統計数理（1994）
第42巻 第1号 45-61

Consecutive-k-out-of-n：F システム

統計数理研究所　平　野　勝　臣

(1994年1月　受付)

1. は じ め に

航空機やロケット，通信ネットワークなどは幾つかの成分から成り立っていると考え，成分から構成されている全体を一つのシステムとみる．そこでシステムを構成している各成分の故障する確率（または信頼度）と，システム全体が故障する確率（または信頼度）との関係，とくにシステムの信頼度の評価についての研究が行なわれている．ここで故障する確率（または信頼度）を時間の関数とみて，寿命としてもよい．このようなことが信頼性の理論として論じられていることはよく知られている．

システムを構成している各成分のどこか一ケ所が故障したとき，システム全体が機能しなくなるシステムを直列システム（series system）という．これに対して，すべての成分が故障したとき，システム全体が機能しなくなるシステムを並列システム（parallel system）という．直列システムはシステムが機能するための最小の成分から成り，むだがないので安価だが，信頼度は低い．また，並列システムはシステムが機能することだけを考えれば，余分な成分があり，冗長（redundant）であるので高価となるが，信頼度は高い．そこで価格を低くしながらシステム全体の信頼度を高めるために，直列システムと並列システムを組み合わせたシステムが考えられている．例えば n 個の成分のうち少なくとも k 個の成分が故障したとき，システム全体が機能しなくなるシステムである．このシステムを k-out-of-n：F システムといい，ここでは $k/n/\mathrm{F}$ と略す．4発のジェット機は3発故障すると飛行できないので，3/4/F である．

本報告では $k/n/\mathrm{F}$ の特殊な場合，即ち，一列に並んだ n 個の成分のうち，連続した少なくとも k 個の成分が故障したとき，システム全体が機能しなくなるシステムを考察する．このシステムを Consecutive-k-out-of-n：F システムといい，ここでは Con/k/n/F と略す．システムという言葉の代わりにネットワークということもある．1980年に Con/k/n/F に関する Kontoleon の論文が *IEEE Transactions on Reliability* に発表されて以来，現在に到るまで，このシステムに関する論文が同誌を中心に多く発表（80編以上）されている．本報告の目的はこれらの研究を紹介することである．

本稿は5章から成る．2章では上で述べた4つのシステムを用いて，システムの信頼度について述べる．3章では，論文に紹介されている Con/k/n/F の例を述べる．4章では，Con/k/n/F の拡張やその例を述べる．また成分間の仮定を分類することによって扱われている問題を整理し，どのようなことが研究されているのかを紹介する．5章では，Con/k/n/F とオーダー k の離散分布との関係について述べるが，このことについては以下で若干補足する．

これまでに発表された Con/k/n/F についての論文のほとんどは，いくつかの例外を除いて信頼性理論の枠組みの中で議論されている．勿論それはそれでよいのだが，この枠組みをはずすことによって，議論が整理されたり，見通しが良くなることがある．例えば，Tong (1985) は独立な2値系列の最長連の長さの問題から Con/k/n/F の成分の最適配置についての良い結

果を得ている．また，Aki (1985), Hirano (1986) や Philippou (1986) がすでに指摘しているように，このシステムはオーダー k の2項分布と密接に関連している．即ち，最も単純な場合の Con/k/n/F の信頼度はオーダー k の2項分布の値0をとる確率で与えられる．従って，オーダー k の離散分布論の視点からこのシステムの信頼度について考察することは意味のあることである．さらに Con/k/n/F を一般化した m-consecutive-k-out-of-n：F システム (4.1節で後述) の信頼度はオーダー k の2項分布の確率関数で与えられることも指摘しておきたい．

このようなことから，Con/k/n/F およびこれを含むいくつかのシステムの信頼性の研究について概観し，あわせてオーダー k の離散分布論との関係を明らかにしたい．その結果，この様なシステムの統計学的な問題への取り組みや，また離散分布論の立場から言えば，オーダー k の離散分布の1つの具体的な応用の様子が論じられることになる．5章では，このような視点で Con/k/n/F の信頼度について述べ，あわせていくつかの問題点を指摘する．

この章の残りでオーダー k の離散分布について簡単に説明しておこう．実験結果が成功か失敗のいずれかで，成功と失敗の確率をそれぞれ $p, q(=1-p)$ とする．オーダー k の2項分布は，n 回の独立な実験で k 回連続成功の起こる数の分布で，記号で $B_k(n, p)$ とかく．オーダー 1の2項分布 $B_1(n, p)$ が2項分布である．オーダー k の幾何分布は，独立な実験で k 回連続成功がはじめて起こるまでの実験回数の分布で，記号で $G_k(p)$ とかく．この分布の台を非負整数上にシフトした分布を $\bar{G}_k(p)$ とかくと，$\bar{G}_1(p)$ が幾何分布である．

なお，信頼性理論については，例えば Barlow and Proschan (1965, 1981)，またオーダー k の離散分布については Johnson et al. (1992) を参照されたい．

2. システムの信頼性

信頼性の理論では種々のシステムの信頼度を評価することを問題とする．直列と並列が組み合わされたシステムでは，システムが機能するための最小の成分の組 (最小パス集合) を考えたり，システムが故障となるような成分の最小の組 (最小カット集合) を考えて，信頼度を求める．また成分に寿命分布を仮定してシステムの寿命の分布を求めることや，成分間に依存性を導入して考察する．更に故障した成分をすぐに修理した場合等の研究がある．これらを含め信頼性理論の統計的側面については，例えば Barlow and Proschan (1981) を参照されたい．この章の記号などはこのテキストに従っている．

あるシステムが n 個の成分から成っているとする．$i=1, 2, \ldots, n$ として，i 番目の成分が機能していれば値1，故障していれば値0をとる確率変数 X_i を導入する．このとき i 番目の成分の信頼度は $P(X_i=1)=E(X_i)$ で表わされる．次にシステムが機能しているか，故障しているかを表わす確率変数を導入する．これは各成分が機能しているか，否かに依存しているので，$X_1, \ldots, X_n$ の関数で

$$\phi(X_1, \ldots, X_n)=\begin{cases}1 & \text{システムが機能しているとき}\\ 0 & \text{そうでないとき}\end{cases}$$

と表わされ，これをシステムの structure function という．

1章で述べた4つのシステムの structure function は

(i) 直列システム：$\phi(\boldsymbol{X})=X_1\cdots X_n=\min\{X_1, \ldots, X_n\}$

(ii) 並列システム：$\phi(\boldsymbol{X})=1-(1-X_1)\cdots(1-X_n)=\max\{X_1, \ldots, X_n\}$

(iii) $k/n/\mathrm{F}$: $\phi(\boldsymbol{X})=\begin{cases}1 & \text{if } \sum_{i=1}^{n} X_i \geq k \\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$

(iv) Con/k/n/F: $\phi(\boldsymbol{X})=\prod_{j=1}^{n-k+1}\{1-\prod_{i=j}^{j+k-1}(1-X_i)\}$

と表わされる.

Structure ϕ の双対 (dual) ϕ^D を $\phi^D(\boldsymbol{X})=1-\phi(\boldsymbol{1}-\boldsymbol{X})$ で定義する. ここに $\boldsymbol{1}-\boldsymbol{X}=(1-X_1, \ldots, 1-X_n)$. 直列 (並列) の双対は並列 (直列) であり, k/n/F の双対は $n-k+1/n$/F である. また, Con/k/n/F の双対は k 個の成分 $i, i+1, \ldots, i+k-1$ を直列にしたものを 1 つと考え, $i=1, 2, \ldots, n-k+1$ として $n-k+1$ 個を並列に配置したシステムである.

