統計数理 (1994)
第42巻 第1号 1-19

多次元集中解析法

――集中曲線・曲面による統計記述システム――

統計数理研究所 名誉教授　田　口　時　夫

(1993年12月　受付)

1. はじめに

ローマ大学統計学部の創立者C.ジーニ (1884～1965) の生誕百年を経た近年に，シェナ大学経済・金融学部のジオルジ教授の論文「ジーニの文献的肖像――集中比――」(Giorgi (1990) 参照) 及び著書「ジーニの集中に関する報告書――発生，発展と解説付きの文献リスト――」(Giorgi (1992) 参照) が相次いで出版されたことは意義深いものがある．

1885年のロンドン統計協会50周年記念式を機にハーグに結成されたという国際統計協会 (ISI) としても，1887年にその第1回総会をローマで開いて以来，百余年に及ぶ今日，その第49回総会を再びイタリアで迎えたことは，同様に意義深いものがあろう (井上 (1957) 参照)．

その意味に於てか，本年のフィレンツェ総会における寄稿論文に対する選択課題の一つとして「所得分布 (後に不平等 (inequality) に変更) の統計解析におけるジーニ及びパレートの継続的インパクト」(The continuing impact of Gini and Pareto on statistical analysis of income distribution) が加えられている (Gini (1914) 参照)．

本稿の起草の直接の動機は，特に執筆者による報告要旨がこのトピックスに取り上げられたことによるが，更にその歴史的背景としては，1931年第19回総会が東京で行われ，この我が国における最初の大会に於けるジーニを先頭にしたイタリー学派のはなばなしい活躍の記録があげられる (Gini (1931) 参照)．

こうした状況の下で本稿は，パレート及びジーニとの関連の下で最近の動向を最もよく表現する労作の一つといえる，上記のジオルジ教授の報告及び論文の検討と考察から出発する．これは統計的集中解析の多次元化に伴う記述統計学の再検討を，ピアソン系との対比の下で行う本稿にとって，よき手順を与えるように思われるからである．

2. ジオルジ教授の文献リストの検討

ジーニ統計学の概観を最もよく伝えるものとしては晩年の彼自身の論文「イタリア統計の特質」(Gini (1965) 参照) と，ローマ大学ジーニ統計・社会調査研究所所長を継承したV.カステラーノによる「コラード・ジーニ追想」――この末尾にはG.レーティ教授による830篇弱に及ぶジーニの文献目録がのせられている――(Castellano (1965) 参照) 等を挙げることが出来よう．このうちジーニの論文に関しては，イタリア統計学はオーストリア統計学の影響を受けていること，又社会的集団現象の記述・分析に対して彼はストカスチックな方法の適用に疑惑を示し，その適用は寧ろ人口の性比のようにごく制限された領域で有効となるのではないかと終末に表明していること等が印象的である．

又，カステラーノの「追想」によれば

(1) ジーニの研究分野は，その末尾のリストに認められるように，統計学，社会学，経済学及び人口学の広汎にして多岐な領域にまたがるので，各国によって彼の専門分野の特定がまちまちであり，又各分野へのウエイト付けにも若干のズレがあること，しかし，イタリーに於ては統計学者としての評価が最も高いこと．
(2) C. ジーニの統計学は，K. ピアソンと共に統計記述の双璧をなすものであること．
(3) ナポリ大学の故アモローゾ教授は，ジーニの統計学に，非ユークリッド的側面を見出したこと．
(4) ジーニは心理学を評価し乍らも，実証性の観点からそこに一定の枠を置いたこと．

等が鮮明に印象付けられる．

しかし此等の論文については既に以前にも度々触れて来たので，特にこれ以上追究しないが，以上の諸点によってジーニ統計学の発展の路線は敷かれているように思われるのである．唯，此等の論文に接した当初における著者の印象を率直に述べると，例えばCastellano (1965) の一文について，ジオルジ教授の文献リストにより本稿末に示す参考資料の作成を了た今日では極めて当然で客観的な評価であると認め得るのであるが，当時は極めて大きな感動と同時に修辞学的な誇張或いは粉飾ではないかという疑念をいだいたことを否めないのである．

