統計数理 (1994)
第 42 巻 第 1 号 103-109

内点法についての研究

統計数理研究所　水　野　眞　治

(1994 年 1 月　受付)

1. はじめに

統計数理研究所では，統計科学に関する幅広い研究が行われている．その中で，数値的最適化に関する研究も活発に行われ，その水準は世界的にトップレベルである．数値的最適化では，工学，理学，医学，経済学等の諸分野に現れる最適化についての問題を解決するために，問題の数値モデル化，モデルの解析，モデルの解法，解析結果の現実問題への適用等について研究を行う．

最も基本的でかつ重要な最適化問題は，線形計画問題である．線形計画問題は，線形の等式と不等式で表現される制約条件をみたす実行可能解の中で，線形の目的関数を最大にする解を求める問題である．最近の計算機能力の飛躍的な向上と高速なアルゴリズムの開発により，大規模な線形計画問題を解くことが可能となっている．Lustig et al. (1992) は，20 万以上の変数と 10 万以上の制約式を持つ例題を新しい解法（内点法）により解いた結果を報告した．線形計画問題は，非線形計画問題，組み合わせ最適化問題，確率計画問題などの一般的な最適化問題を解く上での基礎となる問題である．一般的な問題を解くために，より大規模な線形計画問題をより高速に解くアルゴリズムの開発が望まれている．

線形計画問題の解法としては，Dantzig が 1940 年代に開発したシンプレックス法が従来から使われていた．シンプレックス法は，小さな問題からある程度大きな問題まで幅広く効率よく解くアルゴリズムである．これに対して，Khachiyan (1979) の提案した楕円体法は，理論的に多項式オーダであるが，実用的なアルゴリズムではない．Karmarkar (1984) は，理論的に多項式オーダであり，大規模な線形計画問題をシンプレックス法よりも高速に解くアルゴリズムを発表した．彼の発表したアルゴリズムとそれ以後に開発された多くのアルゴリズムは，線形計画問題の実行可能領域の内部に点列を生成するという共通の特徴を持つところから，内点法と呼ばれている．Lustig et al. (1992) は，シンプレックス法に基づくソフトウェア（CPLEX, OSL）では解けないような大規模なスケジューリング問題も内点法（OB1）により解けるという数値実験結果を報告した．Karmarkar の発表以後，数値的最適化の分野において内点法の研究が爆発的に行われ，1,300 通以上の研究論文が発表されている（Kranich (1991) 参照)．内点法をある程度まとめた文献として，Goldfarb and Todd (1989), Kojima et al. (1991a)，水野 (1989, 1992), Todd (1989) 等がある．

私は，ここ 5 年間ほど主に内点法に関する研究を行っている．2 章では，この間に提案した新しいアルゴリズムについて紹介する．つぎに 3 章で実用的なアルゴリズムの理論的解析に関する研究を紹介する．ここでは，初期内点を必要としない外点アルゴリズムの収束性に関する研究結果をまとめる．最後に 4 章でその他の研究を簡単に紹介する．

2. 新しいアルゴリズムの開発

Karmarkar (1984) の提案したアルゴリズムは，線形計画問題の主問題を解く内点法である．すべての線形計画問題には，その問題（主問題と呼ばれる）と密接な関係にある問題（双対問題と呼ばれる）が存在する．主問題と双対問題を同時に解く問題は，目的関数のない相補性問題と同値である．従来，主問題と双対問題を同時に解くには，大きな（約2倍の）サイズの問題を解かなければならないと考えられていた．Kojima et al. (1989b) は，Megiddo (1989) による解析結果をもとに，線形計画問題の主問題と双対問題の組を同時に解くアルゴリズムを提案し，一反復ごとに必要な計算量が主問題のみを解くときと同等であることを示した．さらに，問題を解くのに必要な反復回数が高々$O(nL)$ で抑えられる（ある正の数 c が存在し，任意の線形計画問題をこのアルゴリズムで解くとき，反復回数が必ず cnL 以下である）ことを証明した．ここで，n は問題の変数の数を表し，L は問題のサイズ（問題を計算機に記述するのに必要なビット数）を表す．主問題と双対問題を同時に解く内点法は，主双対内点アルゴリズムと呼ばれる．ほぼ同時期に，Tanabe (1987a, 1987b) も主双対内点アルゴリズムを提案した．これらの発表の後，主双対内点アルゴリズムの研究が活発に行われ，多くの計算実験結果も報告されている．現在普及している線形計画問題のソフトウェアは，ほとんど主双対内点アルゴリズムを含んでいる．