システムが機能することに関し, i 番目の成分がどの程度重要であるかは

$$I_\phi(i)=\frac{1}{2^{n-1}}\cdot\sum_{\{X \mid X_i=1\}}\{\phi(1_i, \boldsymbol{X})-\phi(0_i, \boldsymbol{X})\}$$

で測り, structural importance of component i という. ただし$(1_i, \boldsymbol{X}), (0_i, \boldsymbol{X})$ は $\boldsymbol{X}$ の i 番目の成分をそれぞれ 1 と 0 としたものを表わす. 例えば Con/2/4/F では $I_\phi(1)=I_\phi(4)=1/4$, $I_\phi(2)=I_\phi(3)=1/2$ である.

システムは, システム成分の配置 (構造) を示す structure function $\phi(\cdot)$ と, 各成分が故障か機能しているかの状態を示す $X_1, \ldots, X_n$ の分布法則で記述されるものとする. 従って, structure function が$\phi(X_1, \ldots, X_n)$ で与えられるシステムの信頼度は$P(\phi(\boldsymbol{X})=1)=E\phi(X_1, \ldots, X_n)$ である. $X_1, \ldots, X_n$ が独立のとき, $P(\phi(\boldsymbol{X})=1)=h$ とおいて, $h(\cdot)$ を ϕ の reliability function という. これは成分の信頼度 $\boldsymbol{p}=(p_1, \ldots, p_n)$ の関数である (JIS でいう信頼度関数とは異なる).

成分間の相互関係で最も扱いの簡単な場合は, 各成分間の信頼度は独立で, 各成分の信頼度がすべて p と仮定される場合である. そこで $X_1, \ldots, X_n$ は独立で, 各 i に対して $P(X_i=1)=p$ とすれば, 4 つのシステムの reliability function は, 直列システムでは p^n, 並列システムでは $1-(1-p)^n$, k/n/F では$\sum_{x=0}^{k-1}\binom{n}{x}q^x(1-q)^{n-x}$, Con/$k/n$/F では $B_k(n, q:0)$ となる. 但し記号 $B_k(n, q:0)$ の意味は, $X \sim B_k(n, q)$ のとき $P(X=x)=B_k(n, q:x)$ である. 例えば$n=3, k=2, p=0.9$ とすると, 各システムの信頼度は直列で 0.729, 並列で 0.999, 2/3/F で 0.972, Con/k/n/F で 0.981 である.

ここで k/n/F と Con/k/n/F の reliability function について補足する. 試行数 n の独立ベルヌーイ試行で, $X_i=0$ を成功とする. このとき k/n/F が機能しているときとは, n 回中 k 回以上の成功が起こっていないときである. 即ち, 最大 $k-1$ 回まで成功が起こっているときである. 同様に Con/k/n/F が機能しているときとは, n 回中に連続した k 回以上の成功が 1 つも起こっていないときである. 上の最後の 2 つの reliability function はこれを表わしている. また $X_i=1$ を成功とすると, k/n/F が機能しているときとは, n 回中$n-k+1$ 回以上の成功が起こっているときである. これを式で表わせば $P(\phi(\boldsymbol{X})=1)=\sum_{x=n-k+1}^{n}\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$ であり, 上の結果と一致するはずである.

条件をゆるめて, $X_1, \ldots, X_n$ は独立で, 各 i に対して$P(X_i=1)=p_i$ とすれば, reliability function は直列システムでは $P(\phi(\boldsymbol{X})=1)=\prod_{i=1}^{n}p_i$, 並列システムでは $P(\phi(\boldsymbol{X})=1)=1-\prod_{i=1}^{n}(1-p_i)$ となる. k/n/F と Con/k/n/F ではこの様な簡単な形で表わすことは難しい.

各成分の故障は時間の経過に従って起こる場合を考える. 各成分の lifetime を $T_1, \ldots, T_n$ とする. 即ち, $P(T_i \leq t)$ は成分 i が時刻 t で故障する確率である. このとき i 番目の成分の状態を $T_i>t$ のとき $X_i(t)=1$, その他のとき $X_i(t)=0$ で表わす. T_i の分布関数を F_i とかくと, $P(X_i(t)=1)=P(T_i>t)=1-F_i(t)$ $(=\bar{F}_i(t)$ とおく) である. 従って $T_1, \ldots, T_n$ が独立ならば

$P(\phi(\boldsymbol{X})=1)=h(\bar{F}_1(t),\ldots,\bar{F}_n(t))$ である．例えば直列システムでは $P(\phi(\boldsymbol{X})=1)=\prod_{i=1}^{n}\bar{F}_i(t)$，並列システムでは $P(\phi(\boldsymbol{X})=1)=1-\prod_{i=1}^{n}(1-\bar{F}_i(t))$ である．

ここで述べた直列，並列，k/n/F の3つのシステムの信頼度は，n 個の独立な確率変数の最小値，最大値，k 番目の順序統計量の分布関数と密接に関係していることに注意したい．同様に Con/k/n/F の信頼度は，順序統計量の混合分布と関係している．

この章ではシステム成分の相互関係の仮定を

(1)　成分の信頼度はすべて p で，独立な分布に従う．
(2)　成分の信頼度は p_i $(i=1,2,\ldots,n)$ であるが，独立な分布に従う．
(3)　成分の信頼度は時刻とともに変わり，独立な分布に従う．

と分けて行った．この報告では主に (1) (2) (3) について考察するが，システム成分の相互関係の仮定が独立でない場合（例えば，マルコフに従う）についても若干議論したい．

3.　Consecutive-k-out-of-n: F システムの例

ここでは文献に紹介されている Con/k/n/F の例を述べる．4.1 節ではこのシステムの拡張とその例について述べる．

例 1.　通信システム，オイル（ガス）パイプラインシステム (Chiang and Niu (1981))．n 個のリレーステーションをもつ通信システム（ステーションには番号 $1,2,\ldots,n$ がつけられ，衛星でも地上でもよい）で，1 から n へこの順で信号を送る．各ステーションは k 個先のステーションまで送信できるとすれば，このシステムは Con/k/n/F である（図 1）．n ケ所の中継点のポンプで送油するオイルパイプラインシステムでは，2 つ先の中継点まで送油できるとすれば，このシステムは Con/2/n/F である．

例 2.　ネットワークシステム (Bollinger and Salvia (1982))．図 2 のようなネットワークシステム（k-in-a-row failure network; $k=2$）で，$E_1,\ldots,E_5$ の連続した 2 つが故障すると，C へ連絡できないので，このシステムは Con/2/5/F である．これは集積回路の設計でしばしば生じる (Derman et al. (1982))．

例 3.　移動リレー通信システム．宇宙探査機から各ステーションを通して地球で受信する．

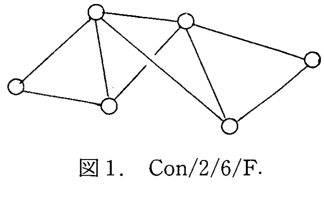

図 1.　Con/2/6/F.

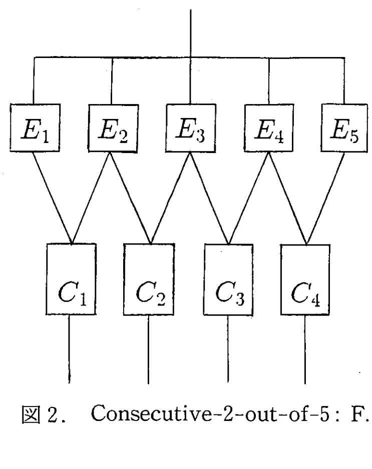

図 2.　Consecutive-2-out-of-5: F.

