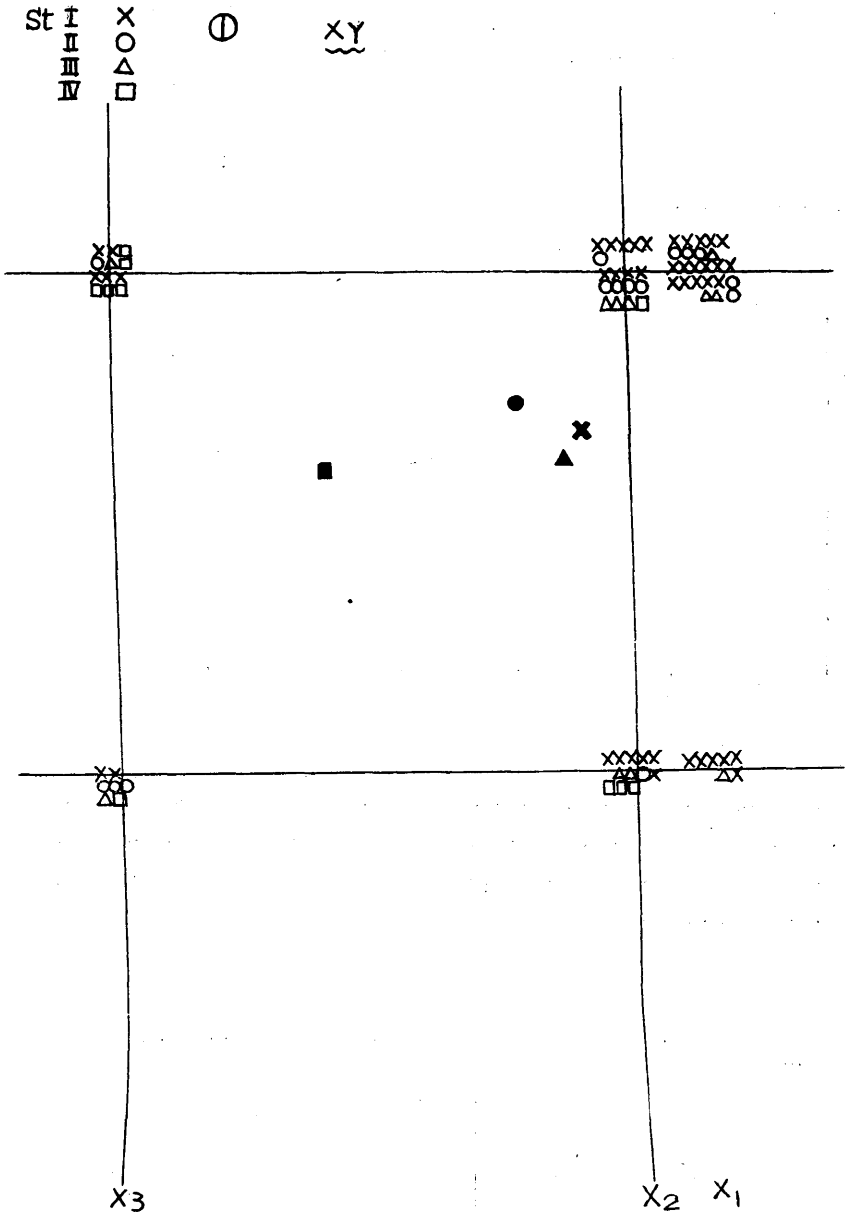
民主 (X)			厳格 (Y)			調和 (Z)		
民主的	中間	独裁的	寛宥	中間	厳格	調和	中間	不調和
1.129	1	0	1.017	1	0	0.617	1	0