Kojima et al. (1989c) は，理論的に計算複雑度の低い主双対内点アルゴリズムを発表した．その反復回数の上界は $O(\sqrt{n}L)$ であり，Kojima et al. (1989b) で提案した方法よりオーダが $\sqrt{n}$ 小さい．$O(\sqrt{n}L)$ 反復で主問題を解く内点アルゴリズムは，Renegar (1988) によりはじめて提案されたが，現在までに反復回数が $O(\sqrt{n}L)$ より少ない内点法は発見されていない．

Mizuno et al. (1989) は，上記のふたつの論文で提案された主双対内点アルゴリズムをもとにプログラミングを行い，いくつかの計算実験を行った．その結果，先に提案したアルゴリズムの方が，理論的な計算複雑度は悪いにもかかわらず，後に提案したアルゴリズムよりもより速く例題を解くことが明らかになった．このような結果となった理由は，前者のアルゴリズムが実際には理論的に最悪な場合よりも効率よくほとんどの例題を解くのに対して，後者のアルゴリズムがどの例題を解くのにも理論的な評価と同じ計算量を必要としたからである．このように内点法のアルゴリズムでは，しばしば理論と実際の計算効率に逆転現象がみられる．

上記の主双対内点アルゴリズムは，線形計画問題の実行可能領域の内部に存在するセンターパスを数値的に追跡する．従って，これらのアルゴリズムを実行するには，初期点としてセンターパスに近い点を必要とする．Mizuno (1992a) は，パス追跡アルゴリズムを一般的にした点列追跡アルゴリズムを提案した．このアルゴリズムにより，任意の実行可能内点を初期点として，線形計画問題を $O(\sqrt{n}L)$ 反復で解くことが可能となった．

一方，Kojima et al. (1991b) は，ポテンシャル関数を減少させながら問題を解くアルゴリズムを提案し，その計算複雑度が多項式オーダ（$O(\sqrt{n}L)$ 反復）であることを示した．ポテンシャル関数を使うメリットは，ステップサイズを定めるときに一次元探索が使えることである．一次元探索を使うことにより，理論的に評価される反復回数ほどには，現実問題を実際に解くときに必要としないと期待できる．

Mizuno et al. (1993b) は，プレディクタ・コレクタ法を提案した．この方法は，センターパスを追跡する方法の一つである．センターパスを含む大小2つの近傍を定義し，プレディクタステップで小さな近傍に含まれる点から目的関数値（双対ギャップ）を減少させる方向に大きな近傍からでないように最も長いステップサイズをとり，つぎにコレクタステップで小さな近

傍に戻るという操作を繰り返すアルゴリズムである．ある条件を仮定すると，このアルゴリズムの必要とする反復回数が $O(\ln(n)L)$ となることも証明した．Ye et al. (1993) と Mehrotra (1993) は，このプレディクタ・コレクタ法が局所的に2次収束することを示した．

3. 実用的内点法の理論的解析

内点法は，理論的に優れた収束性を持つアルゴリズムである．しかし，内点アルゴリズムを使い実際に例題を解く際に，いくつかの問題点が生じる．最も大きな問題点は，初期点として実行可能内点を必要とすることである．与えられた一つの例題の実行可能内点を求めることは，特殊な場合を除くと，その例題の最適解を求めることと同程度に難しい．この問題点は，理論的には人工問題を使うことにより解決できる．すなわち，明らかな実行可能内点をもち，その問題を解くことで与えられた例題を解くことができるような人工問題が存在する．しかし，人工問題を使うと問題の規模が少し大きくなり，大きな人工的な係数を使うために計算効率が悪くなる，あるいは計算誤差が大きくなるという欠点がある．Lustig (1991), Lustig et al. (1991) は，実行可能とは限らない内点を初期点として元の問題に主双対内点アルゴリズムを実行すると，実行可能内点を持つ人工問題を解くときに比べ，はるかに計算量が少ないことを発見した．同時期に田辺 (1989) も同様なアルゴリズムを提案した．これらのアルゴリズムは，主双対外点アルゴリズム (primal-dual infeasible-interior-point algorithms) と呼ばれる．

