定常確率過程に於ける ω^2-統計量

風　見　秋　子

(1954 年 3 月 受付)

ω^2-test in Stationary Stochastic Process

Akiko Kazami

If we want to test the distribution function of a continuous stationary stochastic process we may take a method analogous to the case of discrete independent variables by using the ω^2-statistic. By this method we shall often be able to avoid the error that may occur in using the classical ω^2-test approximately.

Institute of Statistical Mathematics.

独立なサンプルによる母集団分布函数の ω^2-test に対応して，定常確率過程に於いても ω^2-統計量というものを考え，それにもとづいた検定を試みようとしたものである．

§ 1. 分布函数の推定

連続的変数 t を有する定常確率過程 x_t の各点における分布函数を $F(x)$ とする．

$$F(x) = P_t\{x_t \leq x\}, \qquad -\infty < x < \infty.$$

今 $F(x)$ の consistent estimate を求める為，x_t に対応して次の様な確率変数を導入する．

$$e_t(x, \omega) = \begin{cases} 1. & x_t(\omega) \leq x \\ 0. & x_t(\omega) > x \end{cases}$$

x_t を可測且つ積分可能な確率過程とすれば，$e_t(x, \omega)$ も又積空間 $T\times\Omega$（T は任意の有限区間）の上で可測且つ積分可能である．

$F(x)$ の推定として次の様な時間平均を用いるとする。

$$F^*_T(x, \omega) = \frac{1}{T}\int_0^T e_t(x, \omega)\,dt$$

これは区間 $[0, T]$ において，$x_t(\omega) \leq x$ なる時間の相対的な測度をあらわす。もし x_t が ergodic ならばこれは $T\to\infty$ において殆ど確実に $e_t(\omega)$ の空間平均に収斂する。

$$\lim_{T\to\infty} F^*_T(x, \omega) = E\{e_t(x)\} = P_r\{x_t \leq x\} = F(x) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

即ち，$F_T(x)$ は $F(x)$ の consistent estimate となる。一方，平均エルゴード定理により二乗平均の意味の極限

$$\underset{T\to\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}}\ \frac{1}{T}\int_0^T e_t(x)\,dt$$

も又存在し之は個別エルゴード定理による極限と一致するから，上の場合は

$$\underset{T\to\infty}{\mathrm{l.\,m.\,i.}}\ \frac{1}{T}\int_0^T e_t(x)\,dt = F(x)$$

この条件は更に次の様に書きなおされる

$$E\left\{\frac{1}{T}\int_0^T e_t(x)\,dt - F(x)\right\}^2$$

$$= E\left\{\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T E\,\{e_t(x)-F(x)\}\{e_s(x)-F(x)\}\right\} dt\,ds$$

$$= \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T [E\,\{e_t(x)\,e_s(x)\}-F(x)^2]\,dt\,ds$$

$$= \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T [P_r\{x_t \leq x, x_s \leq x\}-F(x)^2]\,dt\,ds$$

$$= \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T [F(t,s;\,x,x)-F(x)^2]\,dt\,ds$$

$$= \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T [F(t-s;\,x,x)-F(x)^2]\,dt\,ds$$

$$= \frac{2}{T}\int_0^T\left(1-\frac{\tau}{T}\right)\left\{F(\tau;\,x,x)-F(x)^2\right\} d\tau$$

$$\to 0 \quad (T\to\infty)$$

又これは極限において次と同等である．

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \{F(\tau;\,x,x)-F(x)^2\}\,d\tau = 0 \quad \cdots\cdots(2)$$

ついでに確率過程のエルゴード性に関しては次の様にいうことが出来る。

定理： 定常確率過程 x_t が ergodic なる為必要充分なる条件は，任意の $\{(t_1,\cdots,t_n),(x_1,\cdots,x_n)\}$ なる組に対し

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T e_t(t_1,\cdots,t_n;\ x_1,\cdots,x_n)dt$$
$$= F(t_1,\cdots,t_n;\ x_1,\cdots,x_n)$$