この得点の模様をみると

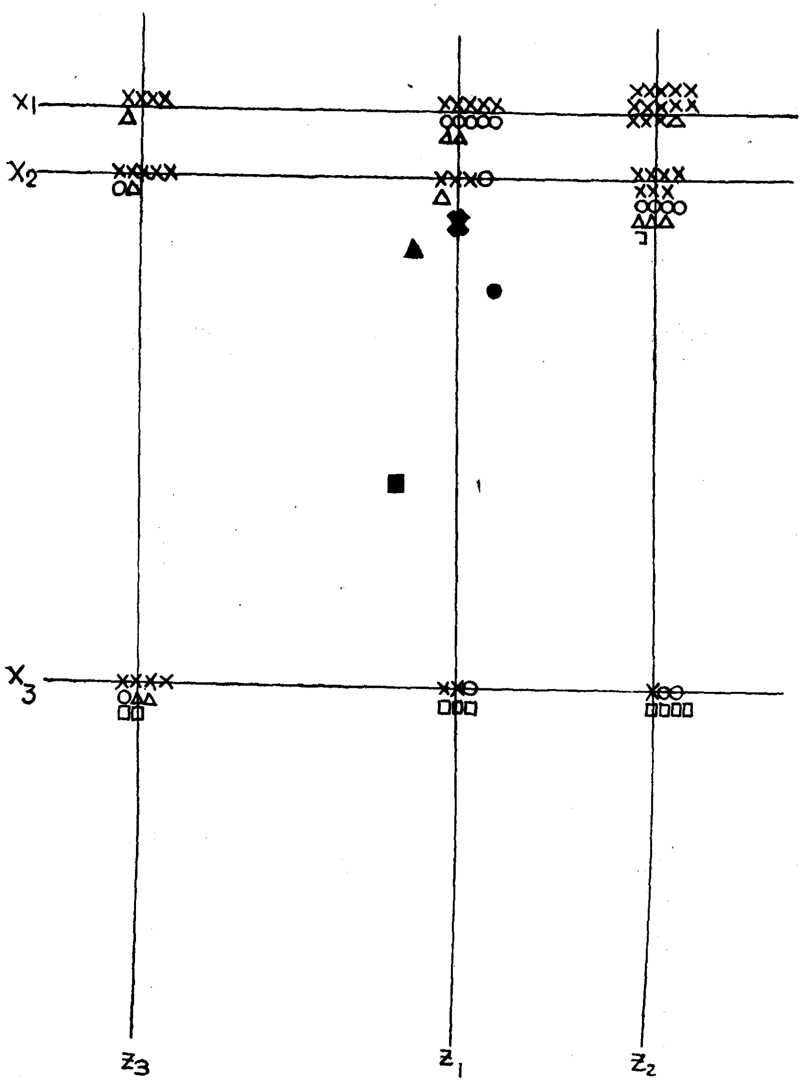


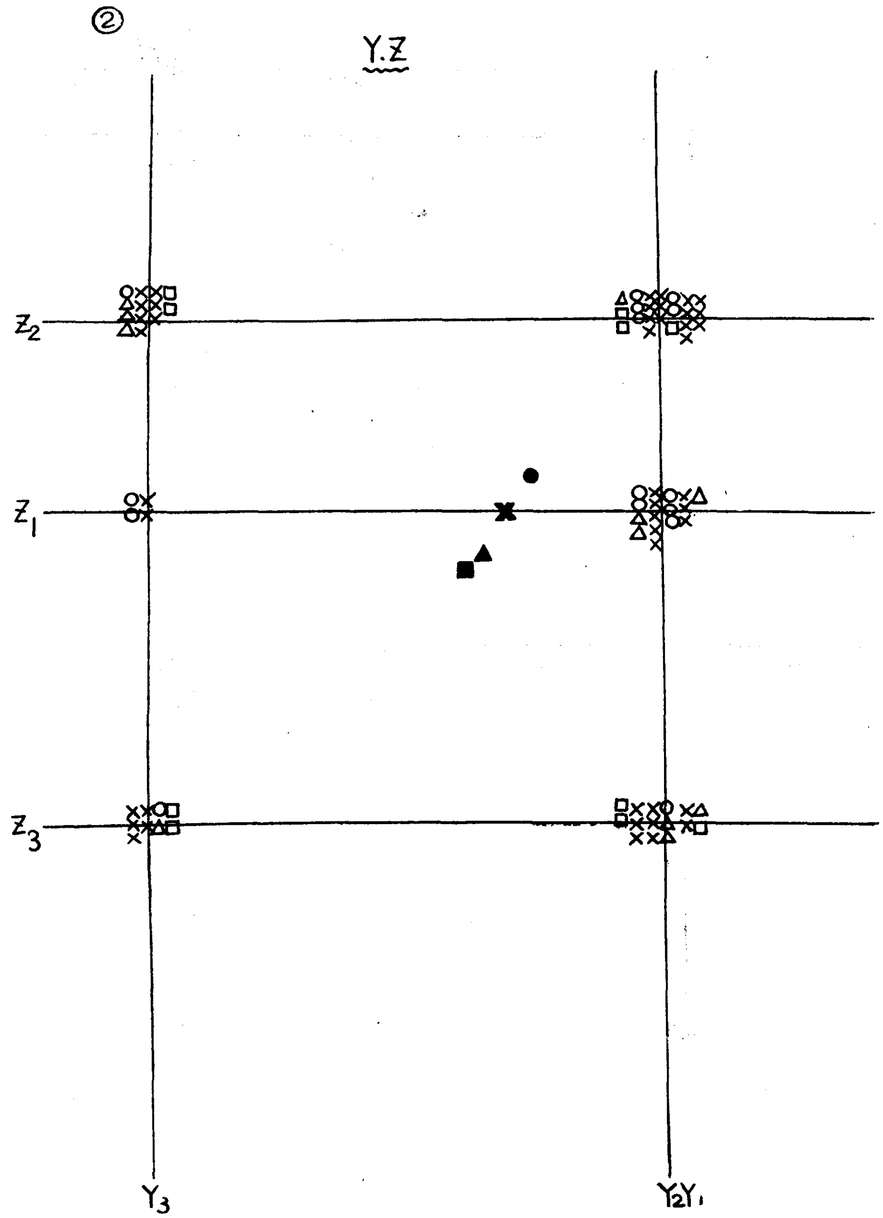
となり，民主，厳格の項では独裁的，厳格と言ふのがはなれて居り（後は殆ど離れてゐずこの意味からは弁別力はない）調和の項では値が線的関係でなく，中間が一番端に出てゐるのは非常に興味深い. このとき $\mu=0.902$ となり，よく分離されてゐることを知る. この時各パーソナリティ型の平均を出すと次の通りになる.