主双対外点アルゴリズムがはじめに提案された時点では，その収束性は明らかにされていなかった．内点アルゴリズムと外点アルゴリズムは，実用面からみると初期点が実行可能であるかどうかという違いだけであるが，理論的に決定的な相違がある．線形計画問題は，主問題と双対問題が実行可能解を持つならば両方の問題に必ず最適解が存在する（双対定理）．したがって，主双対内点アルゴリズムでは，暗黙の内に最適解が存在することを仮定している．言い替えれば，最適解を持つ人工問題を解く．それに対して，主双対外点アルゴリズムは，最適解を持つかどうか前もってわからない元の問題を直接解く．

Kojima et al. (1993a) は，主双対外点アルゴリズムの収束性をはじめて証明した．すなわち，主双対外点アルゴリズムにおいて，実行不能量の減少率が双対ギャップの減少率より小さくならないようにステップサイズをコントロールすれば，有限回の反復において線形計画問題の最適解が得られる，あるいはその問題に最適解が存在しないことが判明することを証明した．残念ながら，このときの反復回数の上界は，多項式オーダではなかった．Zhang (1992) は，線形計画問題に最適解が存在するならば，初期点をその最適解と同程度の大きさに取ることにより，主双対外点アルゴリズムが最適解を $O(n^2L)$ の反復で求めることを明らかにした．この反復回数の上界は，内点アルゴリズムの場合の $O(\sqrt{n}L)$ と比較するとかなり大きな値である．

Mizuno (1992b) は，最適解の存在が不明の場合にも $O(n^2L)$ 回の反復で主双対外点アルゴリズムにより線形計画問題が解けることを示した．同時に，Mizuno et al. (1993b) で提案されたプレディクタ・コレクタ法を使うことにより，$O(nL)$ 反復の主双対外点アルゴリズムを開発した．Mizuno et al. (1992a) は，新しいポテンシャル関数を導入し，ステップサイズをその関数の一次元探索により定める主双対外点アルゴリズムを提案し，$O(nL)$ の反復回数で問題を解くことを示した．Mizuno and Jarre (1993) は，ニュートン法と凸集合への射影を組み合わせた新しいタイプの外点アルゴリズムを提案した．Mizuno et al. (1992b) は，人工問題を解く内点アルゴリズムをある種の特別な外点アルゴリズムとみなすことができることを示した．

上記の主双対外点アルゴリズムでは，反復回数を理論的に多項式オーダに抑えるために大き

な初期点を必要とする．すなわち，前もって最適解の大きさがわからないので，最適解と同程度の初期点をとるために，余裕を持って十分大きな初期点を使わなければならない．Kojima et al. (1993c) は，内点アルゴリズムにおいて，この問題を解決した．すなわち，比較的小さなパラメータ値を使用した内点を初期点としてアルゴリズムを実行し，その実行中に最適解の大きさを判断し，状況に応じてパラメータ値を変化させる方法を提案した．

Ye et al. (1992) では，与えられた線形計画問題と等価である同時系の自己双対問題を提案した．この自己双対問題は，明らかな初期内点を持ち，任意の主双対内点アルゴリズムにより解くことが可能である．このアプローチは，人工問題を作成する方法の１つとみなすこともできるが，大きな係数あるいは大きな初期点を必要としないことが大きな特徴である．

4. さまざまな研究結果

Karmarkar (1984) の発表以後，内点法は主として線形計画問題の解法として研究された．しかし，内点法の考え方自体は，それ以前より一般の最適化問題の解法として存在していた (Fiacco and McCormick (1968))．しかし，アルゴリズムの理論的な収束性は，Karmarkar 以後に明らかにされた．Kojima et al. (1989c) は，内点アルゴリズムが非負定値行列で定義された線形相補性問題を線形計画問題と同様の計算量で解くことを示した．Kojima et al. (1989a, 1990, 1993b) は，より一般の相補性問題を内点法で解くための基礎的な研究を行った．

また一方，ネットワーク問題等の線形計画問題を内点アルゴリズムで解くときには，初期点の計算，探索方向を求める線形方程式の解法，収束判定などにおいて，その問題の特別な性質を利用することができる．Mizuno and Masuzawa (1989) と Masuzawa et al. (1990) は，それぞれ輸送問題と最小費用流問題を内点アルゴリズムで解く場合の計算上の工夫を提案し，必要とされる計算量を求めた．また，Mizuno et al. (1993a) は，ある種のネットワーク問題において，内点法で得られる近似解から真の最適解を求める方法を提案した．