しかし，こうしたジーニについての大きな評価が生じたことは，彼の関心や実績が単なる数学的モデルの設定や，その形式的な検証，又調査や分析に伴う計算技術に限定されるにとどまらず，パレート所得分布の再検討や，諸々の社会研究をもたらした時代性を反映して，絶えず統計的視点を確認し，その視野を拡げざるを得なかったいわば歴史的要請によるのであろう．

ジーニについてのこうした大きな評価が妥当なものであることは，次章で改めて包括的に示すが，その前に「はじめに」に述べたジオルジ教授の著書におけるジーニに関する440篇余に及ぶ文献リストの再整理，再分類を通して統計的に裏付けることが出来る．

その結果は参考資料の (1)〜(3) 等に表現されているが，此等の資料に認められる顕著な事実は，ジーニを継承する研究は縮小するどころか，過去百年弱の期間を通して絶えず少なからぬ増大の傾向を示していることであり，それは研究者数，論文数，掲載誌数の何れについても認められる．その状況は彼の出生地で又遊学の地ロンバルジアにふさわしく，ポー河のようにゆるやかに屈折し乍らも末広がりの安定性をもって未来の海に注いでいる．又研究者及び専門学術誌別の発表論文数についても顕著な特徴を示しており，全体として典型的なパレート・ジップ型分布を形成している．

以上の文献処理の結果からみて，又ジオルジ教授自身による個々の論文の解説を通じて得られたリスト全体の傾向の展望によっても，Castellano (1965) に示されたジーニについての評価の当否について考察し，判定することを一つの課題とすることが出来る．

具体的には，リストの各論文に示される概念は，ピアソン系にその対応物を見出し得るか否か，又見出し得た場合は両者の比較をそれらの適用領域，適用結果等についておこない，その適否を論ずることが考えられる．

更に此等の個々の考察を包括する場合は，

(i) ピアソン，ジーニの両体系は終局的に補完的であるか，対立的又は競合的であるか，
(ii) 両者の本質的な差は，どこにあるか，

等を問うことが出来よう．

しかし，実際のジオルジ教授の論文リストは，1. 序論，2. (ジーニ係数の) 起源，3. 展開，

4. 階層別資料による推定，5. 標本抽出と推計の性格，6.（所有形態等による係数の）分解問題，7. 係数の理解と拡張といった内容の解説の構成からわかるように，ローレンツ曲線とジーニ係数そのものに密着した観点によって忠実に文献を整理する立場であって，必ずしもピアソン系との対比といった系としての一体的認識によるものではない.

従ってこのリストに基づいて，上記カステラーノの見解を裏付けようとすることは，改めて文献を検討し再編成することが必要となるばかりか，その対比の領域は単に統計的記述の段階にとどまらず，より複雑な標本抽出や推論にまで分析を進めざるを得なくなるであろう.

更に，この論文リストには個別論文についての解説はなく，他方著書「*Il rapporto*」は，イタリー語で個別の解説を加えている．これに関する教授の著者への私信では，英文による個々の解説を次に予定されているとのことであるから，その為には，リストのこれ以上の検討は今後の課題に残して，次章に稿を進めるのが適切であろう.

3. C. ジーニの統計記述・解析系の概要

前章で述べたように，K. ピアソンの統計概念とC. ジーニの統計概念をその具体的な細部について文献的な対比を行う前に，大局的な対比によってジーニの統計の概要を捉えようとするのが本章の目的である．以下限定された紙数の節約の為に，略式記号を導入する．まずK. ピアソンの統計記述・解析系をP系，C. ジーニのそれをG系とする.

