統計数理 (1994)
第 42 巻 第 2 号 247-258

正則変動性で特徴付けられる分布族の分解問題

統計数理研究所　志　村　隆　彰

(1993 年 11 月　受付)

1. 序

正値可測関数 f が指数 $\rho(\in \boldsymbol{R}^1)$ の正則変動関数であるとは任意の $k>0$ に対して $\lim_{x\to\infty} f(kx)/f(x)=k^\rho$ となるときをいう．$\rho=0$ のときは，特に緩慢変動関数とよばれる．正則変動関数はそれ自体，大変興味深いものであるが，確率論をはじめ，複素関数論や整数論など様々な数学の分野と深いつながりをもっている (Bingham et al.(1987)). 確率論においては正則変動性は独立同分布確率変数列に対して成り立つ様々な極限定理において，その分布の特徴付けにしばしば用いられる．例えば，このような分布族の例としてよく知られているものに，正規分布の吸引域があり ($\boldsymbol{D}_2$ で表す)，これは truncated variance $\int_{|t|<x} t^2\mu(dt)$ が緩慢変動する族と一致する．そのような分布族に対し，次のような分解問題を考える．$\boldsymbol{D}$ を適当な $\boldsymbol{R}^1$ 上の分布族とする．まず，$\boldsymbol{D}$ が合成積について閉じていることを示すが，関心のあるのはその逆問題である．即ち，2 つの分布 μ_1 と μ_2 の合成積が $\boldsymbol{D}$ に属しているならば，μ_1 と μ_2 は $\boldsymbol{D}$ に属すであろうか．

この種の問題は正規分布，ポアッソン分布，さらにそれらの合成積からなる分布族について肯定的な答えが得られている (Linnik and Ostrovskiĭ (1977)). ここでは，正則変動性で特徴付けられ，様々な極限定理と結びついて現れる幾つかの族についてこの分解問題を考える．この問題に対し，単調正則変動関数の単調関数の和での表現法という観点から考察した結果をのべるのが本稿の目的である．扱う分布族は $[0,\infty)$ 上の分布で tail が指数 $-\alpha(\alpha\geq 0)$ の正則変動をする族 $\boldsymbol{D}(\alpha)$ と $[0,\infty)$ 上の分布で truncated mean $\int_{|t|<x} t\mu(dt)$ が緩慢変動する族 $\boldsymbol{C}$ や $\boldsymbol{D}_2$ である．これらの分布族は，安定分布の吸引域，relative stability，独立同分布列の最大項の割合などの極限定理と関連がある (Bingham et al. (1987)).

本稿では分布の分解を考えるのに対応する関数の分解が本質的な役割を果すので，第 3 章でこれについて詳細に述べる．非負非減少 (resp. 非増加) 関数 f が非負非減少 (resp. 非増加) 関数 f_1 と f_2 の和 $f=f_1+f_2$ で表されるとき，f は f_1 と f_2 に分解されるという．このとき，f_1 と f_2 を f の成分とよぶ．正則変動関数の成分が正則変動か否かということが最初の問題である．これに対する答えは，f が非減少緩慢変動関数，非増加緩慢変動関数，それ以外の指数が 0 でない単調正則変動関数の場合で異なる．まず，非減少緩慢変動関数の場合，正の定数に収束するものを考えれば明らかなように，すべての正の成分が緩慢変動するものが存在する．自明なもの以外にもこの性質をもつものは存在し，まず，そのための必要十分条件を与える．一方，0 に収束する非増加緩慢変動関数と指数が 0 でない単調正則変動関数は，常に正則変動しない正の成分をもち，また，そうした成分の和で表される．さらに，成分の性質について考察する．特に，正則変動しない成分の性質が興味深い．正則変動しない成分 g の性質は f の指数が 0 とそ

うでない場合とは大きく異なる．f が緩慢変動であれば，g は一時的に小さい，i.e. $\liminf_{x\to\infty} g(x)/f(x)=0$ という性質をもつ．しかし，指数が0でない場合，g は必ずしもこの性質をもたない．これは正則変動性を失う際の失い方が異なるからである．このことを簡単に説明しよう．f を指数 $\rho\geq 0$ の非減少正則変動関数とする．もし成分 g が正則変動しなければ，ある $k>1$ に対して，$\limsup_{x\to\infty} g(kx)/g(x)>k^{\rho}$（一時的急増加）であるか，$\liminf_{x\to\infty} g(kx)/g(x)<k^{\rho}$（一時的増加不足）である．$f$ が緩慢変動関数（$\rho=0$）の場合は非減少性から後者は起りえず，前者の場合のみが起る．このとき g は一時的に小さくならざるをえないことが示される．しかし，指数が正ならば両者が起りうる．しかも，g の一時的急増加とその補成分である $f-g$ の一時的増加不足がある区間で同時に起り，2つの成分は互いに補い合う．このようにして，$\rho>0$ ならば，2つの成分は一時的に小さくならずに，正則変動性を失いうるのである（非増加の場合も事情は同様）．