が成立つことである．ここに e_t は

$$e_t(t_1,\cdots,t_n;\ x_1,\cdots,x_n) = \begin{cases} 1. & x_{t_1+t} \leqq x_1,\cdots,\ x_{t_n+t} \leq x_n \\ 0, & \text{その他の領域} \end{cases}$$

尚これは次の条件とも同等である．

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T [F(t_1,t_1+t,\cdots,t_n+t;\ x_1,x_1,\cdots,x_n,x_n)$$
$$-F(t_1,\cdots,t_n;\ x_1\cdots x_n)^2]\,dt = 0$$

例題

$$\frac{1}{T}\int_0^T\left(1-\frac{t}{T}\right)\left(F(t;\,x,x)-F(x)^2\right)dt \leq \frac{1}{T}\int_0^T\left(F(t;\,x,x)-F(x)^2\right)dt$$

であるから，右辺は $F^*_T(x)$ の推定誤差をおさえる．従つてこの integrand の形によつて誤差の order を知る事ができる。例えば x_t を

$m(x_t)=0,\ \sigma^2(x_t)=1,\ \rho(t)=e^{-\beta t}\ (0<\beta<\infty)$ なる Normal Markoff process とするならば，二次元 Gauss 分布の tetrachoric series による展開を用いて

$$F(t;\ x,x) = \int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^x \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\, e^{-\frac{x^2+y^2-2\rho xy}{2(1-\rho^2)}}\,dx\,dy$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ H_{j-1}(-x) f(-x) \right\}^2 \frac{e^j}{j!}$$

と書くことが出来る。ここに H_j は j 次の Hermite 多項式で $H_{-1} \equiv 1$ と定義し，又 $f(x) = F'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ とする.

$$上式 = \left(\int_{-\infty}^{x} dF(x)^2 + f(-x)^2 \rho + \left(\frac{d}{dx} f(x) \right)^2_{(-x)} \frac{\rho^2}{2} + \left(\frac{d^2}{dx^2} f(x) \right)^2_{(-x)} \frac{\rho^3}{6} + \cdots\cdots \right.$$

$$= F(x)^2 + \frac{1}{2\pi} e^{-x^2} \left(\rho + x^2 \frac{\rho^2}{2} + (x^2-1)^2 \frac{\rho^3}{6} + \cdots\cdot \right)$$

$$= F(x)^2 + \frac{1}{2\pi} e^{-x^2} \left(e^{-\beta t} + x^2 \frac{e^{-2\beta t}}{2} + (x^2-1)^2 \frac{e^{-3\beta t}}{6} + \cdots\cdot \right)$$

この級数の一様収斂性より

$$\frac{1}{T} \int_0^T \left(F(t; x, x) - F(x)^2 \right) dt$$

$$= \frac{e^{-x^2}}{2\pi\beta t} \left\{ 1 + \frac{x^2}{4} + \frac{(x^2-1)^2}{18} + \cdots\cdots - \left(e^{-\beta T} + \frac{x^2}{4} e^{-2\beta T} + \frac{(x^2-1)^2}{18} e^{-3\beta T} + \cdots\cdot \right) \right\}$$

ここで

$$\frac{1}{2\pi} e^{-x^2} \left\{ 1 + \frac{x^2}{4} + \frac{x^2-1)^2}{18} - \cdots\cdot \right\} \leqq \frac{1}{2\pi} e^{-x^2} \left\{ 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{(x^2-1)^2}{3!} - \cdots\cdot \right\}$$

$$= \lim_{t \to 0} F(t; x, x) - F(x)^2 = F(x) - F(x)^2 = F(x)(1 - F(x))$$

従つて

$$\sigma^2(F_T(x)) \leqq \frac{F(x)(1-F(x))}{\beta T} + o\left(\frac{1}{T} \right)$$

§ 2. ω^2-統計量

定常確率過程に於ても $F(x)$ の推定として信頼限界による方法が欲しいが，独立なサムプルによる場合の Kolmogoroff の定理に応対する様な一般的な方法はまだ得られていないようである。そこで今は ω^2-test に対応する ω^2-統計量をとりあげその moment を検討するにとどめる.