これは例1で示した通信システムと同じであるが，各ステーションは等速で移動しており，k 連続して送信できないと，そこから先のすべてが失われる．従って，n が変数として扱われる (Chiang, D.T. and Chiang, R. (1986))．

例 4. 貯水池問題．n 日という期間内で k 日連続して雨が降ると，貯水池があふれる（決壊する）(Tong (1985))．ここでは配置が問題となる．

この他に Con/k/n/F の例として Shanthikumar (1987) は vacuum systems in accelerators があると述べている．しかしこの論文にはどの文献か特定していない．Griffith and Govindarajulu (1985) ではないか（論文未入手）．Griffith (1986) は Brookhaven National Lab. で計画された加速器における vacuum system のモデルと述べている．

Con/k/n/F の例ではないが，Tong (1985) は連続成功連の数の分布の応用例として，traffic flow の問題を紹介している．それは Feller (1968) の 170 頁にある．

4. 何が問題か

信頼性理論での基本的問題は種々のシステムの信頼度の計算である．特に前の章の例で，例1と例2での主要な問題は Con/k/n/F の信頼度の計算である．例3では平均的に何個のステーションが必要かも問題となる．

最も単純な場合は，各成分の信頼度がすべて等しく p で，且つ独立である (iid) と仮定されたときである．この仮定の下では，問題の取扱いが比較的容易であり，多くの見通しのよい考察がなされている．しかしこの制約は述べた例に対しては現実的でない．そこで条件をゆるめて，各成分の信頼度が p_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ で独立と仮定したモデルを考える．例4ではこのモデルの下で，システムの成分の置き換えが可能として，システムの信頼度が最大（最小）となるような配置はどの様なものか，も問題として取扱われている．

Con/k/n/F では何が問題かを整理するために，成分に関する相互関係の仮定を次の4つに分ける．(1) iid の場合，(2) 独立だが信頼度が異なる，(3) 独立で故障するまでの時間が分布する，(4) dependency がある．いずれの場合にもシステムの信頼度を求めることが基本的な問題である．また (2) では配置の問題があり，(3) のダイナミックスの入った場合では，システムの寿命の分布やその特性量（平均や分散）を求めることも問題となる．(4) ではマルコフの場合で考察されている．次の節で Con/k/n/F システムの拡張を述べるが，拡張を除けば，以上が Con/k/n/F で扱われた問題である．各拡張に対して，上のように分類すれば，問題は容易に整理されるだろう．

4.1 Consecutive-k-out-of-n: F システムの変形と拡張

次にシステムの拡張や変形したモデルについて説明する．

これまでは Con/k/n/F といえば n 個の成分が一列に並んで，各成分から k 個先までつながったシステムをさした．これに対し，はじめの成分と終りの成分がつながった場合のシステムを circular-con/k/n/F という (Derman et al. (1982)，図3)．Circular に対して，これまでのシステムを linear-con/k/n/F システムということがある．

この他に Con/k/n/F を変形したいくつかのモデルが考察されている．以下これらのモデルの説明とこれに関連した文献を記す．

1. Strict consecutive-k-out-of-n: F システム (Bollinger (1985)): n 個からなる成分の

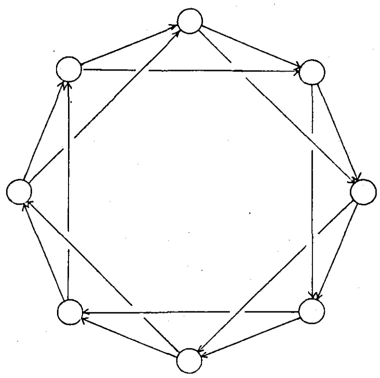

図3. circular-con/k/n/F.

うち，k 個以上の連続した成分が故障したときシステムが故障し，且つk より少ない連続した故障成分がない (Papastavridis (1986b), Philippou and Makri (1987), Kossow and Preuss (1987), Rushdi (1990)).

2. k-within-m-out-of-n: F システム (Griffith (1986)): n 個からなる成分を1列に並べ，m 個の連続した成分のウィンドのなかで，少なくとも k 個の成分が故障したときシステムが故障する．下の3と同じ．

Papastavridis (1988) は表題にこのシステムを Consecutive-k-within-m-out-of-n: F とかいた．

3. Consecutive-k-out-of-r-from-n: F システム (Sfakianakis et al. (1992)): n 個からなる成分を1列に並べ，r 個の連続した成分のウィンドのなかで，少なくともk 個の成分が故障したときシステムが故障する．上の2と同じ．$r=k$ のとき Con/k/n/F, $r=n$ のときk/n/F である．

n バイトのメッセージを送信するシステムで，各バイトの最後はパリティービットである．このとき n 個のパリティービットの列において，長さ4のウィンドの中に2つ以上のエラーを見つけたとき，システムは警告を発するとする．このシステムは Consecutive-2-out-of-4-from-n: F システムである．

4. m-consecutive-k-out-of-n: F システム (Papastavridis (1990)): n 個からなる成分のうち，k 個連続した成分が故障し，このようなことが少なくともm ケ所あるとシステムが故障する．$m=1$ のとき Con/k/n/F である．

このシステムの信頼度はオーダー k の2項分布の確率関数 $B_k(n, q: x)$ を用いて$\sum_{x=0}^{m-1}B_k(n, q: x)$ と表わせる．この値を成分が iid のとき Godbole (1990a), ポアソン近似を Godbole (1990b), Fu (1993), マルコフのときポアソン近似を Godbole (1993) で議論している．

5. Consecutively-connected システム (Shanthikumar (1987)): source (0), components $(1, 2, \ldots, n)$, sink $(n+1)$ から成り，source は $(1, 2, \ldots, k_0)$ とつながり，j $(1\leq j\leq n)$ は $(j+1, \ldots, j+k_j)$ と弧でつながる．ただし k_j は $0\leq j\leq n$ で $k_j\geq 1$. n 個の成分が故障する可能性がある．source から sink へつながったときシステムが機能する．$k_j=\min\{k, n+1-j\}$, $(0\leq j\leq n)$ のとき，Con/k/n/F である．即ち，Con/k/n/F は，1つの成分が k 個の成分と連絡しているのに対し，このシステムは i 番目の成分が k_i 個の成分と連絡していると一般化した．また，さらにこの一般化を Hwang and Yao (1989) が扱った．

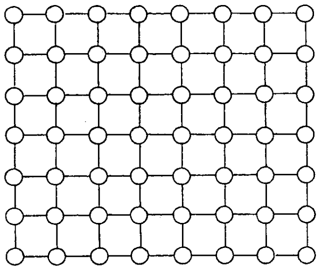

図 4. 2 次元 linear-con/k/n/F.
connected-(r, s)-out-of-(m, n) : F.

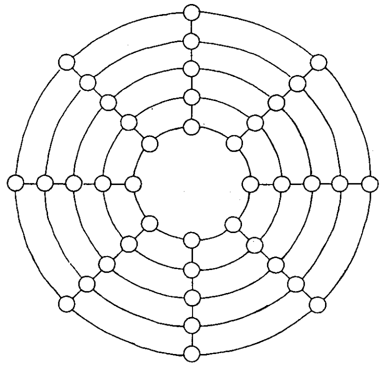

図 5. 2 次元 circular-con/k/n/F.

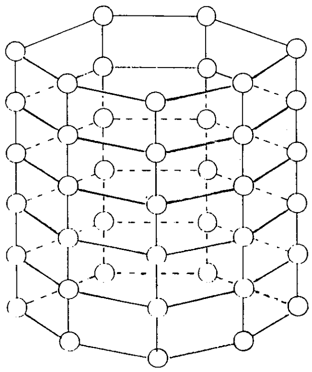

図 6. cylindrical.