第4章で，確率分布の分解問題を扱う．まず，$\boldsymbol{D}(\alpha)$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}_2$ に属する分布とその要素との関係について述べる．これらの関係と正則変動関数についての一般論からこれらの分布族が合成積について閉じていることがわかる．第2に，逆問題について答える．各 $\alpha\geq 0$ に対し，一方が $\boldsymbol{D}(\alpha)$ に属し，他方が属さず，それらの合成積が属するようなものが存在することは容易にわかる．なぜなら，$\mu\in\boldsymbol{D}(\alpha)$, $\nu\in\boldsymbol{D}(\beta)$, ここで，$\alpha\leq\beta$ ならば，$\mu*\nu\in\boldsymbol{D}(\alpha)$ であるからである (Shimura (1994))．従って，μ_1, μ_2 ともに，$\bigcup_{0\leq\beta<\infty}\boldsymbol{D}(\beta)$ に属さないが，その合成積 $\mu_1*\mu_2$ が $\boldsymbol{D}(\alpha)$ に属するものが構成できるかということを問題にする．第3章の結果を用いることによって，このことに肯定的に答えることができる．また，μ_1 と $\mu_1*\mu_2$ が $\boldsymbol{D}(\alpha)$ に属し，μ_2 は属さないもので，$\limsup_{x\to\infty}\mu_2(x,\infty)/\mu_1(x,\infty)>0$ となるものも構成する．$\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}_2$ に対しても同じ問題を考える．この場合は，加えて全ての非退化要素が $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}_2$ に属するための十分条件も与える．これも前章の結果によるものである．これらの分布の分解要素には前述の単調正則変動関数の成分の性質が反映して，$\boldsymbol{D}(\alpha)(\alpha>0)$ と $\boldsymbol{D}(0)$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}_2$ の場合では様子が大きく違ってくる．

2. 準　　備

この章ではあとで必要になる正則変動性についての基本的なこととそれに関連する分布族の確率論的意味について簡潔に紹介する．詳しくは，Bingham et al. (1987), Darling (1952), Feller (1971), Gnedenko and Kolmogorov (1968) および Seneta (1976) を参照のこと．

実数 $\boldsymbol{R}^1$ 上の確率測度(分布)全体の集合を $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{R}^1)$ で表す．分布 μ_1 はある $\nu\in\boldsymbol{P}(\boldsymbol{R}^1)$ に対し，$\mu=\mu_1*\nu$ となるとき，分布 μ の要素とよばれる($\mu_1*\nu$ は μ_1 と ν との合成積を表す)．$\mu(x,\infty)$, $\mu(-\infty,-x)$ をそれぞれ μ の右側 tail，左側 tail とよぶ．$\lim_{x\to\infty} f_1(x)/f_2(x)=1$ であるとき，f_1 と f_2 とは漸近的に等しいといい，$f_1\sim f_2$ と書く．

全体を通じて，以下のような記法を用いる．$(\uparrow)$: 正値非減少関数全体の集合，$(\downarrow)$: 正値非増加関数全体の集合，$\boldsymbol{SV}$: 緩慢変動関数全体の集合，$\boldsymbol{RV}$: 正則変動関数全体の集合，$\boldsymbol{RV}_{\rho}$: 指数 ρ の正則変動関数全体の集合，$\boldsymbol{SV}(\uparrow)=\boldsymbol{SV}\cap(\uparrow)$, $\boldsymbol{SV}(\downarrow)=\boldsymbol{SV}\cap(\downarrow)$, $\boldsymbol{RV}(\uparrow)=\boldsymbol{RV}\cap(\uparrow)$, $\boldsymbol{RV}(\downarrow)=\boldsymbol{RV}\cap(\downarrow)$, $\boldsymbol{RV}_{\rho}(\uparrow)=\boldsymbol{RV}_{\rho}\cap(\uparrow)$, $\boldsymbol{RV}_{\rho}(\downarrow)=\boldsymbol{RV}_{\rho}\cap(\downarrow)$.

最初に，緩慢変動関数の表現定理をあげる．

定理 2.1. (Seneta (1976)) $f\in\boldsymbol{SV}$ と次のように書けることは同値である．ある $A>0$ に対して，

$$f(x)=c(x)\exp\left(\int_A^x \varepsilon(t)t^{-1}dt\right), \qquad x\geq A$$

ここで $c(x)$, $\varepsilon(t)$ は $\lim_{x\to\infty}c(x)=c(0<c<\infty)$, $\lim_{t\to\infty}\varepsilon(t)=0$ を満たす可測関数である.

正則変動関数の単調性については f が単調であれば, $\lim_{x\to\infty}f(2x)/f(x)=1$ が, 緩慢変動であるための十分条件になる. 一方, 指数が 0 でないときは, 次のようにすべての正則変動関数は単調なものに漸近的に等しい.

定理 2.2. (Bingham et al. (1987)) $f\in \boldsymbol{RV}_\rho$ が, $[A,\infty)$ 上で局所有界であるとする.

$$\rho>0 \text{ ならば, } f(x)\sim\sup\{f(t)\,;\ A\leq t\leq x\}\sim\inf\{f(t)\,;\ t\geq x\}.$$
$$\rho<0 \text{ ならば, } f(x)\sim\sup\{f(t)\,;\ t\geq x\}\sim\inf\{f(t)\,;\ A\leq t\leq x\}.$$

以後, 第 4 章で扱う分布族の確率論的意味について述べる.