先づ ω^2-statistics を次の様に定義する.

$$\omega^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left| F(x) - \frac{1}{T} \int_0^T e_t(x) dt \right|^2 dF(x)$$

次にこの moment を二次まで求める。

$$E(\omega^2) = E\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left(F(x) - \frac{1}{T} \int_0^T e_t(x) dt \right)^2 dF(x) \right\}$$

$$= E\left[\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ F(x)^2 - \frac{2F(x)}{T} \int_0^T e_t(x) dt + \left(\frac{1}{T} \int_0^T e_t(x) dt \right)^2 \right\} dF(x) \right]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{2}{T}\int_0^T\left(1-\frac{t}{T}\right)F(t;x,x)\,dt - F(x)^2\right\}dF(x)$$

$$\sigma^2(\omega^2) = E\{\omega^2 - E(\omega^2)\}^2$$

$$= E\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left[2F(x)^2 - \frac{2}{T}F(x)\int_0^T e_t(x)\,dt + \left(\frac{1}{T}\int_0^T e_t(x)\,dt\right)^2\right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{2}{T}\int_0^T\left(1-\frac{t}{T}\right)\cdot F(t;x,x)\,dt\right]dF(x)\right\}^2$$

$$= -4\left\{\int_{-\infty}^{\infty}F(x)^2\,dF(x)\right\}^2 - \left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2}{T}\int_0^T\left(1-\frac{t}{T}\right)F(t;x,x)dt\,dF(x)\right\}^2$$

$$+ 4\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F(x)F(y)\frac{2}{T}\int_0^T\left(1-\frac{t}{T}\right)F(t;x,y)dt\,dF(x)dF(y)$$

$$+ 4\int_{-\infty}^{\infty}F(x)^2dF(x)\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2}{T}\int_0^T\left(1-\frac{t}{T}\right)F(t;x,x)dt\,dF(x)$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{T^4}\int_0^T\int_0^T\int_0^T\int_0^T F(t_1,t_2,t_3,t_4;x,x,y,y)\,dt_1dt_2dt_3dt_4\,dF(y)$$

$$- 4\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F(x)\,\frac{1}{T^3}\int_0^T\int_0^T\int_0^T F(t_1,t_2,t_3;x,y,y)\,dt_1dt_2dt_3\,dF(x)\,dF(y)$$

$$= -4\left\{\int_{-\infty}^{\infty}F(x)^2dF(x)\right\}^2 + 4\int_{-\infty}^{\infty}F(x)^2dF(x)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2}{T}\int_0^T\left(1-\frac{t}{T}\right)F(t;x,x)dt\,dF(x)$$

$$- \left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2}{T}\int_0^T\left(1-\frac{t}{T}\right)F(t;x,x)\,dt\,dF(x)\right\}^2$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{8}{T^3}\int_0^T\int_0^{T-t}\int_0^{T-t-s}\left(1-\frac{t+s+u}{T}\right)F(t,s,u,;x,x,y,y)dt\,ds\,du\,dF(x)dF(y)$$

$$+ 4\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F(x)F(y)\frac{2}{T}\int_0^T\left(1-\frac{t}{T}\right)F(t;x,y)\,dt\,dF(x)\,dF(y)$$

$$- 4\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F(x)\,\frac{4}{T^2}\int_0^T\int_0^{T-t}\left(1-\frac{t+s}{T}\right)F(t,s;x,y,y)\,dt\,ds\,dF(x)dF(y)$$

ここに t,s,u という新しい変数は

$$t = t_{(2)} - t_{(1)},\quad s = t_{(3)} - t_{(1)},\quad u = t_{(4)} - t_{(1)}\quad (t_{(1)} \le t_{(2)} \le t_{(3)} \le t_{(4)})$$