また，Con/k/n/F の拡張の一つとして多次元化がある．縦，横がともに n 個の，合計 n^2 個の成分から成るシステムで，縦，横がともに少なくとも連続した k 個の，合計 k^2 個の成分が故障したとき，システムが故障する．この様な 2 次元 linear-con/k/n/F を Salvia and Lasher (1990) は導入し (図 4)，このシステムの信頼度を論じた．誤りの指摘とその修正が Ksir (1992) にある．Boehme et al. (1992) はこの拡張だけでなく，2 次元 circular-con/k/n/F (図 5) や cylindrical (図 6) な場合についても述べ，これらのシステムの信頼度を議論している．今後高次元のモデルについても議論されるだろう．

Boehme et al. (1992) は connected-(r, s)-out-of-(m, n): F システムを提案した．このシステムは m 行，n 列から成る格子点上に配置された mn 個の成分から成り，このうち，r 行，s 列が交わってできる長方形内の rs 個のすべてが故障したとき，このシステムは故障する．山本・宮川 (1993) は成分の信頼度は独立だが，同一でないとき，このシステムの信頼度を求める漸化式を与えた．

このシステムの例が与えられている．ある電子製品のコネクターのピンは mn 個から成り，rs 個のピンが故障したとき機能しない．病的異変を X 線で探すとき，異変は rs の面積がないと見つからない．以上の例は Salvia and Lasher (1990) による．平面監視システムは mn 個の TV カメラから成り，1 つの TV カメラでカバーできる範囲が重なっている．rs 個の TV カメ

ラが故障すると監視できない部分ができる．この例は Boehme et al. (1992) による．また山本・宮川 (1993) は大ホールの照明システムも一例と指摘している．

4.2 何が考察されてきたか

前にも述べたように，信頼性理論の主要な問題は与えられたシステムの信頼度を求めることである．各成分の信頼度が与えられたと仮定し，成分相互の関係をもとに構成されたシステムの信頼度を計算することである．

Con/k/n/F の信頼度を求める方法としては解析的に示すことは稀で，むしろ漸化式を利用し，計算アルゴリズムを具体的に与えている．信頼度を求めることは初期の問題であったが，しだいに如何に早い計算アルゴリズムを与えるかも議論されている．ただこれは主要な問題とはならないだろう．信頼度を求めることや計算の速さを扱った論文では Kontoleon (1980), Chiang and Niu (1981), Bollinger and Salvia (1982), Derman et al. (1982), Shanthikumar (1982), Bollinger (1982), Hwang (1982), Lambiris and Papastavridis (1985), Bollinger (1986), Hwang (1986), Antonopoulou and Papastavridis (1987), Du and Hwang (1988), Wu and Chen (1992, 1993), Hwang (1993) がある．これらは linear や circular だけ，また両方を扱っている．

直接 Con/k/n/F の信頼度を求める代わりに，上と下から評価することも行なわれている．Derman et al. (1982), Salvia (1982), Papastavridis (1986a), Papastavridis and Koutras (1993) は Con-k-within-m-out-of-n：F の信頼度について評価している．

また Con/k/n/F の信頼度の近似値を求めることも行なわれている．例えばシステムを構成している成分の個数 n が大きくなった場合の信頼度を求める．Chao and Lin (1984), Fu (1985, 1986a), Papastavridis (1987b), Papastavridis and Chrysaphinou (1988), Chao and Fu (1989).

なお，non-identical の場合で，システムの信頼度を求めることは Kossow and Preuss (1989) (訂正が Kossow (1989) にあり) で議論されている．Fu (1986b) は n が大きいときの評価を与えている．

Con/k/n/F の structural importance については Papastavridis (1987a), Papastavridis and Sfakianakis (1991) が考察している．Kuo et al. (1990) は Con/k/n/G について Con/k/n/F との関連で議論している．ここに Con/k/n/G とは，n 個の成分のうち少なくとも 1 つの連続した k 個の成分が機能 (Good) していれば，システムが機能するシステムである (Con/k/n/F の双対)．駐車場は平行駐車で，乗用車用のスペースに n 台分に区切られている．そこに 2 台分のスペースを必要とするバスが駐車する．駐車できれば機能 (good)，できなければ故障 (fail) とすれば，Con/2/n/G である．

3 章の例 3 の relayed communication システム (Chiang, D.T. and Chiang, R. (1986)) については Hwang (1988), Chrysaphinou et al. (1989), Hwang and Shi (1989) で議論されている．

各成分の信頼度が独立で，且つすべて等しいという仮定をゆるめ，独立ではあるが成分ごとに異なるとする．この様な条件のゆるめ方で生じる問題がある．即ち，システムの信頼度を最も高くするための各成分の最適配置 (optimal sequence) の問題である．n 個の成分の信頼度が p_i $(i=1, 2, ..., n)$ で $p_1<\cdots<p_n$ とする．成分は置き換えが可能とすれば，置き換えることによってシステムの信頼度が最大 (最小) となる配置はどのようなものか．Derman et al. (1982) は $k=2$ で $(1, n, 3, n-2, ..., n-3, 4, n-1, 2)$ と予想した．これは特別な場合に Wei et al. (1983) によって議論され，Malon (1984) によって解かれた．Tong (1985) は 2 値系列の最長連の長さを扱った問題から $k\geq n/2$ などの制約のもとで解を与えた．このことは Con/k/n/F の問題を信頼性理論の中で議論するよりも，別の視点で議論することで良い見通しを得る一例である．4 章の例 4 の問題にこの結果を用いると，n 日間のうち，中程あたりの連続した k 日が

降りやすいと予報されるとき，貯水池が決壊（システムが故障）する確率が大きくなるといえる．また circular の場合については Tong (1986) や Du and Hwang (1986) で議論されているが，後者は linear が circular の特別な場合とみて考察している．$k=2$ の条件をゆるめた議論は Malon (1985) にあるが，最適配置を特徴づける n と k の値について述べている．なお，$k \geq n/2$ の制約をとり，最長連と最適配置についての議論は Papastavridis and Hadzichristos (1988) でなされている．Hwang and Dinghua (1987), Chang and Hwang (1988) も最適配置について考察している．

1つの成分が故障したとき，他の成分に負荷をもたらすと考え，成分間に dependency を入れた場合の議論がなされている．Papastavridis and Lambiris (1987), Ge and Wang (1990) は成分間に Markov dependency を入れた場合のシステムの信頼度を求めている．また，k 連続成分の故障でシステムの故障が起こるので，この負荷は $k-1$ 個の成分まであるとし，$k-1$ step Markov で成分間 dependency を入れて考察している (Fu (1986b))．拡張されたオーダー k の 2 項分布 (Aki (1985)) との関係に注意されたい．

次に，成分の信頼度にダイナミックスを仮定した場合の Con/k/n/F の研究について述べ，この章を終わろう．

成分の故障の確率が時間の経過とともに変わるとき，IFR (Increasing Failure Rate) に関する議論は，信頼性理論では多くなされている．しかし Con/k/n/F においては少ない．各成分の lifetime 分布が IFR であれば，$k=2$ の circular である場合にシステムの lifetime 分布が IFR である (Derman et al. (1982))．この他に Griffith (1986) がある程度である．

成分の故障は独立で同一の分布に従うとし，成分の信頼度を p（故障の確率を $q=1-p$），Con/k/n/F の信頼度を $h(p)=h(p, k, n)$ とする．この p が時刻 t に依存している．即ち，T_i を成分 i の failure time とすると，$P(T_i \leq t)=p_i(t)$ は成分 i が時刻 t で故障する確率を表わす．成分は独立で同一の分布に従うとしているので，$p_i(t)$ の i をとって，単に $p(t)$ とする．また Con/k/n/F の failure time を T とする．このとき，時刻 t でのシステム Con/k/n/F の信頼度は $h(1-p(t), k, n)$ であり，時刻 t での故障の確率は $P(T \leq t)=1-h(1-p(t), k, n)$ で与えられる．従って，p が与えられたとして，k, n についての $h(p, k, n)$ の漸化式から，$h(p, k, n)$ の値を求め，成分の故障の確率が時間の経過とともに変わるモデルに利用する．この計算の実行では，計算量が飛躍的に増えるので，高速に $h(p, k, n)$ を求めることが必要になる．そこでシステムの lifetime についての議論がなされている．T のモーメント（とくに平均や分散），$P(T \leq t)$ や pdf を求めること，また $P(T \leq t)$ の評価，例えば，$n \rightarrow \infty$ のときの極限分布，などの議論がなされている．