G系の概要を得る為に，従来のP系の解説，特にその代表としてのケンドール・スチュアートの「上級統計学」(Pearson (1948), Kendall and Stuart (1969), Stuart and Ord (1987) 参照) の構成順位に従って基礎概念の対比を試みることにしよう．具体的にそれは

(i) 統計的記述対象としての分布
(ii) 記述の手段としての積率
(iii) 記述の形式としての統計量
(iv) 積率母関数と分布の特性関数
(v) 統計推論とその基礎概念
(vi) 統計的空間と決定関数

といった各段階を経て解説されていくから，同様の手順によってG系の解説を進めることを心掛ける.

(i) P系の記述対象は，Kendall and Stuart (1969), p. 3，第1.1表「出生率によって分類された地区数」や第1.2表「年間所得別世帯数」といった規模別の度数をもとにして一般化された抽象的な密度関数 $f(x)$ 及びそれと

$$dF=f(x)dx \tag{3.1}$$

の関係をもつ（累積）分布関数であり，スカラー量である (Kendall and Stuart (1969), p. 12).

これに対してG系は此の種の累積規模分布 $F(x)$ の他に，累計地区階層の出産率や，累計世帯階層の所得分配率といった一般に累積シェア分布 $D_1(x)$ といわれる関数を加えたベクトル量を対象とする.

今，規模 x の平均値を μ_1 とすれば x の分配関数 $D_1(x)$ は累積シェア分布として

$$D_1(x)=\frac{1}{\mu_1}\int_0^x \xi f(\xi)d\xi \tag{3.2}$$

と表現されるから，特に $F(x)$ を地区数や世帯数そのものの分配率として $\boldsymbol{D}_0(x)$ と書くならば，G系の記述・解析対象はベクトル関数

$$(3.3)\qquad \boldsymbol{D}(x)=\begin{pmatrix} D_0(x) \\ D_1(x) \end{pmatrix}$$

であるといえる．従って今 x に関するローレンツ曲線 L は

$$(3.4)\qquad D_1=L(D_0)$$

と表わされるから，(3.3) はそのままこの曲線のベクトル表現を与えているのである．

P系，G系は共に分布を対象としながらも，スカラー関数とするかベクトル関数とするかの差によってその当初より適用すべき数学的方法を異にしている．

定義 1. (3.3) 式の一般化は，多変量の規模標識 $\boldsymbol{x}$ を用いて

$$(3.5)\qquad \boldsymbol{D}(\boldsymbol{x})\equiv\begin{pmatrix} D_0(\boldsymbol{x}) \\ D_1(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ D_n(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} F(\boldsymbol{x}) \\ \boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix},$$

この場合

$$(3.6)\qquad D_0(\boldsymbol{x})\equiv F(\boldsymbol{x})=\int_{-\infty}^{x_1}\cdots\int_{-\infty}^{x_n} f(\xi)d\xi_1\cdots d\xi_n$$

$$(3.7)\qquad \begin{pmatrix} D_1(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ D_n(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}\equiv\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x})=\int_{-\infty}^{x_1}\cdots\int_{-\infty}^{x_n}\eta f(\xi)d\xi_1\cdots d\xi_n$$

$$(3.8)\qquad \xi=\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}; \qquad \eta\equiv\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \xi_1/\mu_1 \\ \vdots \\ \xi_n/\mu_n \end{pmatrix}$$

で表わされる．

特に $n=2$ の場合

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{D}(\boldsymbol{x})\equiv\begin{pmatrix} D_0(\boldsymbol{x}) \\ D_1(\boldsymbol{x}) \\ D_2(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$$

は集中曲面といえるもので，Taguchi (1993b) から転載された図1及び図2のような形で示される．集中曲面については Lunetta (1972a, 1972b) も参照されたい．

(ii) (i) に示した統計対象を記述する場合，その文字に当たるものは，例えば上述の $n=2$ の場合P系に於ては，平均及び分散を低次段階として包含する任意特定の点 a, b ((0, 0) と特定する場合が多い) の周りの二変量のモメント

$$(3.9)\qquad \mu'_{st}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-a)^s(y-b)^t dF; \qquad s,\ t=1, 2, \ldots$$

である．いうまでもなく a, b をそれぞれ x 及び y の算術平均として

$$(3.10)\qquad \mu_{st}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_1)^s(y-\mu_2)^t dF$$

