確率が時間の経過とともに変わるモデルに利用できる．この計算の実行では，高速に $h(p, k, n)$ を求めることが重要になる．システムの lifetime についての議論，T のモーメント（とくに平均や分散），$P(T\leq t)$ や pdf を陽に求めること，また $P(T\leq t)$ の評価，例えば，$n\to\infty$ のときの極限分布，などの議論がなされていることを紹介した．

参考文献

Aki, S. and Hirano, K. (1994). Distributions of failures and successes until the first consecutive k successes, *Ann. Inst. Statist. Math.*, **46**, 193-202.
平野勝臣 (1994). Consecutive-k-out-of-n：F システム，統計数理，**42**(1), 45-61.

統計モデル評価規準の構成

小西貞則

情報量規準 AIC は，最尤法に基づく予測分布の構成と Kullback-Leibler 情報量の採用によって，極めて適用範囲の広い柔軟なモデル評価規準となり，諸分野の現象解明に大きく寄与してきた．現在，計算機の発展・普及にともない，あらゆる分野でより複雑かつ高次の情報処理の必要性が生じ，最尤法の枠をはずしたモデル，ベイズアプローチによるモデル等，多様な統計モデルの構築が試みられている．このような状況に対応して，様々なモデルを評価するための規準構築を目的として研究を行った．

いま，想定したモデルの密度関数を $f(x\mid\boldsymbol{\theta})(\boldsymbol{\theta}\in\boldsymbol{\Theta}\subset\Re^p)$，未知の確率分布 $G(x)$ からの大きさ n の標本を $\boldsymbol{X}_n$ とする．このとき，将来観測されるデータ z に対する予測分布を何らかの方法で構成し，これを $h(z\mid\boldsymbol{X}_n)$ とおく．例えば，パラメータ $\boldsymbol{\theta}$ の推定量 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ に対して，$h(z\mid\boldsymbol{X}_n)=f(z\mid\hat{\boldsymbol{\theta}})$ を用いるのも一つの方法である．この種の予測分布に対する評価規準の構成については，小西 (1993) で検討した．

一方，ベイズアプローチに基づいて構成された予測分布に対する評価規準の構成を考えるとき，パラメータの推定値を通して直接陽に表現できない予測分布も含めて検討する必要がある．このような予測分布に対する評価規準構成の第一段階として，一般に

$$h(z\mid\boldsymbol{X}_n)=f(z\mid\tilde{\boldsymbol{\theta}})+\frac{1}{n}k(z\mid\tilde{\boldsymbol{\theta}}):\qquad \tilde{\boldsymbol{\theta}}=\hat{\boldsymbol{\theta}}+\frac{1}{n}\hat{\boldsymbol{\varphi}} \tag{1}$$

の形で与えられる予測分布について考察する．これは，ベイズアプローチに基づく基本的な予測分布が，Laplace Method の適用によって (1) 式の形に帰着されることを用いている（例えば，Tierney and Kadane (1986)）．

このとき，ある正則条件のもとで，予測分布 $h(z\mid\boldsymbol{X}_n)$ の平均対数尤度の推定量として与えられる情報量規準は

$$IC(\boldsymbol{X}_n;\ \hat{G})=-2\sum_{\alpha=1}^{n}\log h(X_\alpha\mid\boldsymbol{X}_n)+\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{p}\sum_{\alpha=1}^{n}T_i^{(1)}(X_\alpha;\ \hat{G})\left[\frac{\partial\log f(X_\alpha\mid\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_i}\right]_{\theta=\hat{\theta}} \tag{2}$$

となる．ただし，推定量 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ は p 次元汎関数ベクトル $\boldsymbol{T}=(T_1,\dots,T_p)'$ に対して，$\hat{\boldsymbol{\theta}}=\boldsymbol{T}(\hat{G})$ で与えられ，$T_i^{(1)}(X_\alpha;\ \hat{G})$ は，T_i の経験影響関数とする．通常，ベイズアプローチに基づいて構成された予測分布に対しては，(1) 式の推定量 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ は最尤推定量となる．

標本数がモデルのパラメータ数と比してそれほど大きくないとき，(2) 式の右辺第二項のバイアス補正は有効に働かない．このような場合には，解析的に求めた情報量規準 (2) を予測分

布の平均対数尤度の一つの推定量とみて，さらにバイアスの二次補正

$$E_{X_n}=\left[IC(\boldsymbol{X}_n;\ \hat{G})/(-2n)-\int g(z)\log h(z\mid \boldsymbol{X}_n)dz\right]$$

を行う必要がある．実際，この項には事前分布 $\pi(\boldsymbol{\theta})$ の高次微分が含まれ，事前分布の尤度に対する影響の強さを反映する項でもある．このバイアス補正項は極めて複雑な形をしているが，このような問題に対しては，ブートストラップ法の適用が有効で，数値的にバイアスの二次補正を実行することが可能となる．

参 考 文 献

小西貞則 (1993). 予測誤差推定とブートストラップ法，Research Memo., No. 482, The Institute of Statistical Mathematics, Tokyo.

Tierney, L. and Kadane, J.B. (1986). Accurate approximations for posterior moments and marginal densities, *J. Amer. Statist. Assoc.*, **81**, 82-86.

統計量のなめらかさと漸近展開に関するいくつかの結果

吉 田 朋 広

マリアヴァン解析の統計学への応用に関して，混合型分布の漸近展開，マルチンゲールに対する漸近展開，バナッハ空間に値をとる汎関数と推定量の滑らかさに関する研究を行った．ここではとくにマルチンゲール中心極限定理の精密化に関する結果についてのべる．

独立観測の場合のクラーメル条件に対応する条件として，マルチンゲールに対して部分積分可能性を仮定すると，マルチンゲールに対する漸近展開が証明できる．

連続マルチンゲールの triangular array $(M_{n,t}:\ 0\leq t\leq T_n)$, $n\in\boldsymbol{N}$, を考える．各マルチンゲール $(M_n(t):\ 0\leq t\leq T_n)$ は確率空間 $(W_n,\ P_n)$ 上で定義されているとする．0 に収束する正数列 (r_n) をとる．$(W_n,\ P_n)$ 上の汎関数 $\psi_n(w)$ が $0\leq\psi_n\leq 1$ であり，もし $\psi_n(w)>0$ ならば $T_n\leq\tau_n$ がなりたつとする．ここで，τ_n は停止時で

$$r_n^{-1+a}(\langle M_n\rangle_{T_n\wedge\tau_n}-1)\leq 1$$

を満たすとする。a は $0<a<1/3$ なる定数．簡単のため，M_{n,T_n} を M_n, $\langle M_n\rangle_{T_n}$ を $\langle M_n\rangle$ と表す．

THEOREM. ある確率空間上に確率変数 $(Z,\ \xi)$ が存在して

$$(M_n, r_n^{-1}(\langle M_n\rangle-1))\to^d (Z,\ \xi)$$

とする．M_n に対して部分積分の設定を仮定する．このとき，任意の $p>1$ に対してある定数 C_p が存在して

$$\sup_x\left|E[1_{(-\infty,x]}(M_n)]-\int_{(-\infty,x]}p_n(z)dz\right|\leq 2\,\|1-\psi_n\|_1+C_p r_n^{-(1-a)/2}\,\|1-\psi_n\|_p+o(r_n)$$

が任意の $n\in\boldsymbol{N}$ に対して成り立つ．ここで，

$$p_n(z)=\phi(z)+\frac{1}{2}\,r_n\partial_z^2(E[\xi\mid Z=z]\phi(z)).$$