層＼育て方	民主 (X)	厳格 (Y)	調和 (Z)
I	0.906	0.687	0.617
II	0.776	0.739	0.688
III	0.865	0.640	0.532
IV	0.400	0.603	0.500

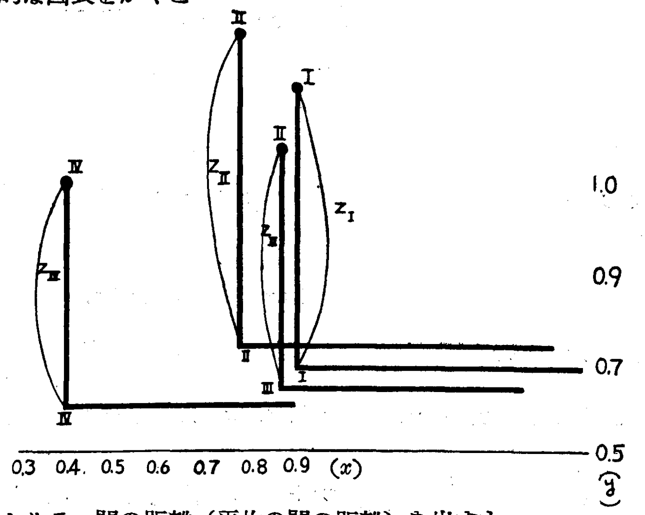


St I ×
II ○
III △
IV □
XY
X_3
X_2
X_1


X_1
X_2
X_3
Z_3
Z_1
Z_2

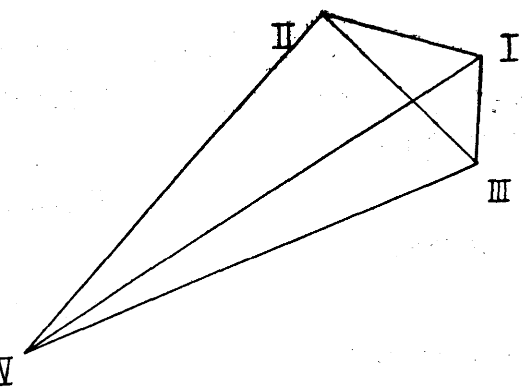

②
Y.Z
Z2
Z1
Z3
Y3
Y2Y1

これについて立体的な図表をかくと



これから各パーソナリティ間の距離（平均の間の距離）を出すと

	I	II	III	IV
I	0	0.156	0.106	0.526
II		0	0.205	0.442
III			0	0.468
IV				0



これから直にわかるのであるが四つのものが略ゝ同一平面上にあることを知るのである.