システムの lifetime 分布や平均などを扱った論文については，Chen and Hwang (1985)（この論文の訂正が Chen (1989) にある），Bollinger and Salvia (1985), Shanthikumar (1985), Papastavridis and Hadjichristos (1987)（この論文の訂正が Sasaki et al. (1992) と Satam (1992) にあり，前者の訂正には更に Sasaki (1992) による訂正がある），Papastavridis (1989), Iyer (1990a)（この論文の訂正が Iyer (1990b) にある），Kossow and Preuss (1991), Iyer (1992) がある．Papastavridis and Koutras (1992) は修復をもつ場合の $P(T \leq t)$ の評価を与えている．

Bollinger and Salvia (1985) は成分の分布が iid で，すべて等しい定数の故障率 (failure rate) をもつ分布（指数分布）のとき，システムが故障するまでの時間の分布の平均，分散を求めている．時間の経過とともに，成分がつぎつぎに故障していく．1 から n までの成分の故障の起こり方を考え，m ケ所の成分の故障でシステムの故障が起こるとき，長さ m の path という．長さ m の path の起こる場合の数 r_{mk} の漸化式を求め，これを用いて平均と分散を与えている．

これは，すべて等しい定数の故障率をもつ場合，本質的にはこの定数に依らないで，r_{mk} が問題となる．また r_{mk} はシステムが故障したとき成分の故障数の最大値に関係している．Satam (1991) は最大値の誤りを訂正．Hwang (1991) は r_{mk} の漸化式を与えた．

Chen and Hwang (1985) について述べよう．成分の信頼度はすべて p であるとし，独立に同一の分布に従う場合の Con/k/n/F の信頼度を $P(\phi(\boldsymbol{X})=1)=h(p)$ とかく．n 個の成分において，連続した k 個の成分の故障が起こるまでの waiting time がそれぞれ $k, k+1, \ldots, n$ のときまでの確率の和を求め，1 からこれをひいて $h(p)$ として計算する手順を与えた．さらに成分の failure time cdf を $G(t)$ としたとき，p に $1-G(t)$ を代入して，システムの failure time cdf を求めている．$h(p)$ には Hwang (1982) の結果を利用している．ここで，この waiting time 分布はオーダー k の幾何分布であることに注意したい．また $h(p)$ の p に $1-G(t)$ を代入することは，計算機プログラムのうえでは非常に便利であり，とにかく信頼度という数値は求めることができる．この意味で信頼性理論の議論では，計算のアルゴリズムが開発，紹介されている．

p に $1-G(t)$ を代入する方法で，Shanthikumar (1985) はシステムの lifetime 分布を求めている．但し，ここでは独立性をややゆるめて，成分間に exchangeability を仮定し，$h(p)$ は Shanthikumar (1982) で求めたものを利用している．Papastavridis (1989) はやはり成分間に exchangeability を仮定し，circular の場合の lifetime 分布を求める漸化式を与えている．

Papastavridis and Hadjichristos (1987) は成分の lifetime 分布が iid のとき，システムの lifetime 分布の平均を議論した．成分の lifetime 分布がワイブル分布のとき，linear と circular のシステムの lifetime 分布の平均と分散を与えている．

また，$n\to\infty$ のとき，システムの lifetime 分布の極限分布については以下の論文で議論されている．Papastavridis (1988) はある条件の下で，成分の lifetime が Weibull 分布に従うとき，Con/k/within/m/n/Fの lifetime 分布は，$n\to\infty$ のとき Weibull 分布に従うことを導いた．Papastavridis (1987b) はその特別な場合である．これと類した論文は Papastavridis and Chrysaphinou (1988), Chao and Fu (1989), Chrysaphinou and Papastavridis (1990), Papastavridis (1990) で，Papastavridis and Koutras (1992) は修復をもつ場合である．

4 章では成分に関する仮定を 4 つに分け，Con/k/n/F の変形や拡張と，どのような考察がなされているかについて述べてきた．この整理により，このシステムについての残された問題点が見えるだろうし，残された場合の議論が望まれる．この結果，あるシステムが与えられたとき，より多くのモデルからより現実的なモデルを選択することが可能になる．理論的な立場で述べるならば，一般的な結果を求めておくことによって理論が整理される．この点と次の章で述べるオーダー k の離散分布（主にオーダー k の 2 項分布とその変形，拡張）の結果を組み合わせれば，システムの信頼度を求める問題に対し，いくつかの示唆を与えることになるだろう．

5. Consecutive-k-out-of-n: F システムとオーダー k の離散分布との関係

1 章で述べたように，Con/k/n/F の信頼度はオーダー k の 2 項分布の確率関数で与えられる．オーダー k の離散分布論では iid の仮定から，dependency のある場合へと拡張されている．これと平行するように Con/k/n/F の分野でも，成分間の信頼度に dependency をいれた場合へと拡張されている．この章では Con/k/n/F とオーダー k の離散分布の関係について述べるとともに，オーダー k の離散分布論で得られている結果が Con/k/n/F の信頼度の議論に適用できる点について述べたり，議論の望まれる問題について述べたい．

n 個の独立なベルヌーイ試行において，k 連続成功の数の分布がオーダー k の 2 項分布であ

る．これは最も簡単なオーダー k の離散分布であり，この拡張が議論されている．一般化のひとつとして，独立性をゆるめる．Con/k/n/F の成分の仮定と対応させて，独立なベルヌーイ試行を含めて，次の 4 つに分類する．

$\{0, 1\}$ の値をとる確率変数の列 $X_1, X_2, \ldots$ が従う分布法則は次の 4 つであるとする．

状況 1.　$i=1, 2, \ldots, n$ に対し，$P(X_i=1)=p$, $P(X_i=0)=1-p$ なる分布に従う独立な確率変数列.

状況 2.　$i=1, 2, \ldots, n$ に対し，$P(X_i=1)=p_i$, $P(X_i=0)=1-p_i$ なる分布に従う独立な確率変数列.

状況 3.　オーダー k の 2 値系列 (Aki (1985)): $X_0=0$ a.e., $P(X_m=1 \mid X_0=x_0, X_1=x_1, \ldots, X_{m-1}=x_{m-1})=p_j$，ここに $j=r-[(r-1)/k]\cdot k$ で，r は $x_{m-r}=0$ となる最小の正整数.

状況 4.　定常マルコフチェイン: $P(X_0=0)=p_0$, $P(X_0=1)=1-p_0$ で，$P(X_{i+1}=0 \mid X_i=0)=p_{00}$, $P(X_{i+1}=1 \mid X_i=0)=p_{01}=1-p_{00}$, $P(X_{i+1}=0 \mid X_i=1)=p_{10}$, $P(X_{i+1}=1 \mid X_i=1)=p_{11}=1-p_{10}$ $(i=0, 1, 2, \ldots, n-1)$.