$\mu\in \boldsymbol{P}(\boldsymbol{R}^1)$ の特性関数を $\hat{\mu}(z)$ で表す. 分布 μ が安定分布であるとは, 任意の $a>0$ と $b>0$ に対して, 次式を満たす $c>0$ と $d\in\boldsymbol{R}^1$ が存在するときをいう.

$$\hat{\mu}(az)\hat{\mu}(bz)=\hat{\mu}(cz)e^{idz}.$$

退化した分布 (デルタ分布) を除いて, c は a と b によってひとつに決り, $0<\alpha\leq 2$ なる α が存在し, $c^\alpha=a^\alpha+b^\alpha$ となる. この α は安定分布の指数とよばれる. 指数 $\alpha(0<\alpha<2)$ の安定分布の μ の標準形は次のようになる (Gnedenko and Kolmogorov (1968)):

$$\hat{\mu}(z)=\exp\left[i\gamma z+c_1\int_{-\infty}^0\left(e^{iuz}-1-\frac{iuz}{1+u^2}\right)\frac{du}{(-u)^{1+\alpha}}\right.$$
$$\left.+c_2\int_0^\infty\left(e^{iuz}-1-\frac{iuz}{1+u^2}\right)\frac{du}{u^{1+\alpha}}\right], \tag{2.1}$$

ここで, $\gamma\in\boldsymbol{R}^1$, $c_1, c_2\geq 0$, $c_1+c_2>0$ である. (2.1) で $c_1=0$ のとき, 安定分布 μ は spectrally positive という.

以降, $X_1, X_2,\ldots, X_n,\ldots$ を分布 ν に従う実数値の独立同分布確率変数列とし, $S_n=\sum_{j=1}^n X_j$ (酔歩), $L_n=\max_{1\leq j\leq n}X_j$ と書く.

適当に選んだ定数列 $B_n>0$ と $A_n\in\boldsymbol{R}^1$ により,

$$B_n^{-1}\sum_{j=1}^n X_j-A_n$$

の分布が $n\to\infty$ のとき μ に収束するとき, ν は μ に吸引されるという. μ に吸引される分布全体を μ の吸引域という.

$[0,\infty)$ 上の分布で tail が指数 $-\alpha$ の正則変動するもの全体からなる分布族を $\boldsymbol{D}(\alpha)(\alpha\geq 0)$ で表す.

定理 2.3. (Feller (1971)) $0<\alpha<2$, $\nu(-\infty,0)=0$ とする. このとき, ν が指数 α の spectrally positive な安定分布の吸引域に属するための必要十分条件は $\nu\in\boldsymbol{D}(\alpha)$ である.

定理 2.4. (Gnedenko and Kolmogorov (1968)) すべての x に対し, $\nu(x,\infty)$ が正であるとする. 適当に選んだ正規化定数 B_n により, L_n/B_n の分布が非退化分布 μ に収束するための必要十分条件は, ある $\alpha>0$ に対し, $\nu(x,\infty)\in\boldsymbol{RV}_{-\alpha}$ となることである. このとき μ は $c>0$ によ

り,

$$\mu(-\infty, x]=\exp(-cx^{-\alpha}), \qquad \mu(-\infty, 0]=0.$$

定理 2.5. (Darling (1952)) $\nu\in\boldsymbol{D}(0)$ ならば,

$$\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{P}(n\cdot\nu(S_n, \infty)\geq x)=e^{-x}, \qquad x>0.$$

適当に選んだ定数列 $B_n>0$ により, S_n/B_n の分布が $n\to\infty$ で1に確率収束するとき, ν または酔歩 S_n は relatively stable であるという. $\mu\in\boldsymbol{P}(\boldsymbol{R}^1)$ に対し, μ の truncated mean を

$$M(R)=\int_{|x|<R}x\mu(dx)$$

で定義する. 確率変数 X の分布の truncated variance および, truncated mean をそれぞれ, $V_X(R)$, $M_X(R)$ で表す. $[0,\infty)$ 上の分布で緩慢変動する truncated means をもつ分布の族を $\boldsymbol{C}$ で表す.

定理 2.6. (Bingham et al. (1987)) $\nu(-\infty, 0)=0$ とする. このとき, ν が relatively stable であるための必要十分条件は $\nu\in\boldsymbol{C}$ となることである.

次に, 最大項 L_n と和 S_n の比較について考えよう. 簡単のために, $(0,\infty)$ 上の分布に限って話をする. すると $S_n>0$ である. このときの L_n/S_n の $n\to\infty$ のときの挙動について, 以下のことが知られている (Bingham et al. (1987)).

定理 2.7. L_n/S_n が $n\to\infty$ のとき0に確率収束するための必要十分条件は $\nu\in\boldsymbol{C}$ である.

定理 2.8. L_n/S_n が $n\to\infty$ のとき1に確率収束するための必要十分条件は $\nu\in\boldsymbol{D}(0)$ である.

定理 2.9. 次は同値である:
(1) L_n/S_n が非退化極限分布をもつ,
(2) ν が指数 $\alpha\in(0,1)$ の安定分布に吸引される,
(3) $\boldsymbol{E}(S_n/L_n-1)$ が正の有限な極限をもつ.