によつて導かれたものである。

上式は又極限に於て次と同等である.

$$\sigma^2(\omega^2) \sim 4\int_{-\infty}^{\infty}F(x)^2dF(x)\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{T}\int_0^T(F(t;x,x)-F(x)^2)\,dt\,dF(x)\,dF(y)\right\}$$

$$+ 4\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F(x)F(y)\frac{1}{T}\int_0^T(F(t;x,y)-F(x)F(y))dt\,dF(x)dF(y)$$

$$-\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{T}\int_0^T (F(t;\,x,x)-F(x)^2)\,dt\,dF(x)\right\}^2$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{8}{T^3}\int_0^T\int_0^{T-t}\int_0^{T-t-s}(F(t,s,u;\,x,x,y,y)-F(x)^2F(y)^2)\,dtdsdudF(x)dF(y)$$

$$-4\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F(x)\frac{4}{T^2}\int_0^T\int_0^{T-t}F(t,s;x,y,y)-F(x)F(y)^2)\,dt\,ds\,dF(x)dF(y)$$

従つてこの式が適当に評価されればよい．一般に第三項以下は二項までより small order である．

例題

前出の $\rho(t)=e^{-\beta t}$ なる Gaussian process を例にとる．

$$F(t,s;\,x,y,z)$$

$$=\sum\left[(-1)^{j+k+l}\frac{\rho_t^j\rho_{s+t}^k\rho_t{}^l}{j!\,k!\,l!}\left\{H_{j+l-1}(-x)\,H_{j+k-1}(-y)\,H_{k+l-1}(-z)f(x)f(y)f(z)\right\}\right.$$

$$(\rho_t=e^{-\beta t})$$

$$F(t,s,u;\,x,y,z,w)$$

$$=\sum\left[\frac{\rho_t{}^j\rho_{t+s}^k\rho_{t+s+u}^l\rho_t^m\rho_{t+s}^n\rho_t^p}{j!\,k!\,l!\,m!\,n!\,p!}H_{j+k+l-1}(-x)\,H_{j+m+n-1}(-y)\,H_{k+m+p-1}(-z)\right.$$

$$\left.H_{l+n+p-1}(w)\cdot f(x)f(y)f(z)f(w)\right]$$

なる展開式を用いれば

$$\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T]F(t,s;\,x,y,z)-F(x)F(y)F(z)]\,dt\,ds$$

$$\leqq\sum\frac{1}{\beta^2T^2}(-1)^{j+k+l}\frac{C_{i,j,k}(x,y,z)}{j!\,k!\,l!(j+k+l)k}(1-e^{-\beta(j+k+l)T}-e^{-\beta kT}+e^{-\beta(j+2k+l)T})$$

$$=O\left(\frac{1}{T^2}\right)$$

等を得る．ここに $C_{i,j,k}$ 等は前と同様な係数とする．

従つて

$$\sigma_0(\omega^2)\lesssim\frac{4}{\beta T}\int_{-\infty}^{\infty}F(x)^2dF(x)\int_{-\infty}^{\infty}F(x)(1-F(x))\,dF(x)$$

$$+\frac{4}{\beta T}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F(x)\,F(y)\,(F(0:\,x,y)-F(x)\,F(y))\,dF(x)dF(y)$$

$$+o\left(\frac{1}{T}\right)\lesssim\frac{4}{9}\frac{1}{\beta T}$$

もし $\rho(t)$ が $\rho(t)=e^{-\beta t}\cos\alpha t$ の様な減衰振動の型である場合も上と同様な order になる．

（統計数理研究所）

参考文献

[1] U. Grenander: Stochastic process and Statistical inference Arkiv För Mat. Band 1 nr. 17. 1950

[2] M. G· Kendall: Contribution to the study of oscillatory time-series. Cambridge University, 1946