尚，状況 1, 2, 3, 4 の相互の関係は，状況 2, 3, 4 が特別な場合として状況 1 を含んでいる．

システムでの意味は，$i=1, 2, \ldots, n$ に対して，システムの第 i 番目の成分が機能していれば値 1，故障していれば値 0，をとる確率変数 X_i で成分の状態を表わす．このとき $X_1, X_2, \ldots, X_n$ が 4 つの状況に従うと仮定した場合を考察する．上の 4 つの状況で $X_1, X_2, \ldots, X_n$ における長さ k の連続した 1 の連の数をそれぞれ (1) 状況 1 で $N_{k,n}$（これはオーダー k の 2 項分布に従う），(2) 状況 2 で $NN_{k,n}$, (3) 状況 3 で $EN_{k,n}$（これは拡張されたオーダー k の 2 項分布に従う），(4) 状況 4 で $MN_{k,n}$，とかく．

システムの成分が上の 4 つの状況に従っているとき，Con/k/n/F の信頼度は夫々 $P(N_{k,n}=0)$, $P(NN_{k,n}=0)$, $P(EN_{k,n}=0)$, $P(MN_{k,n}=0)$ で与えられる．ただし X_i が 1 と 0 をとる確率を入れ換える．Aki (1985), Aki and Hirano (1988, 1993) は，値 0 の確率だけでなく，任意の値に対する確率を漸化式で与えている．

Con/k/n/F の信頼度と連続成功連の長さとの関係で云えば，長さ k というよりも，むしろ長さ k 以上の連続成功連と云う方が自然である．Goldstein (1990) は状況 1 で，長さ k 以上の連続成功連の数の分布のポアソン分布による近似を議論した．近似ではなく，厳密理論の観点から，Hirano and Aki (1993) は状況 4 で，この場合の数え方での確率関数の漸化式，確率生成母関数を与えている．

最長連の長さ L_n との関係について述べる．$X_1, X_2, \ldots, X_n$ において，連続した 1 の連の個数を J とする．J は確率変数で，連続した 1 の連の長さを $R_1, \ldots, R_J$ とかく．このとき $L_n=\max\{R_1, \ldots, R_J\}$ とおくと，$P(L_n<k)=1-P(L_n\geq k)=P(N_{k,n}=0)$ とかける．$N_{k,n}$ の代わりに $NN_{k,n}, EN_{k,n}, MN_{k,n}$ とおいてみれば，議論が望まれる問題であろう．また，Goldstein の数え方での個数を $GN_{k,n}$（状況 1），$GMN_{k,n}$（状況 4）とすれば $P(L_n<k)=P(N_{k,n}=0)=P(GN_{k,n}=0)$ であり，$GMN_{k,n}$ についても同様のことが成り立つ．

システムが故障したとの観測から，成分の信頼度を推測する議論は，一つの例外を除いてほとんど手がつけられていない．Aki and Hirano (1989) は最も単純な場合について成分の信頼度 p の推定を議論している．即ち，状況 1 で，Con/k/n/F が機能しているか，否かの状態から母数 p の推定を次の様に議論している．$X_1, \ldots, X_m$ を $B_k(n, p)$ からの iid 標本とし，$X_i\geq 1$ のとき $Y_i=0$, $X_i=0$ のとき $Y_i=1$ をとる確率変数を Y_i, $i=1, \ldots, m$ とする．このとき Y_i は $B(1, c(n))$ に従う確率変数とみることができる．そこで $Y_1, \ldots, Y_m$ を用いて，p の推定を議論している．最尤推定量 $\hat{p}$ とその漸近分散を求めている．ここで m 個の標本ということは，n 個の成分

から成るシステムが m 個あるということであり，m が適当な大きさの場合には良い推定ができるだろう．そこで標本数の少ないときの議論が望まれる．特に，このシステムが1つの場合 ($m=1$) の p の推定の議論が必要である．

また，状況2, 3, 4での母数の推定についての議論がなされていないし，Goldsteinの数え方による場合についても同様である．

その他のオーダー k の分布との関連について．移動リレー通信システムはChiang, D.T. and Chiang, R. (1986) に登場し，Chrysaphinou et al. (1989) が発展させている．そこでのstationsの数の期待値はオーダー k の幾何分布に関連している．これは状況1で議論されているので，状況2, 3, 4に対応するオーダー k の幾何分布に発展させうる．これも議論の望まれる問題である．

本稿を終えるにあたり，今後の展望について述べる．推測の議論はほとんど手がつけられていないことは前に述べた．ダイナミックスの導入された場合の推論，状況3, 4などでの考察は興味のある問題である．

また，q は通常小さいので，ポアソン分布による近似が考えられる．Stein-Chen methodが利用されている．成分がiidのときGodbole (1990b), Fu (1993)，またマルコフのときGodbole (1993) で議論されている．ポアソン分布近似についてはBarbour et al. (1992) を参照されたい．高次元の扱いでは，厳密な信頼度を求めることが難しいので利用価値があろう．Fu and Koutras (1994) は2次元linear-con/k/n/Fの信頼度のポアソン分布近似について考察している．一般的に，これらの近似は状況によって著しく悪いときがあるので注意が必要である．また評価がパラメータに依存するので，推測の問題には使えない．

謝 辞

本報告は安芸重雄氏（大阪大学基礎工学部）との共同研究に端を発し，以来，同氏との多くの議論によりまとめられている．折りにふれ，多くの有益なコメントを頂いた．ここに記してお礼申し上げる．また統計数理研究所 共同研究5-共研A-7および5-共研A-8の援助を受けた．

参 考 文 献

Consecutive-k-out-of-n : F systemsの関係

Antonopoulou, I. and Papastavridis, S. (1987). Fast recursive algorithm to evaluate the reliability of a circular consecutive-k-out-of-n : F system, *IEEE Transactions on Reliability,* **R-36**, 83-84.

Boehme, T.K., Kossow, A. and Preuss, W. (1992). A generalization of consecutive-k-out-of-n : F systems, *IEEE Transactions on Reliability,* **41**, 451-457.

Bollinger, R.C. (1982). Direct computation for consecutive-k-out-of-n : F systems, *IEEE Transactions on Reliability,* **R-31**, 444-446.

Bollinger, R.C. (1985). Strict consecutive-k-out-of-n : F systems, *IEEE Transactions on Reliability,* **R-34**, 50-52.

Bollinger, R.C. (1986). An algorithm for direct computation in consecutive-k-out-of-n : F systems, *IEEE Transactions on Reliability,* **R-35**, 611-612.

Bollinger, R.C. and Salvia, A.A. (1982). Consecutive-k-out-of-n : F networks, *IEEE Transactions on Reliability,* **R-31**, 53-56.

Bollinger, R.C. and Salvia, A.A. (1985). Consecutive-k-out-of-n : F system with sequential failures, *IEEE Transactions on Reliability,* **R-34**, 43-45.

Chang, G.J. and Hwang, F.K. (1988). Optimal consecutive-k-out-of-n systems under a fixed budget, *Probability in the Engineering and Informational Sciences,* **2**, 63-73.