定理 2.10. ν が有限の平均 m をもつならば, 次は同値である:
(1) $(S_n-nm)/L_n$ は非退化極限分布をもつ,
(2) ν が指数 $\alpha\in(1,2)$ の安定分布に吸引される,
(3) $\boldsymbol{E}\{(S_n-nm)/L_n\}$ が正の有限な極限 c をもつ.
このときの α と c の関係は $\alpha=(1+c)/c$ である.

3. 単調正則変動関数の分解

この章では, 単調正則変動関数を正値単調関数への分解について述べる. 単調正則変動関数が $f=f_1+f_2$ と分解されているとしよう. f が非減少緩慢変動関数, 非増加緩慢変動関数, 単調

正則変動関数に分けて，順に考察していく．個々の場合に，次の3つのタイプの分解を考える．タイプ1: $f_1 \in \boldsymbol{RV}$, $f_2 \in \boldsymbol{RV}$；タイプ2: $f_1 \in \boldsymbol{RV}$, $f_2 \notin \boldsymbol{RV}$；タイプ3: $f_1 \notin \boldsymbol{RV}$, $f_2 \notin \boldsymbol{RV}$．ここで，タイプ2の分解では，$f_1, f_2$ の番号付けは上記のような意味を含めたものとする．この章の結果は，証明も含め，命題3.5までは，Shimura (1991) に，それ以降は Shimura (1994) にある．

3.1 非減少緩慢変動関数

第1章でも触れたようにこの場合，タイプ1の分解しかもたないものがあり，その性質をもつための簡単な必要十分条件がある．これについて述べてから，タイプ2, タイプ3の分解における成分の性質について考察する．

定義 3.1. 非負非減少関数 f が dominatedly non-decreasing (resp. undominatedly non-decreasing)であるとは，$\limsup_{x\to\infty}(f(2x)-f(x))<\infty$(resp.$=\infty$) となるときをいう．

定理 3.2. $f \in \boldsymbol{SV}(\uparrow)$ とする．
(1) f が dominatedly non-decreasing ならば，f の全ての分解はタイプ1である．
(2) f が undominatedly non-decreasing ならば，f はタイプ3の分解をもつ．

具体的にこの条件を満たす例とそうでない例を挙げておこう．

例 3.3.
(1) $f(x)=\log x$ は dominatedly non-decreasing である．
(2) $f(x)=(\log x)^2$ は undominatedly non-decreasing である．
(3) dominatedly non-decreasing な関数の成分は dominatedly non-decreasing である．

定理3.2は2つの成分への分解についてであったが，3つ以上の場合については次のようになる．

命題 3.4. f が undominatedly non-decreasing ならば，任意の n に対して，f は$f=\sum_{i=1}^{n} f_i$, ここで，$f_i \in (\uparrow)$ かつ，$\{f_i : i=1,2,\dots,n\}$ の任意の部分和は $\boldsymbol{SV}$ に属さないと表現できる．さらに，f は同様な条件のもと $f=\sum_{i=1}^{\infty} f_i$ とも表現される．

例からも想像できるように，$\limsup_{x\to\infty} f(x)/\log x=\infty$ ならば，fは undominatedly non-decreasing であることがいえるが，次の命題は，growth order が小さくても，dominated non-decreasing とは限らないことを示している．

命題 3.5. 任意の $f \in (\uparrow)$ で $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ なるものに対して，これと漸近的に等しく，undominatedly non-decreasing なものが存在する．

次の定理は緩慢変動しない成分が緩慢変動性を失うとき，一時的に小さくなるという性質を示している．

定理 3.6. f を undominatedly non-decreasing 緩慢変動関数とする．もし f の成分 f_2 が緩慢変動せず，ある数列に対して $\limsup_{j\to\infty} f_2(2x_j)/f_2(x_j)>1$ ならば，$\liminf_{j\to\infty} f_2(x_j)/f(x_j)=0$. 特に，タイプ 3 の分解であれば，

$$\liminf_{x\to\infty} f_2(x)/f_1(x)=0, \qquad \limsup_{x\to\infty} f_2(x)/f_1(x)=\infty \tag{3.1}$$

となる．

タイプ 1，2 の分解については次の定理が成り立つ．

定理 3.7.
(1) $f\in \boldsymbol{SV}(\uparrow)$, $0\leq p\leq q\leq\infty$ とする．もし $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ ならば，f は

$$\liminf_{x\to\infty} f_2(x)/f_1(x)=p, \qquad \limsup_{x\to\infty} f_2(x)/f_1(x)=q \tag{3.2}$$

を満たすタイプ 1 の分解をもつ．
(2) undominatedly non-decreasing な f と任意の $r(0\leq r\leq\infty)$ に対して

$$\limsup_{x\to\infty} f_2(x)/f_1(x)=r \tag{3.3}$$

を満たすタイプ 2 の分解をもつ．

3.2 非増加緩慢変動関数

次に非増加緩慢変動関数の分解を扱う．この場合，命題 3.10，定理 3.11 にみられるように成分の性質は非減少緩慢変動関数の場合と同じといえるが，分解自体についての結果は，定理 3.8 と命題 3.9 のように，非減少のときよりも簡潔である．

定理 3.8. $f\in \boldsymbol{SV}(\downarrow)$ とする．$\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ ならば，f はタイプ 3 の分解をもつ．