これよりみるとパーソナリティで孤立反抗のグループが特にとび離れてゐることがわかる. 調和不調和のところでは「適当な調和さ」がパーソナリティを協調的たらしめるに力あるものと解釈される. 後のものについては一応単調な関係がみられて居る. それらのカテゴリーのひらき工合が面白いところであるが, 内的解釈は容易に見出すことが出来る. いづれにしてもIVのグループは平均的にみてそだて方には特異な傾向のあることが見られるのが注目せられる. すべてこれらの関係は要因が互に絡み合つて出てきてゐるものであるから, 単独に要因をとりあげた場合と結論はことなつてくる. この方法の essential な点はこの絡み合ひの中に各要因のカテゴリーを重みづけるところにあるのである. いづれにしてもこの数量化は外的な criterion がなるべく要因から弁別できるやうに, classification の精度を最大にすると言ふ立場からなされてゐることに注意しなければならないそのための要因の数量化なのである.

ここではカラブリーが3つしかなく, カテゴリーの数量化による直覚的な函数表現を得ることが出来なかつたが, カテゴリーの多くあるものについては, ここに直覚的な函数関係を見出すことが出来るであらう. この計算法はカテゴリーが各次元で 11 位ならば可能なことである.

（補註） 弁別力の測度として一般化された分散 (generalized variance) を用ひることの意義

これはチエビシエフの不等式の考へにもとづくものである. 今簡単のため二次元の場合を考へておかう. 一般の場合も亦多く同様である. 二次元分布函数を $F(x, y)$ とする. 平均は一般性を失ふこ

となく0としておく．

$ax^2+2hxy+by^2=g(xy)^*$ を考へる．$ax^2+2hxy+by^2=C$ は楕円をあらはすものとする．

$$\iint_R g(xy)\,dF(xy) \text{ を求める}$$

$$\iint_R g(xy)dF(xy)=a\sigma_1{}^2+2h\rho\sigma_1\sigma_2+b\sigma_2{}^2$$

但し $\sigma_1{}^2$ は x の分散，$\sigma_2{}^2$ は y の分散，ρ は x と y との相関係数，R は全領域．ここでチエビシエフ流の考へによれば

$$\iint_{R'} g(xy)\,dF(xy) \leqq a\sigma_1{}^2+2h\rho\sigma_1\sigma_2+b\sigma_2{}^2$$

但し R′ は $(ax^2+2hxy+by^2) \geqq k(a\sigma_1{}^2+2h\rho\sigma_1\sigma_2+b\sigma_2{}^2)$ なる領域を示すものとする．

$$P_r\{ax^2+2hxy+by^2 \geqq k(a\sigma_1{}^2+2h\rho\sigma_1\sigma_2+b\sigma_2{}^2)\} \leqq \frac{1}{k}$$

$$P_r\left\{\frac{a}{a\sigma_1{}^2+2h\rho\sigma_1\sigma_2+b\sigma_2{}^2}x^2+\frac{2h}{a\sigma_1{}^2+2h\rho\sigma_1\sigma_2+b\sigma_2{}^2}xy + \frac{b}{a\sigma_1{}^2+2h\rho\sigma_1\sigma_2+b\sigma_2{}^2}y^2 \geqq k\right\} \leqq \frac{1}{k}$$

そこで，左辺の｛ ｝内の楕円の面積が最小になるやうに係数をきめるならば

x^2 の係数として

$$\frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_1{}^2}$$

y^2 の係数として

$$\frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_2{}^2}$$

xy の係数として

$$\frac{-2\rho}{2(1-\rho^2)\sigma_1\sigma_2}$$

を得る．

これは所謂集中楕円の方程式となる．

このやうに(*)に示した様な二次形式（楕円）によつて表現されるある領域の中におちる確率が $1-1/k$ よりも大きいやうなものを考へた時その面積が最小となるもの——これが望ましいのは推定の考へから直に了解せられる——は所謂集中楕円となるのである．この中につつまれる面積の二乗が一般化された分散に比例することは容易に示すことが出来る．

以上の様な意味から，チエビシエフ不等式による推定 → 集中楕円 → 一般化された分散の考への線に沿つて一般化された分散を measure として用ゐる妥当性が示されたことになる．

n 次元の時も全く同様にゆくので省略する．

（統計数理研究所）