Chao, M.T. and Fu, J.C. (1989). A limit theorem of certain repairable systems, *Ann. Inst. Statist. Math.*, **41**, 809-818.
Chao, M.T. and Lin, G.D. (1984). Economical design of large consecutive-k-out-of-n : F systems, *IEEE Transactions on Reliability,* **R-33,** 411-413.
Chen, R.W. and Hwang, F.K. (1985). Failure distributions of consecutive-k-out-of-n : F systems, *IEEE Transactions on Reliability,* **R-34**, 338-341.
Chen, R.W. (1989). Correction to : Failure distribution of consecutive-k-out-of-n : F systems, *IEEE Transactions on Reliability,* **38**, p. 474.
Chiang, D.T. and Chiang, R. (1986). Relayed communication via consecutive-k-out-of-n : F system, *IEEE Transactions on Reliability,* **R-35**, 65-67.
Chiang, D.T. and Niu, S. (1981). Reliability of consecutive-k-out-of-n : F system, *IEEE Transactions on Reliability,* **R-30**, 87-89.
Chrysaphinou, O. and Papastavridis, S. (1990). Limit distribution for a consecutive-k-out-of-n : F system, *Adv. in Appl. Probab.*, **22**, 491-493.
Chrysaphinou, O., Papastavridis, S. and Sypsas, P. (1989). Relayed communication via parallel redundancy, *IEEE Transactions on Reliability,* **38**, 454-456.
Derman, C., Lieberman, G.J. and Ross, S.M. (1982). On the consecutive-k-of-n : F system, *IEEE Transactions on Reliability,* **R-31**, 57-63.
Du, D.Z. and Hwang, F.K. (1986). Optimal consecutive-2-out-of-n systems, *Math. Oper. Res.*, **11**, 187-191.
Du, D.Z. and Hwang, F.K. (1988). A direct algorithm for computing reliability of a consecutive-k cycle, *IEEE Transactions on Reliability,* **37**, 70-72.
Fu, J.C. (1985). Reliability of a large consecutive-k-out-of-n : F system, *IEEE Transactions on Reliability,* **R-34**, 127-130.
Fu, J.C. (1986a). Bounds for reliability of large consecutive-k-out-of-n : F systems with unequal component reliability, *IEEE Transactions on Reliability,* **R-35**, 316-319.
Fu, J.C. (1986b). Reliability of consecutive-k-out-of-n : F systems with $(k-1)$-step Markov dependence, *IEEE Transactions on Reliability,* **R-35**, 602-606.
Fu, J.C. (1993). Poisson convergence in reliability of a large linearly connected system as related to coin tossing, *Statist. Sinica,* **3**, 261-275.
Fu, J.C. and Koutras, M.V. (1994). Poisson approximations for 2-dimensional patterns, *Ann. Inst. Statist. Math.*, **46**, 179-192.
Ge, G. and Wang, L. (1990). Exact reliability formula for consecutive-k-out-of-n : F systems with homogeneous Markov dependence, *IEEE Transactions on Reliability,* **39**, 600-602.
Griffith, W.S. (1986). On consecutive-k-out-of-n : F systems and their generalizations, *Reliability and Quality Control* (ed. A.P. Basu), 157-165, North-Holland, Amsterdam.
Griffith, W.S. and Govindarajulu, Z. (1985). Consecutive-k-out-of-n failure systems: reliability, availability, component importance, and multistate extensions, *Amer. J. Math. Management Sci.*, **5**, 125-160.
Godbole, A.P. (1993). Approximate reliabilities of m-consecutive-k-out-of-n : failure systems, *Statist. Sinica,* **3**, 321-327.
Hwang, F.K. (1982). Fast solutions for consecutive-k-out-of-n : F system, *IEEE Transactions on Reliability,* **R-31**, 447-448.
Hwang, F.K. (1986). Simplified reliabilities for consecutive-k-out-of-n systems, *SIAM J. Algebraic Discrete Methods,* **7**, 258-264.
Hwang, F.K. (1988). Relayed consecutive-k-out-of-n : F lines, *IEEE Transactions on Reliability,* **37**, 512-514.
Hwang, F.K. (1991). An explicit solution for the number of minimal p-cutsequences in a consecutive-k-out-of-n : F system, *IEEE Transactions on Reliability,* **40**, 553-554.
Hwang, F.K. (1993). An $O(kn)$-time algorithm for computing the reliability of a circular consecutive-k-out-of-n : F system, *IEEE Transactions on Reliability,* **42**, 161-162.
Hwang, F.K. and Dinghua, S. (1987). Redundant consecutive-k systems, *Oper. Res. Lett.*, **6**, 293-296.
Hwang, F.K. and Shi, D. (1989). Optimal relayed mobile communication systems, *IEEE Transactions on Reliability,* **38**, 457-459.

Hwang, F.K. and Yao, Y.C. (1989). Multistate consecutively-connected systems, *IEEE Transactions on Reliability,* **38**, 472-474.

Iyer, S. (1990a). Distribution of time to failure of consecutive-k-out-of-n : F systems, *IEEE Transactions on Reliability,* **39**, 97-101.

Iyer, S. (1990b). Correction to : Distribution of time to failure of consecutive-k-out-of-n : F system, *IEEE Transactions on Reliability,* **39**, p. 183.

Iyer, S. (1992). Distribution of the lifetime of consecutive-k-within-m-out-of-n : F systems, *IEEE Transactions on Reliability,* **41**, 448-450.

Kontoleon, J.M. (1980). Reliability determination of a r-successive-out-of-n : F system, *IEEE Transactions on Reliability,* **R-29**, p. 437.

Kossow, A. and Preuss, W. (1987). Failure probability of strict consecutive-k-out-of-n : F systems, *IEEE Transactions on Reliability,* **R-36**, 551-553.

Kossow, A. and Preuss, W. (1989). Reliability of consecutive-k-out-of-n : F systems with nonidentical component reliabilities, *IEEE Transactions on Reliability,* **38**, 229-233.

Kossow, A. (1989). Correction to : Reliability of consecutive-k-out-of-n : F systems with nonidentical component reliabilities, *IEEE Transactions on Reliability,* **38**, p. 482.

Kossow, A. and Preuss, W. (1991). Mean time-to-failure for a linear-consecutive-k-out-of-n : F system, *IEEE Transactions on Reliability,* **40**, 271-272.

Ksir, B. (1992). Comment on : 2-dimensional consecutive-k-out-of-n : F models, *IEEE Transactions on Reliability,* **41**, p. 575.

Kuo, W., Zhang, W. and Zuo, M. (1990). A consecutive-k-out-of-n : G system : the mirror image of a consecutive-k-out-of-n : F system, *IEEE Transactions on Reliability,* **39**, 244-253.

Lambiris, M. and Papastavridis, S. (1985). Exact reliability formulas for linear & circular consecutive-k-out-of-n : F systems, *IEEE Transactions on Reliability,* **R-34**, 124-126.

Malon, D.M. (1984). Optimal consecutive-2-out-of-n : F component sequencing, *IEEE Transactions on Reliability,* **R-33**, 414-418.

Malon, D.M. (1985). Optimal consecutive-k-out-of-n : F component sequencing, *IEEE Transactions on Reliability,* **R-34**, 46-49.

Papastavridis, S. (1986a). Upper and lower bounds for the reliability of a consecutive-k-out-of-n : F system, *IEEE Transactions on Reliability,* **R-35**, 607-610.

Papastavridis, S. (1986b). Algorithms for strict consecutive-k-out-of-n : F systems, *IEEE Transactions on Reliability,* **R-35**, 613-615.

Papastavridis, S. (1987a). The most important component in a consecutive-k-out-of-n : F system, *IEEE Transactions on Reliability,* **R-36**, 266-268.

Papastavridis, S. (1987b). A limit theorem for the reliability of a consecutive-k-out-of-n system, *Adv. in Appl. Probab.,* **19**, 746-748.

Papastavridis, S. (1988). A Weibull limit for the reliability of a consecutive-k-within-m-out-of-n system, *Adv. in Appl. Probab.,* **20**, 690-692.

Papastavridis, S.G. (1989). Lifetime distribution of circular consecutive-k-out-of-n : F systems with exchangeable lifetimes, *IEEE Transactions on Reliability,* **38**, 460-461.

Papastavridis, S. (1990). m-consecutive-k-out-of-n : F systems, *IEEE Transactions on Reliability,* **39**, 386-388.

Papastavridis, S.G. and Chrysaphinou, O. (1988). An approximation for large consecutive-k-out-of-n : F systems, *IEEE Transactions on Reliability,* **37**, 386-387.

Papastavridis, S. and Hadjichristos, J. (1987). Mean time to failure for a consecutive-k-out-of-n : F system, *IEEE Transactions on Reliability,* **R-36**, 85-86.

Papastavridis, S. and Hadzichristos, I. (1988). Formulas for the reliability of a consecutive-k-out-of-n : F system, *J. Appl. Probab.,* **26**, 772-779.

Papastavridis, S. and Koutras, M.V. (1992). Consecutive k-out-of-n systems with maintenance, *Ann. Inst. Statist. Math.,* **44**, 605-612.