非減少のときと同様，より強い結果も述べておく．

命題 3.9. $f\in \boldsymbol{SV}(\downarrow)$ とする．$\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ ならば，任意の n に対して，f は $f=\sum_{i=1}^{n} f_i$, ここで，$f_i\in(\downarrow)$かつ，$\{f_i: i=1,2,\ldots,n\}$ の任意の部分和は $\boldsymbol{SV}$ に属さないと表現できる．さらに，f は同様な条件のもと $f=\sum_{i=1}^{\infty} f_i$ とも表現される．

次の命題は非増加緩慢変動関数の成分の性質に関するものである．

命題 3.10. $f\in \boldsymbol{SV}(\downarrow)$ とし，f は f_1 と f_2 との和に分解されているものとする．
(1) このとき，f_1 と f_2 のうち，少なくとも 1 つは次を満たす．各 $k>1$ に対して，

$$\limsup_{x\to\infty} f_i(kx)/f_i(x)=1.$$

(2) もし $f_2\notin \boldsymbol{SV}$ かつ，ある数列 $\{x_j\}$ に対し，$\liminf_{j\to\infty} f_2(2x_j)/f_2(x_j)<1$ ならば，$\lim_{j\to\infty} f_2(x_j)/f(x_j)=0$. 特に，タイプ 3 の分解であれば，(3.1) が成立する．

タイプ 1，2 の分解については次の定理が成り立つ．

定理 3.11.

(1) $f \in \boldsymbol{SV}(\downarrow)$, $0 \leq p \leq q \leq \infty$ とする．もし $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ ならば，f は (3.2) を満たすタイプ 1 の分解をもつ．

(2) $f \in \boldsymbol{SV}(\downarrow)$, $0 \leq r \leq \infty$ とする．もし $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ ならば，f は (3.3) を満たすタイプ 2 の分解をもつ．

3.3 緩慢変動でない単調正則変動関数

最後に，緩慢変動でない正則変動関数の分解をみてみよう．この場合，タイプ 3 の分解の性質に緩慢変動のときとの違いが顕著に現れる．以下に述べる結果は指数の正負によらず似たものであるので，それらをまとめて書くことにする．

補題 3.12. $f \in \boldsymbol{RV}_\rho(\uparrow)(\rho>0)$(resp. $\boldsymbol{RV}_\rho(\downarrow)(\rho<0)$), $l \in \boldsymbol{SV}(\uparrow)$(resp. $\boldsymbol{SV}(\downarrow)$) とする．このとき，$f=l_0 f_0$, $l_0 \sim l$ を満たす $f_0 \in \boldsymbol{RV}(\uparrow)$(resp. $\boldsymbol{RV}(\downarrow)$) と $l_0 \in \boldsymbol{SV}(\uparrow)$(resp. $\boldsymbol{SV}(\downarrow)$) が存在する．

次の定理はこの補題と定理 3.7, 3.11 から証明される．

定理 3.13. $f \in \boldsymbol{RV}_\rho(\uparrow)(\rho>0)$(resp. $\boldsymbol{RV}_\rho(\downarrow)(\rho<0)$), $0 \leq p \leq q \leq \infty$ とする．このとき，f は (3.2) を満たすタイプ 1 の分解をもつ．

タイプ 2 の分解については，次の定理が成り立つ．これも緩慢変動のときと同じといえる．

定理 3.14. $f \in \boldsymbol{RV}(\uparrow)$(resp. $\boldsymbol{RV}(\downarrow)$) とする．

(1) もし，タイプ 2 の分解ならば，$\liminf_{x\to\infty} f_2(x)/f_1(x)=0$.

(2) 任意の $r\ (0 \leq r \leq \infty)$ に対し，タイプ 2 の分解で (3.3) を満たすものが存在する．

次に，タイプ 3 の分解をみるが，この場合は他のときとは異なり緩慢変動のときとは大きく異なることがいえる．

定理 3.15. $f \in \boldsymbol{RV}_\rho(\uparrow)(\rho>0)$(resp. $\boldsymbol{RV}_\rho(\downarrow)(\rho<0)$) とし，$0 \leq p < q \leq \infty$ とする．そのとき，f はタイプ 3 の分解で (3.2) を満たすものが存在する．

何故，タイプ 3 では，成分の性質が緩慢変動関数とそれ以外の正則変動関数で違いが現れるのであろうか．次の命題は上の定理の分解における成分の正則変動性の失い方についてのものでありこの問に答えるものである．つまり，緩慢変動のときは一時的に小さくなることによって，緩慢変動性を失ったわけだが，この場合は 2 つの成分が同時に逆の失い方をして補い合うことによって，小さくならずに正則変動性を失うということを示している．

命題 3.16. $f \in \boldsymbol{RV}_\rho(\uparrow)(\rho>0)$(あるいは，$\boldsymbol{RV}_\rho(\downarrow)(\rho<0)$) とし，$f$ が f_1 と f_2 に分解されているとする．このとき，列 $\{x_j\}$ がある $k>0$ に対して，

$$\liminf_{j\to\infty} f_1(kx_j)/f_1(x_j) > k^\rho \quad (\text{resp.} \limsup_{j\to\infty} f_1(kx_j)/f_1(x_j) < k^\rho)$$

と $\liminf_{j\to\infty} f_1(x_j)/f_2(x_j)>0$ を満たせば,

$$\limsup_{j\to\infty} f_2(kx_j)/f_2(x_j)<k^{\rho}\ (\text{resp.}\ \liminf_{j\to\infty} f_2(kx_j)/f_2(x_j)>k^{\rho})$$

である.