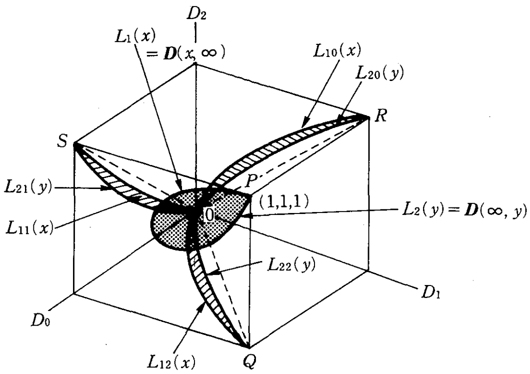

図1. 正の密度関数 $f(x,\ y)$ の集中曲面の一般的な見取り図.

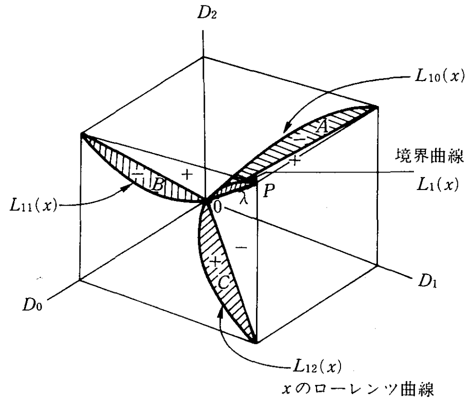

図2. 境界曲線 $L_1(x)$ と均等線の正射影が囲む面積 $A,\ B,\ C$.

を基準とする場合も多い (Kendall and Stuart (1969), p. 58). 然し多くの場合実際の解析に重要なものは $s+t=2$ の分散•共分散であり, n 変量に対応してそのまま分散•共分散行列を与える. この行列は又G系にそのまま対応物を見出すことが出来る. すなわちG系に於ては平均値及び平均差 $\varDelta$ をその一部として包含するいわば外積モメント或いは行列式モメントと言える表現を与えることが出来る (Taguchi (1991), pp. 26〜27 参照).

その為にまず簡単な場合として n 次元のベクトルとして与えられる相異なる観測値を n 個取り出し, これに $n+1$ 次元の変量ベクトル $\boldsymbol{\theta}$ を加えた次の $n+1$ 次行列形式の $\boldsymbol{\theta}$ の関数

$$(3.11)\qquad \hat{D}(\boldsymbol{\theta},\ \boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_n)=\begin{vmatrix} \theta_0 & 1 & \cdots & 1 \\ \theta_1 & x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \theta_n & x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix};$$

$$\boldsymbol{\theta}=\begin{pmatrix}\theta_0\\ \vdots \\ \theta_n\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{x}_j=\begin{pmatrix}x_{1j}\\ \vdots \\ x_{nj}\end{pmatrix},\qquad j=1,\dots,n$$

を考察しよう. 今この関数は θ_i について

$$(3.12)\qquad \hat{D}=\sum_{i=0}^{n}\theta_i A_i,$$

但し $\theta_0=1$ と展開されるものとする. 又一般に $\hat{D}$ の第 i 行と第 j 列を除いた n 次小行列式を $\hat{D}\begin{pmatrix}i\\ j\end{pmatrix}$ で表わすと, 数学的に

$$(3.13)\qquad A_i=(-1)^i\,\hat{D}\begin{pmatrix}i\\ 1\end{pmatrix}$$

が成立するが, G系では $q=1, 2,\dots,n$ に対応して

(3.14)
$$\gamma_{qr}^{(n)} = -\underset{X_1}{\mathrm{E}} \cdots \underset{X_n}{\mathrm{E}} \left[\prod_{p=1,\ldots,\check{q},\ldots,n} \{\mathrm{sgn}(X_{pp}-X_{pq})\} A_r \right]$$