Papastavridis, S. and Koutras, M.V. (1993). Bounds for reliability of consecutive-k-within-m-out-of-n : F systems, *IEEE Transactions on Reliability,* **42**, 156-160.

Papastavridis, S. and Lambiris, M. (1987). Reliability of a consecutive-k-out-of-n : F system for Markov-dependent components, *IEEE Transactions on Reliability,* **R-36**, 78-79.

Papastavridis, S.G. and Sfakianakis, M.E. (1991). Optimal-arrangement & importance of the components in a consecutive-k-out-of-r-from-n : F system, *IEEE Transactions on Reliability,* **40**, 277-279.

Philippou, A.N. (1986). Distributions and Fibonacci polynomials of order k, longest runs, and reliability of consecutive-k-out-of-n : F systems, *Fibonacci Numbers with Applications* (eds. A.N. Philippou, G.E. Bergum and A.F. Horadam), 203-227, Reidel, Dordrecht.

Philippou, A.N. and Makri, F.S. (1987). Closed formulas for the failure probability of a strict-consecutive-k-out-of-n : F system, *IEEE Transactions on Reliability,* **R-36**, 80-82.

Rushdi, A.M. (1990). Some open questions on : Strict consecutive-k-out-of-n : F systems, *IEEE Transactions on Reliability,* **39**, 380-381.

Salvia, A.A. (1982). Simple inequalities consecutive-k-out-of-n : F networks, *IEEE Transactions on Reliability,* **R-31**, p. 450.

Salvia, A.A. and Lasher, W.C. (1990). 2-dimensional consecutive-k-out-of-n : F models, *IEEE Transactions on Reliability,* **39**, 382-385.

Sasaki, M., Nakai, Y. and Yuge, T. (1992). Mean time to failure for a consecutive-k-out-of-n : F system, *IEEE Transactions on Reliability,* **41**, p. 306.

Sasaki, M. (1992). Correction to : Mean time to failure for a consecutive-k-out-of-n : F system, *IEEE Transactions on Reliability,* **41**, p. 441.

Satam, M.R. (1991). Consecutive-k-out-of-n : F system : a comment, *IEEE Transactions on Reliability,* **40**, p. 62.

Satam, M.R. (1992). Correction to : Mean time to failure for a consecutive-k-out-of-n : F system, *IEEE Transactions on Reliability,* **41**, 440-441.

Sfakianakis, M., Kounias, S. and Hillaris, A. (1992). Reliability of a consecutive-k-out-of-r-from-n : F system, *IEEE Transactions on Reliability,* **41**, 442-447.

Shanthikumar, J.G. (1982). Recursive algorithm to evaluate the reliability of a consecutive-k-out-of-n : F system, *IEEE Transactions on Reliability,* **R-31**, 442-443.

Shanthikumar, J.G. (1985). Lifetime distribution of consecutive-k-out-of-n : F systems with exchangeable lifetimes, *IEEE Transactions on Reliability,* **R-34**, 480-483.

Shanthikumar, J.G. (1987). Reliability of systems with consecutive minimal cutsets, *IEEE Transactions on Reliability,* **R-36**, 546-550.

Shih, C.T. (1986). Poisson limit of reliability in consecutive-k-out-of-n : F system, Tech. Report, Institute of Statistics, Academia Sinica, R.O.C.

Tong, Y.L. (1985). A rearrangement inequality for the longest run, with an application to network reliability, *J. Appl. Probab.*, **22**, 386-393.

Tong, Y.L. (1986). Some new results on the reliability of circular consecutive-k-out-of-n : F system, *Reliability and Quality Control* (ed. A.P. Basu), 395-399, North-Holland, Amsterdam.

Wei, V.K., Hwang, F.K. and Sös, V.T. (1983). Optimal sequencing of items in a consecutive-2-out-of-n system, *IEEE Transactions on Reliability,* **R-32**, 30-33.

Wu, J.S. and Chen, R.J. (1992). An $O(kn)$ algorithm for a circular consecutive-k-out-of-n : F system, *IEEE Transactions on Reliability,* **41**, 303-305.

Wu, J.S. and Chen, R.J. (1993). Efficient algorithm for reliability of a circular consecutive-k-out-of-n : F system, *IEEE Transactions on Reliability,* **42**, 163-164.

山本久志，宮川雅巳 (1993). Connected-(r, s)-out-of-(m, n) : F system の信頼度計算，応用統計学会講演予稿.

Order k の離散分布の関係

Aki, S. (1985). Discrete distribution of order k on a binary sequence, *Ann. Inst. Statist. Math.*, **37**, 205-224.

Aki, S. and Hirano, K. (1988). Some characteristics of the binomial distribution of order k and related distributions, *Statistical Theory and Data Analysis II* ; *Proceedings of the Second Pacific Area Statistical Conference* (ed. K. Matusita), 211-222, North-Holland, Amsterdam.

Aki, S. and Hirano, K. (1989). Estimation of parameters in the discrete distributions of order k, *Ann. Inst. Statist. Math.*, **41**, 47-61.

Aki, S. and Hirano, K. (1993). Discrete distributions related to succession events in a two-state

Markov chain, *Statistical Sciences and Data Analysis* ; *Proceedings of the Third Pacific Area Statistical Conference* (eds. K. Matusita, M.L. Puri and T. Hayakawa), 467-474, VSP International Science Publishers, Utrecht.

Godbole, A.P. (1990a). Specific formulae for some success run distributions, *Statist. Probab. Lett.,* **10**, 119-124.

Godbole, A.P. (1990b). Degenerate and Poisson convergence criteria for success runs, *Statist. Probab. Lett.,* **10**, 247-255.

Goldstein, L. (1990). Poisson approximation and DNA sequence matching, *Comm. Statist. Theory Methods,* **19**, 4167-4179.

Hirano, K. (1986). Some properties of the distributions of order *k, Fibonacci Numbers and Their Applications* (eds. A.N. Philippou, G.E. Bergum and A.F. Horadam), 43-53, Reidel, Dordrecht.

Hirano, K. and Aki, S. (1993). On number of occurrences of success runs of specified length in a two-state Markov chain, *Statist. Sinica,* **3**, 313-320.

テキストの関係

Barbour, A.D., Holst, L. and Janson, S. (1992). *Poisson Approximation*, Oxford University Press, Oxford.

Barlow, R.E. and Proschan, F. (1965). *Mathematical Theory of Reliability*, Wiley, New York.

Barlow, R.E. and Proschan, F. (1981). *Statistical Theory of Reliability and Life Testing*, 2nd ed., Holt Reinhart and Winston, New York.

Feller, W. (1968). *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. I, 3rd ed., Wiley, New York.

Johnson, N.L., Kotz, S. and Kemp, A.W. (1992). *Univariate Discrete Distributions*, 2nd ed., Wiley, New York.

Consecutive-k-out-of-n : F Systems

Katuomi Hirano

(The Institute of Statistical Mathematics)

A consecutive-k-out-of-n : F system is an ordered sequence of n components, it fails if at least k consecutive components fail. Recently in reliability of engineering systems there were considerable research works concerning the reliability of the systems (e.g. *IEEE Transactions on Reliability*). Further discrete distributions to succession events have been also developed by many researchers. A family of discrete distributions of order k is typical. The distribution of number of occurrences of k consecutive successes in n independent Bernoulli trials is called the binomial distribution of order k. The reliability of a consecutive-k-out-of-n : F system is given by the probability that a random variable distributed as the binomial distribution of order k takes 0. As known from the fact, the reliabilities of the systems are closely related to characteristics of the discrete distributions of order k. We forcus on the relationship between the reliability of the systems and discrete distributions of order k, and review the consecutive-k-out-of-n : F systems.

Key words: Consecutive-k-out-of-n : F system, system reliability, failure time, binomial distribution of order k, discrete distributions of order k, longest run.