注意. 緩慢変動でないときの3つ以上の成分への分解については,指数の符号によらず, undominatedly non-decreasing (命題 3.4),非増加緩慢変動の場合 (命題 3.9) と同様なことがいえる.

4. 正則変動性で特徴付けられる分布族の分解問題

この章では,これまでの正則変動関数についての結果を分布の分解の問題に応用する.扱うのは,tail が正則変動する分布族 $\boldsymbol{D}(\alpha)$ と truncated moment が緩慢変動する $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}_2$ である.第2章で紹介したように,これらの分布族は,独立確率変数列に関する極限定理と関係するものである.これらが,合成積について閉じたものであることも示すが,主な関心はそれらに属する分布の分解とその際の要素の性質にあり,結果は前章で得られたことと深く結び付いている.

次の定理は,分布の右側の tail と要素のそれとの関係についてのものである.

定理 4.1. $\mu_i(i=1, 2,..., n)$ を $\boldsymbol{R}^1$ 上の分布で,$\mu=\mu_1*\cdots*\mu_n$ とする.このとき,$\mu(x, \infty)\in \boldsymbol{RV}$ と $\sum_{i=1}^{n}\mu_i(x, \infty)\in\boldsymbol{RV}$ は同値である.さらにこのとき,

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\mu_i(x, \infty)/\mu(x, \infty)=1.$$

注意. このことと正則変動関数の性質 ($f_1\in\boldsymbol{RV}_{\rho}, f_2\in\boldsymbol{RV}_{\rho'}(\rho'\le\rho)$ ならば,$f_1+f_2\in\boldsymbol{RV}_{\rho}$ である) から,$\boldsymbol{D}(\alpha)$ は合成積について閉じていることがわかる.

さて,このことと第3章の結果を組合せると,分布族 $\boldsymbol{D}(\alpha)$ についての以下の結果を得る.

定理 4.2. ともに $\cup_{0\le\beta<\infty}\boldsymbol{D}(\beta)$ に属さない分布 μ_1, μ_2 でその合成積 $\mu=\mu_1*\mu_2$ が $\boldsymbol{D}(\alpha)$ に属すものが存在する.一般に,任意の n に対し,分布 $\mu_1,..., \mu_n$ で $\mu=\mu_1*\cdots*\mu_n$ は $\boldsymbol{D}(\alpha)$ に属すが,$\{1,..., n\}$ の任意の真部分集合 S に対し,$\{\mu_i: i\in S\}$ の合成積が $\cup_{0\le\beta<\infty}\boldsymbol{D}(\beta)$ に属さないものが存在する.

注意. 定理 3.11, 3.14 及び 4.1 から,μ_1 と合成積 $\mu=\mu_1*\mu_2$ は $\boldsymbol{D}(\alpha)$ に属すが,μ_2 は $\cup_{0\le\beta<\infty}\boldsymbol{D}(\beta)$ に属さないような分布 μ_1, μ_2 が存在することもいえる.

注意. 特性関数 (2.1) をもつ一般の安定分布の吸引域に関して,ともにそれに属さず,合成積が属すようなものの存在を次のように示すことができる.μ_1 として右側と左側の tail がともに指数 $-\alpha$ の正則変動し,かつ,それらの比が収束しないものをとる.μ_2 としては次を満たすものを選ぶ.

$$\mu_2(x, \infty)\sim(c_2/c_1)\mu_1(-\infty, -x], \qquad \mu_2(-\infty, -x]\sim(c_1/c_2)\mu_1(x, \infty).$$

すると定理 4.1 から，$\mu_1 * \mu_2$ は μ の吸引域に属することがわかる．

注意． 定理 3.8, 3.15 にもかかわらず，$\boldsymbol{D}(\alpha)$ に属する全ての分布がそれに属さない 2 つの分布に分解可能というわけではない．たとえば，$\boldsymbol{D}(\alpha)$ の中の分解不能分布がそのような例である．

さて，truncated moment が緩慢変動する分布族 $\boldsymbol{C}$ と $\boldsymbol{D}_2$ についてみる．両者についての結果は似たものであるので，まとめることができるときはそのようにする．まず，全ての要素が $\boldsymbol{C}$ あるいは $\boldsymbol{D}_2$ に属するための十分条件を与えることから始める．平均有限な分布の要素の平均は有限であるし，分散有限な分布の要素の分散は有限であるので $\boldsymbol{C}$ あるいは $\boldsymbol{D}_2$ に属するが，このことを拡張する．μ の truncated mean あるいは variance が dominatedly non-decreasing ならば，μ の各要素はそれぞれ $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}_2$ に属する．次に，それらに属する分布とその要素との関係を与えてから，前章の結果を用いて，ともに $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}_2$ に属さないが，その合成積が $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}_2$ に属する分布の存在を示す．

命題を 2 つ用意する．

命題 4.3.