がP系の2次モメントに対応する表現を形成する．(P系の分散・共分散マトリックスにより直結する形式は (3.14) の代わりに Taguchi (1981), p. 80 の (3.1)～(3.2) 式に示すように，x_i の平均差 Δ_{x_i} 及び x_i の x_j に関する共平均差 $\Delta_{x_i \cdot x_j}$, x_j の x_i に関する共平均差 $\Delta_{x_j \cdot x_i}$ を用いた非対称マトリックスである．共平均差は本質的に二変量の外積モメントにすぎない．)

$\hat{D}$ の代わりにその ν 次の小行列について同様な考察を加えると $\gamma_{qr}^{(\nu)}$; q, $r \leq \nu$; $1 \leq \nu \leq n$ が得られるが，これが (3.14) の一般形であり，より代表的な外積モメントといえる．又，特に $n=2$ の場合，$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ として

(3.15)
$$\begin{aligned}
\gamma_{20}^{(2)} &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \{\mathrm{sgn}\,(x_2-x_1)\} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ \mu_{y/x_1} & \mu_{y/x_2} \end{vmatrix} f_1(x_1) f_1(x_2)\, dx_1 dx_2 \\
\gamma_{21}^{(2)} &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \{\mathrm{sgn}(x_2-x_1)\} (\mu_{y/x_1} - \mu_{y/x_2}) f_1(x_1) f_1(x_2)\, dx_1 dx_2 \\
\gamma_{22}^{(2)} &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |\, x_2 - x_1 \,|\, f_1(x_1) f_1(x_2)\, dx_1 dx_2 = \Delta_x
\end{aligned}$$

等が得られる．

表1． 代表的なJ系の Δ 統計量．

記号	表式*	記述の機能	代表的な例示
$\Delta_x(\Delta_y)$	$\Delta_{12}(\Delta_{21})$	$X(Y)$ の平均差	正規分布に対して $\Delta_x = 2\sigma_x/\sqrt{\pi}$, $\Delta_y = 2\sigma_y/\sqrt{\pi}$ が成立する．
$\rho_{y\cdot x,\Delta}$	$-\Delta_{11}/\Delta_{21}$	Y の X に関する線形相関係数	もし $E(Y\|X=x)$ が exact に線形ならば $\rho_{y\cdot x,\Delta}$ は従来のピアソンの相関係数 ρ_{xy} に等しい．
$\beta_{y\cdot x,\Delta}$	$-\Delta_{11}/\Delta_{12}$	Y の X に関する線形回帰係数	もし $E(Y\|X=x) = \alpha_1 + \beta_1 x$ ならば $\beta_{y\cdot x,\Delta} = \beta_1$ が成立する．
$\alpha_{y\cdot x,\Delta}$	$-\Delta_{10}/\Delta_{12}$	Y の X に関する線形回帰の切片	もし $E(Y\|X=x) = \alpha_1 + \beta_1 x$ ならば $\alpha_{y\cdot x,\Delta} = \alpha_1$ が成立する．
Δ'_{xy}	$\frac{4}{3}\Delta_{xy}$	(X, Y) の修正二次元平均差 $\Delta_{xy} \leq \Delta_x \Delta_y$	正規分布に対して $\Delta'_{xy} = 4\sigma_x\sigma_y(1-\rho^2)/(\pi\sqrt{1-\rho^2/4}) \fallingdotseq \Delta_x\Delta_y(1-\rho^2)$.
$\Delta^2_{y\cdot x}$	$\frac{4}{3}\Delta_{xy}\frac{\Delta_{21}}{\Delta_{12}}$	Y の X (又は X の Y) に関する線形回帰残差の分散	正規分布に対して $\Delta^2_{y\cdot x} = 4\sigma_y^2(1-\rho^2)/(\pi\sqrt{1-\rho^2/4}) = \Delta_y^2(1-\rho^2)/(\sqrt{1-\rho^2/4}) \fallingdotseq \Delta_y^2(1-\rho^2)$. 第1種 Mardia のパレート分布に対して $\Delta^2_{y\cdot x} = \Delta_y^2(1-1/p^2)\{1+1/8p^2\} + O(1/p^3)$, ここで XY 間の相関係数は $1/p$ に等しい．