内点法の各反復では，n 変数の線形方程式を解く．内点法では，この方程式を解くところに最も多くの計算量を必要とする．一般にこの線形方程式を解くには $O(n^3)$ の計算量を必要とする．従って，$O(nL)$ と $O(\sqrt{n}L)$ 反復の内点法は，全体としてそれぞれ $O(n^4L)$ と $O(n^{3.5}L)$ の計算量を必要とする．しかし，内点法の反復ごとに新しい線形方程式を解く代わりに，逆行列を部分的に更新することにより，理論的に計算量を減少させることができる．Mizuno (1990) は，点列追跡法の全体の計算量を $O(n^3L)$ に減少させることができることを示した．さらに，Mizuno (1991) は，一次元探索を使う $O(nL)$ 反復のポテンシャル減少法に逆行列の部分的更新を使うことにより，全体の計算量が $O(n^3L)$ となることを示した．

参 考 文 献

Fiacco, A.V. and McCormick, G.P. (1968). *Nonlinear Programming: Sequential Unconstrained Minimization Techniques*, Wiley, New York.

Goldfarb, D. and Todd, M.J. (1989). Linear programming, *Handbooks in Operations Research and Management Sciences, Volume 1, Optimization* (eds. G.L. Nemhauser, A.H.G. Rinnooy Kan and M.J. Todd), 73-170, North-Holland, Amsterdam.

Karmarkar, N. (1984). A new polynomial-time algorithm for linear programming, *Combinatorica,* **4**, 373-395.

Khachiyan, L.G. (1979). A polynomial algorithm in linear programming, *Soviet Math. Dokl.,* **20**, 191-194.

Kojima, M., Mizuno, S. and Noma, T. (1989a). A new continuation method for complementarity problems with uniform p-functions, *Math. Programming,* **43**, 107-113.

Kojima, M., Mizuno, S. and Yoshise, A. (1989b). A primal-dual interior-point algorithm for linear programming, *Progress in Mathematical Programming, Interior Point and Related Methods* (ed. N. Megiddo), 29-47, Springer, New York.

Kojima, M., Mizuno, S. and Yoshise, A. (1989c). A polynomial-time algorithm for a class of linear complementarity problems, *Math. Programming,* **44**, 1-26.

Kojima, M., Mizuno, S. and Noma, T. (1990). Limiting behavior of trajectories generated by a continuation method for monotone complementarity problems, *Math. Oper. Res.,* **15**, 662-675.

Kojima, M., Megiddo, N., Noma, T. and Yoshise, A. (1991a). A unified approach to interior-point algorithms for linear complementarity problems, *Lecture Notes in Comput. Sci.*, Springer, New York.

Kojima, M., Mizuno, S. and Yoshise, A. (1991b). An $O(\sqrt{n}L)$-iteration potential-reduction algorithm for linear complementarity problems, *Math. Programming,* **50**, 331-342.

Kojima, M., Megiddo, N. and Mizuno, S. (1993a). A primal-dual infeasible-interior-point algorithm for linear programming, *Math. Programming,* **61**, 261-280.

Kojima, M., Megiddo, N. and Mizuno, S. (1993b). A general framework of continuation methods for complementarity problems, *Math. Oper. Res.,* **18**, 945-963.

Kojima, M., Mizuno, S. and Yoshise, A. (1993c). A little theorem of the big M in interior-point algorithms, *Math. Programming,* **59**, 361-375.

Kranich, E. (1991). Interior point methods for mathematical programming: a bibliography, Diskussionbeitrag Nr. 171, Wirtschaftwissenschaften und Operations Research, Fern Universität Hagen, Germany.

Lustig, I.J. (1991). Feasibility issues in a primal-dual interior-point method for linear programming, *Math. Programming,* **49**, 145-162.

Lustig, I.J., Marsten, R.E. and Shanno, D.F. (1991). Computation experience with a primal-dual interior-point method for linear programming, *Linear Algebra Appl.,* **152**, 191-222.

Lustig, I.J., Marsten, R.E. and Shanno, D.F. (1992). Interior-point methods for linear programming: computational state of the art, Tech. Report, SOR 92-17, Department of Civil Engineering and Operations Research, Princeton University, New Jersey.

Masuzawa, K., Mizuno, S. and Mori, M. (1990). A polynomial-time interior-point algorithm for minimum cost flow problems, *J. Oper. Res. Soc. Japan,* **33**, 157-167.

Megiddo, N. (1989). Pathways to the optimal set in linear programming, *Progress in Mathematical Programming, Interior Point and Related Methods* (ed. N. Megiddo), 131-158, Springer, New York.

Mehrotra, S. (1993). Quadratic convergence in a primal-dual method, *Math. Oper. Res.,* **18**, 741-751.