(1) X を非負確率変数，M_X をその truncated mean とするとき，次の 2 つは同値である：

$$\limsup_{R\to\infty}(M_X(2R)-M_X(R))<\infty.$$

$$\limsup_{R\to\infty} R\boldsymbol{P}(X>R)<\infty.$$

(2) X を実数値確率変数，V_X をその truncated variance とするとき，次の 2 つは同値である：

$$\limsup_{R\to\infty}(V_X(2R)-V_X(R))<\infty.$$

$$\limsup_{R\to\infty} R^2\boldsymbol{P}(X>R)<\infty.$$

命題 4.4. $[0,\infty)$ 上の非負，左連続，非減少な緩慢変動関数 f と $\rho>0$ に対し，$[0,\infty)$ 上の分布 μ と定数 B が存在して，

$$f(x)=\int_{[0,x)} t^{\rho}\mu(dt), \qquad x\geq B$$

と書ける．

さて，$\boldsymbol{C}_0$ および $\boldsymbol{D}_0$ をそれぞれ $[0,\infty)$ 上の dominatedly non-decreasing truncated mean をもつ分布族，$\boldsymbol{R}^1$ 上の dominatedly non-decreasing truncated variance をもつ分布族とすると定理 3.2 と対応して，次のことがいえる．

定理 4.5.

(1) X, Y を非負確率変数とし，$Z=X+Y$ とおく．このとき，Z の分布が $\boldsymbol{C}_0$ に属することと X と Y の分布がともに $\boldsymbol{C}_0$ に属することは同値である．

(2) X, Y を独立確率変数とし，$Z=X+Y$ とおく．このとき，Z の分布が $\boldsymbol{D}_0$ に属することと X と Y の分布がともに $\boldsymbol{D}_0$ に属することは同値である．

注意. $\boldsymbol{C}_0$ (resp. $\boldsymbol{D}_0$) はすべての要素が $\boldsymbol{C}$ (resp. $\boldsymbol{D}_2$) に属するもの全体からなる分布族よりも真に小さい.

次の定理は緩慢変動する truncated mean と variance をもつ分布とその要素との関係についてのものである.

定理 4.6.

(1) $X_i(i=1,\dots,n)$ を truncated mean $M_i(R)$ をもつ非負確率変数とするとき, 和 $S=\sum_{i=1}^n X_i$ の分布が $\boldsymbol{C}$ に属することと $\sum_{i=1}^n M_i(R)\in \boldsymbol{SV}$ とは同値である. このとき,

$$\lim_{R\to\infty}\sum_{i=1}^n M_i(R)/M_S(R)=1.$$

(2) $X_i(i=1,\dots,n)$ を truncated variance $V_i(R)$ をもつ独立確率変数とするとき, 和 $S=\sum_{i=1}^n X_i$ の分布が $\boldsymbol{D}_2$ に属することと $\sum_{i=1}^n V_i(R)\in \boldsymbol{SV}$ とは同値である. このとき,

$$\lim_{R\to\infty}\sum_{i=1}^n V_i(R)/V_S(R)=1.$$

注意. 上の2つの定理において, variance の場合は独立性の仮定は必要であるが, mean の場合はこれが不必要である.

命題 4.4 を用いて, 定理 3.2, 命題 3.4 の分解成分に分布を対応させることができるので, 上の定理と組合せて次を得る.

定理 4.7. ともに $\boldsymbol{C}$(resp. $\boldsymbol{D}_2$) に属さないが, その合成積は $\boldsymbol{C}$(resp. $\boldsymbol{D}_2$) に属する分布が存在する. 一般に, 各 n に対し, 分布 $\mu_1,\dots,\mu_n$ が存在して, $\mu=\mu_1*\cdots*\mu_n$ は $\boldsymbol{C}$(resp. $\boldsymbol{D}_2$) に属し, $\{1,\dots,n\}$ の各真部分集合 S に対し, $\{\mu_i: i\in S\}$ は $\boldsymbol{C}$(resp. $\boldsymbol{D}_2$) に属するものが存在する.

最後に, 第3章の結果とは関係ないが Maller (1980) からわかる $\boldsymbol{D}_2$ の要素についての結果を付加えておこう.

定理 4.8. $\boldsymbol{D}_2$ の任意の要素は正規分布の部分吸引域に属する.

5. あとがき

これは参考文献の Shimura (1991, 1994) をまとめたものである. Hahn and Klass (1980) によると H.G. Tucker が最初に正規分布の吸引域に属する分布の非退化要素はまたそれに属するのではないかという推論を出したということである. これに対し, Hahn and Klass (1980) は, $\mu_1, \mu_1*\mu_2\in \boldsymbol{D}_2$, $\mu_2\notin \boldsymbol{D}_2$ なる例があり, この推論が成り立たないことを示した. (この例では $\lim_{R\to\infty} V_2(R)/V_1(R)=0$ となっている (ここで, V_i は μ_i の truncated variance $(i=1,2)$). 即ち, μ_1 は分散無限の正規分布の吸引域に属する分布で μ_2 は μ_1 と比べて, 無視できる大きさで, かつ不規則な truncated variance をもつ分布である.) 一方, Shimura (1991) では, 非減少緩慢変動関数の分解について考察することで, ともに吸引域に属さないものでもその合成積が属

するものの存在を示す等，より一般的な結果を得ている．また，Shimura (1994) では，同様の問題を $\boldsymbol{D}_2$ 以外の正則変動性で特徴付けられる分布族についても考え，上記の手法を一般の単調正則変動関数に拡張して，解答を与えたものである．詳しい証明などは，Shimura (1991, 1994) をみていただきたい．

6. 謝　　辞

レフェリーにはていねいに原稿を読んで頂き，有意義な助言を得ることができました．ここに謝意を表します．

参 考 文 献

Bingham, N.H., Goldie, C.M. and Teugels, J.L. (1987). *Regular Variation*, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, Cambridge University Press, Cambridge, Massachusetts.