* 本表は田口 (1988a) をもとにしているので表式に用いた記号 Δ は本文中の記号 γ に対応している．記号 γ は Taguchi (1991) にも用いられている．

(iii) P系に於て相関係数，回帰係数等の分布の特徴を示す諸係数は記述統計量としていわば単語の役割をはたす．又其等の単語は，概ね文字にあたるモメントの単純な組合せ，四則演算と巾乗を基礎にしていることが知られている．

全く同様な機能，又はそれ以上の機能をもつ諸係数がG系に於ても外積モメントの単純な算術に基づいて形成されうる．それは表1及び表2によって示される．本来の外積モメント(3.14)はTaguchi (1981), pp. 86～89, Def. 4.3に示すように，完全集中回帰係数を与える．一方で上述の平均差・共平均差行列をもとにして（不完全）集中回帰係数が得られる（Taguchi (1981), pp. 80～81, Def. 3.2 参照)．Olkin and Yitzhaki (1992) の示す多変量のジーニ線形回帰は，この後者の集中回帰係数のようである．

(iv) P系の積率母関数は

(3.16) $$\text{m.g.f.}(P)=\underset{X}{\mathrm{E}}(e^{\theta X})$$

によって表現される．これに対応して，G系の積率母関数の特種又はその一部分として，(3.11)

表2． 代表的なG系集中統計量．

記号	表式*1	記述の機能（予想近似）	代表的な例示*2
$G_x(G_y)$	$G_{12}(G_{21})$	$X(Y)$ のジーニ係数	2次元ジブラ分布に対して $G_x=\sigma'_x/\sqrt{\pi}$, $G_y=\sigma'_y/\sqrt{\pi}$ *3 第2種2次元パレート分布に対して $G_x=1/(2p-1)$, $G_y=1/(2q-1)$ が成立つ．
$\rho_{y\cdot x,G}$	$-G_{11}/G_{21}$	YのXに関する非線形相関係数	2次元ジブラ分布，第2種2次元Mardiaパレート分布に対して近似的に対数線形相関係数に等しい．
$\eta^{(1)}_{y\cdot x,G}$	$-G_{11}/G_{12}$	YのXに関する第1種巾関数回帰の巾指数	2次元ジブラ分布，第2種2次元Mardiaパレート分布に対して第1種の近似的対数線形回帰係数となる．
$\eta^{(2)}_{y\cdot x,G}$	$1+G_{10}/G_{12}$	YのXに関する第2種巾関数回帰の巾指数	同上の分布に対して第2種の近似的対数線形回帰係数となる．
G'_{xy}	$\frac{4}{3}G_{xy}$	修正ジーニ係数	任意の正値分布に対して $0\leq G_{xy}\leq 1$.
$G^2_{y\cdot x}$	$\frac{4}{3}G_{xy}\frac{G_{21}}{G_{12}}$	YのXに関する巾関数回帰の回帰残差の変動係数の二乗値に比例する	2次元ジブラ分布に対しては近似的に $(1-\rho'^2)G^2_y$ *4 に等しい．第2種2次元パレート分布に対しては近似的に $(1-\alpha^2)G^2_y$ *4 に等しい．

*1 本表は田口（1988b）をもとにしているので，表式に用いた記号 G は本文中の記号 C に対応している．この記号はTaguchi (1993a) にも用いられている．

*2 此等の結果は第5章に示すように次の一般化パレート分布

$$f(x\,;\,\alpha,\beta,\theta)=\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\frac{\theta^\beta}{x^{\beta+1}}\left(\log\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha-1};\qquad 0<\theta\leq x,\ \alpha\geq 1,\ \beta>1$$

に対しても成立する．

*3 σ'_x 及び σ'_y は $\log X$ 及び $\log Y$ の分散を表わす．

*4 ρ' 及び α は $\log X$ と $\log Y$ の間の線形相関係数を表わす．

式の行列式をもとにした特性量

$$\text{m.g.f.}\,(G)=\underset{X_1}{\mathrm{E}}\cdots\underset{X_n}{\mathrm{E}}\{\hat{D}(\theta,\ \boldsymbol{X}_1,\ldots,\boldsymbol{X}_n)\} \tag{3.17}$$

を加えることはできないであろうか(後述するように正確にはJ系).

