のことが知られていた．

$$\mu\in\boldsymbol{D}(\alpha),\ \nu\in\boldsymbol{D}(\beta)\ (\alpha\leq\beta)\ \text{ならば},\ \mu\circ\nu\in\boldsymbol{D}(\alpha).$$

特に，$\alpha<\beta$ ならば，次の式が成り立つ．

$$\lim_{x\to\infty}\mu\circ\nu(x,\ \infty)/\mu(x,\ \infty)=\int_0^\infty t^\alpha\nu(dt).$$

知りたいのは，$\alpha=\beta$ の場合の tail decay の order の評価である．これについて次の様な conjecture を立てた．

Conjecture.　$\mu,\ \nu\in\boldsymbol{D}(\alpha)\ (\alpha>0),\ \int_0^\infty t^\alpha\mu(dt),\quad \int_0^\infty t^\alpha\nu(dt)<\infty$ ならば，

$$(※)\qquad \mu\circ\nu(x,\ \infty)\sim\int_0^\infty t^\alpha\nu(dt)\mu(x,\ \infty)+\int_0^\infty t^\alpha\mu(dt)\nu(x,\ \infty).$$

この conjecture について，(※) が，幾つかの条件の元で成立していることを示した．これが一般の場合に正しいか，また，モーメントが存在しないときの tail の評価などについては，いまだ，最終結論を得ていない．(このためには，正則変動関数についての様々な性質についての考察が必要であると思われる．) しかし，このことから，同じ指数 ($\neq 2$) の安定分布の吸引域に属する分布に従う独立確率変数の積について，その分布の tail は正則変動するが，balance condition が成り立たないことがある．すなわち，このクラスがそのような演算について閉じていないことが分った．

参 考 文 献

志村隆彰 (1993). Mellin-Stieltjes convolution of distributions characterized by regular variation, 加法課程の諸問題，統計数理研究所共同研究リポート，No. 51, 6-12.

領域統計研究系

階層的直交座標

柳 本 武 美

R^1 上の確率分布 $p(x;\ \theta)$, $\theta\in R^p$ を考える．母数 θ が $(\theta_1,\ldots,\ \theta_p)'$ と分解できて，$\theta_1,\ldots,\ \theta_p$ 間の直交性を論じよう．直交条件は母数の推測に便宜的な性質をもたらすことがある．また実際的にも，母数の直交性は個々の母数が相異なる量を測っていることを示唆する．従ってモデルを解釈するのに都合が良い．Huzurbazar (1956) と Cox and Reid (1987) は各成分 $\theta_1,\ldots,\ \theta_p$ が直交であることを，Fisher の情報行列

$$I=E\left\{\frac{\partial^2}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\log p(x;\ \theta)\,|\,p(x;\ \theta)\right\}$$

の非対角成分が任意の θ に対して 0 になることで定義した．

さて Kullback-Leibler separator (relative entropy) は次のように定義される．

$$KL(\theta^*,\ \theta)=\int\log\frac{p(z;\theta^*)}{p(z;\theta)}\,p(z;\theta^*)dz$$

このとき $\theta=(\theta_1,\ \theta_2)$ が階層的直交であるとは，$\theta^*=(\theta_1^*,\ \theta_2^*)$, $\theta^\dagger=(\theta_1^*,\ \theta_2)$ として

$$KL(\theta^*,\ \theta)=KL(\theta^*,\ \theta^\dagger)+KL(\theta^\dagger,\ \theta)$$

が任意の θ, θ^* に対して成り立つことと定義する．母数 θ の次元が3以上の場合にも容易に拡張される．

指数分布族

$$p(x\ ;\ \theta)=\exp\{\beta(\theta)'t+b(\beta(\theta))+a(x)\}$$

では階層的直交性は

$$(\beta(\theta^\dagger)-\beta(\theta))'(\eta(\theta^*)-\eta(\theta^\dagger))=0$$

と表される（Nagaoka and Amari(1982)).

この定義に関して以下の話題を論じた．

a) 密度関数の完全分離型
b) 最尤推定量の独立性
c) 尤度比検定と修正尤度比検定
d) 条件付推測
e) 母数の parametrization

結晶群の出現頻度

伊 藤 栄 明

幾何学的な対称性を群論をもちいて記述する方法はよく知られている．3次元空間における周期的な構造について対称性を記述する230個の群があり，それらは空間群と呼ばれている．結晶における原子の配列を解析する際に空間群はもちいられる．結晶の対称性は230の空間群のいずれかによりあらわされる．個々の結晶の対称性が何になるかという問題は物理的，化学的な議論にもとづいておこなわれるべきものであるが，多数の結晶について対称性の分布については確率モデルを考えうる．群を値としてとる確率分布，確率過程という見方が可能である（伊藤（1985, 1986)）．幾何学的対称性を平衡移動の操作を考慮にいれず記述する点群といわれている32個の群がある．それらは定点Oを通る軸による回転及び定点Oについての反転からなる有限群である．点群は結晶の形態を記述する際にもちいられる．点群における対称操作に平行移動の操作を組み合わせたものが空間群であり，各空間群は32個の点群のいずれかにもとづいて構成されている．空間群及び点群は合同変換からなる不連続群である．正六面体からえられる有限群で位数が最大であるものを考える．それは結晶学において O_h と呼ばれている群である．正六面体の高さが一様な柱から得られる有限群で位数が最大であるものは結晶学において D_{6h} といわれているものである．32個の点群は O_h, D_{6h} 及びそれらの部分群のいずれかである．O_h 及び D_{6h} における元を幾何学的な意味に基づいて，3次元の行列により表現する．まず O_h の表現を考える．頂点の各座標が$+1$あるいは-1であるような正六面体を考える．それと合同な位置にもたらすような合同変換のすべてを行列により表現する．それらのうち回転軸が $(1, 1, 1)$ と $(-1, -1, -1)$ を通る $\bar{3}$ を含む D_{3d} を考え，それを含む D_{6h} の表現を考える．O_h と D_{6h} の双方に含まれる位数が最大の部分群は D_{3d} であり，O_h 及び D_{6h} の上記の表現は D_{3d} の表現をひとつ共有している．同様に $(1, -1, 1)$ と $(-1, +1, -1)$, $(1, 1, -1)$ と $(-1, -1, 1)$, $(-1,$