Darling, D.A. (1952). The influence of the maximum term in the addition of independent random variables, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **73,** 95-107.

Feller, W. (1971). *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. II, 2nd ed., Wiley, New York.

Gnedenko, B.V. and Kolmogorov, A.N. (1968). *Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables* (English translation), 2nd ed., Addison-Wesley, Cambridge, Massachusetts.

Hahn, M.G. and Klass, M.J. (1980). Matrix normalization of sums of random vectors in the domain of attraction of the multivariate normal, *Ann. Probab.*, 8(2), 262-280.

Linnik, Ju. V. and Ostrovskiĭ, I.V. (1977). *Decomposition of Random Variables and Vectors* (English translation), Translations of Mathematical Monographs, Vol. 48, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.

Maller, R.A. (1980). A note on domain of partial attraction, *Ann. Probab.*, 8(3), 576-583.

Seneta, E. (1976). Regularly varying functions, *Lecture Notes in Math.*, **508**, Springer, Berlin.

Shimura, T. (1991). Decomposition of non-decreasing slowly varying functions and the domain of attraction of Gaussian distributions, *J. Math. Soc. Japan*, **43**(4), 775-793.

Shimura, T. (1994). Decomposition problem of probability measures related to monotone regularly varying functions, *Nagoya Math. J.*, **135**, 88-111.

Tucker, H.G. (1968). Convolutions of distributions attracted to stable laws, *Ann. Math. Statist.*, **39**(5), 1381-1390.

Decomposition Problem of Distributions Characterized by Regular Variation

Takaaki Shimura

(The Institute of Statistical Mathematics)

This paper deals with a decomposition problem for some classes of distributions. Let $\boldsymbol{D}$ be a given class of distributions on $\boldsymbol{R}^1$. After showing that the class $\boldsymbol{D}$ is closed under convolution, our purpose is to give an answer to the inverse problem: if the convolution of two distributions μ_1 and μ_2 belongs to $\boldsymbol{D}$, then do μ_1 and μ_2 belong to $\boldsymbol{D}$? In this paper, the class $\boldsymbol{D}$ is characterized by regular variation and related to several limit theorems for i.i.d. sequence. For example, the domain of attraction of Gaussian distribution (denoted by $\boldsymbol{D}_2$) is identical with the class of distributions whose truncated variances $\int_{|t|<x} t^2\mu(dt)$ are slowly varying (s.v., for short). In this case, there exist two distributions μ_1 and μ_2 such that neither μ_1 nor μ_2 belongs to $\boldsymbol{D}_2$ but the convolution of μ_1 and μ_2 belongs to $\boldsymbol{D}_2$. The proof depends on the fact that there is a non-decreasing s.v. function that is represented as the sum of positive non-decreasing functions that are not s.v. We also investigate the class $\boldsymbol{D}(\alpha)$ of distributions on $[0, \infty)$ with regularly varying (r.v.) tails with index $-\alpha$ for $\alpha \geq 0$ and also the class $\boldsymbol{C}$ of distributions on $[0, \infty)$ with s.v. truncated means $\int_{|t|<x} t\mu(dt)$.

Since the decomposition for the classes of the corresponding functions is essential in solving the decomposition problem for the classes of distributions, we study it in detail. We say that a non-negative non-decreasing (resp. non-increasing) f is decomposed into f_1 and f_2, if both f_1 and f_2 are non-negative non-decreasing (resp. non-increasing) and $f=f_1+f_2$. In this case f_1 and f_2 are said to be components of f. We are interested in knowing whether components of a r.v. function are r.v. or not. There are non-decreasing s.v. functions such that all their positive components are s.v. However, if f is a non-increasing s.v. function converging to 0 or a monotone r.v. function with non-zero index, then f always has positive components that are not r.v. and also f can be written as the sum of such components. Further, we study properties of the components of f. Especially, the property of the components that is not r.v. differs between zero index case (s.v. case) and non-zero index case.

By the results on the decomposition of r.v. functions, we can construct two distributions μ_1 and μ_2 such that neither μ_1 nor μ_2 belongs to $\cup_{0\leq\beta<\infty}\boldsymbol{D}(\beta)$ but the convolution $\mu_1 * \mu_2$ belongs to $\boldsymbol{D}(\alpha)$. For $\boldsymbol{D}_2$ and $\boldsymbol{C}$, in addition, we will give a sufficient condition for a distribution in $\boldsymbol{D}_2$ and $\boldsymbol{C}$ to have the property that all non-trivial factors of it belong to them. The situation of $\boldsymbol{D}(\alpha)$ $(\alpha>0)$ is exceedingly different from the cases of $\boldsymbol{D}_2$, $\boldsymbol{C}$ and $\boldsymbol{D}(0)$, owing to the difference between the decomposition of monotone r.v. functions with non-zero index and that of monotone s.v. functions.

Key words: Regularly varying function, slowly varying function, decomposition of distributions, domain of attraction.