水野眞治 (1989). 線形計画問題に対する内点法について, 数理計画法の最近の進歩と知的所有権, **第1回RAMPシンポジウム**, 15-25.

Mizuno, S. (1990). An $O(n^3L)$ algorithm using a sequence for a linear complementarity problem, *J. Oper. Res. Soc. Japan,* **33**, 66-75.

Mizuno, S. (1991). $O(n^aL)$-iteration $O(n^3L)$ potential-reduction algorithms for linear programming, *Linear Algebra Appl.,* **152**, 155-168.

水野眞治 (1992). 線形計画問題の主双対内点法, 統計数理, **40**, 27-44.

Mizuno, S. (1992a). A new polynomial-time method for a linear complementarity problem, *Math. Programming,* **56**, 31-44.

Mizuno, S. (1992b). Polynomiality of infeasible-interior-point algorithms for linear programming, Research Report, No. 1006, School of Operations Research and Industrial Engineering, Cornell University, New York.

Mizuno, S. and Masuzawa, K. (1989). Polynomial-time interior-point algorithms for transportation problems, *J. Oper. Res. Soc. Japan,* **32**, 371-382.

Mizuno, S. and Jarre, F. (1993). An infeasible-interior-point algorithm using projections onto a convex set, Preprint 209, Mathematische Institut der Universität Würzburg, Germany.

Mizuno, S., Yoshise, A. and Kikuchi, T. (1989). Practical polynomial-time algorithms for linear complementarity problems, *J. Oper. Res. Soc. Japan,* **32**, 75-92.

Mizuno, S., Kojima, M. and Todd, M. (1992a). Infeasible-interior-point primal-dual potential-reduction algorithms for linear programming, Research Report, No. 1023, School of Operations Research and Industrial Engineering, Cornell University, New York.

Mizuno, S., Todd, M. and Ye, Y. (1992b). A surface of analytic centers and infeasible-interior-point algorithms for linear programming, Research Report, No. 1037, School of Operations Research and Industrial Engineering, Cornell University, New York.

Mizuno, S., Saigal, R. and Orlin, J.B. (1993a). Determination of optimal vertices from feasible solutions in unimodular linear programming, *Math. Programming,* **59**, 23-32.

Mizuno, S., Todd, M.J. and Ye, Y. (1993b). On adaptive-step primal-dual interior-point algorithms for linear programming, *Math. Oper. Res.,* **18**, 964-981.

Renegar, J. (1988). A polynomial-time algorithm based on Newton's method for linear programming, *Math. Programming,* **40**, 59-94.

Tanabe, K. (1987a). Centered Newton method for linear programming and quadratic programming, *Proceedings of the 8th Mathematical Programming Symposium, Japan*, 131-152.

Tanabe, K. (1987b). Complementarity-enforcing centered Newton method for mathematical programming: global method, ISM Cooperative Research Report, **5**, 118-144.

田辺國士 (1989). Centered Newton method for linear programming: exterior point method, **統計数理, 37**, 146-148.

Todd, M.J. (1989). Recent developments and new directions in linear programming, *Mathematical Programming, Recent Developments and Applications* (eds. M. Iri and K. Tanabe), 109-157, Kluwer, London.

Ye, Y., Todd, M. and Mizuno, S. (1992). An $O(\sqrt{n}\,L)$-iteration homogeneous and self-dual linear programming algorithms, Research Report, No. 1007, School of Operations Research and Industrial Engineering, Cornell University, New York.

Ye, Y., Güler, O., Tapia, R.A. and Zhang, Y. (1993). A quadratically convergent $O(\sqrt{n}\,L)$-iteration algorithm for linear programming, *Math. Programming,* **59**, 151-162.

Zhang, Y. (1992). On the convergence of a class of infeasible-interior-point method for the horizontal linear complementarity problem, Working Paper, Department of Mathematics and Statistics, University of Maryland, Baltimore County.

Research in Interior-point Methods

Shinji Mizuno
(The Institute of Statistical Mathematics)

In this note, I introduce my recent reseach. I have mainly worked on interior-point methods for solving linear programming and complementarity problems for these five years. I show several new interior-point algorithms which I and/or my co-workers have proposed. Most of the algorithms require only polynomial-time to solve linear programming problems. Especially I explain the detail of very recent theoretical results on primal-dual infeasible-interior-point algorithms, which are very efficient in practice.

Key words: Numerical optimization, linear programming, linear complementarity problems, interior-point methods, dual problem.