(v) (3.14) に示した $\gamma_{qr}^{(n)}$ の完全集中超曲面に則した幾何学的表現は,分配空間の勾配の成分を用いて

$$\gamma_{qr}=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{h=1}^{2n}\left(\operatorname{sgn}\frac{\partial D_q^{(h)}}{\partial x_q}\right)\frac{\partial(D_0^{(h)}\cdots\check{D}_r^{(h)}\cdots D_n^{(h)})}{\partial(x_1\cdots x_n)}\ dx_1\cdots dx_n\,; \tag{3.18}$$

$$q=1,\ldots,n,\qquad r=0,1,\ldots,n$$

とすることである.

(vi) P系の推論の対象は,本来は統計的スカラー分布の構造についてであろうが,統計分布の形成に確率的過程を設定するか標本抽出の段階に確率を導入するかして,確率分布母関数に関する推論に問題を解消させるのである.

G系の推論に於ては,統計的因果関係の存在を予め想定するのが妥当と思われる.その最も単純な構想は,対象集団の成員に関する測定量のうちで要因を X,結果を Y とした時,その (x, y) 階層に Y の X に関する相互作用 $\boldsymbol{\varphi}=\boldsymbol{\varphi}(x, y)$ が働くとすることであろう.その場合例えば測定量 (X, Y) に関する規模分布を D_0, X, Y それぞれについての階層のシェア分布を D_1, D_2 とした時,相互作用

$$\psi(\boldsymbol{x})=-\lambda\left(\frac{\partial D_2}{\partial D_0},\ \frac{\partial D_2}{\partial D_1}\right) \tag{3.19}$$

が考えられる.

本章末の特に (v), (vi) で扱った (X, Y) の分配に,因果関係の存在を想定した空間は正確にいうとG系の本来の空間ではなく,寧ろ分配量ベクトル $\boldsymbol{D}'=(D_0,\ \mu_x D_1,\ \mu_y D_2)$ を表現する空間であって,寧ろ平均差 $\varDelta$ の発見者ジョルダンに因んでJ系の空間 $\varDelta$ といった方がよい.それは最も単純な Y の X に関する傾向として直線を用い,P系における線形回帰直線と対比することによって,以下に示す曲線的傾向に対するP, G両系の本格的対比をなす為のいわば準備であった.(これに関連して,線形集中回帰係数は,$\boldsymbol{D}'$ に対して (3.19) のような相互作用 ψ' を想定した時,ψ' に対する条件によって規定できることを,ISI第49回総会における筆者の報告に対する正誤表を兼ねて表3に示す.)

この曲線的傾向の最も単純な場合として $y=\gamma x^{\eta}$ を想定しよう.P系に於てはこの関係は空間を対数変換することによって直線的傾向として表現するのが一般である.つまりP系の空間を Σ 空間とした時,その x, y 両軸を $\log x, \log y$ に変換した Σ' 空間を用いるのである.

J系に於ては $\boldsymbol{D}'$ を表現する空間を $\varDelta$ 空間とした時,$\boldsymbol{D}'$ のパラメータ x, y を $\log x, \log y$ とするのみで $\varDelta$ 空間の関係を処理する.

此等に対して本来のG系の空間は D そのものを表現するものでそれを Γ 空間とした時,この空間は x, y に何等の変換を伴うことなく D の表現に適用される.但しJ系の記述に適するモメント $\gamma_{qr}^{(n)}$ は本来G系では $C_{qr}^{(n)}$ にとって換えられる.例えば $n=2$ の場合,$\gamma_{20}^{(2)}, \gamma_{21}^{(2)}, \gamma_{22}^{(2)}$ の代わりに

$$C_{20}^{(2)}=\frac{\gamma_{20}}{2\mu_x\mu_y},\qquad C_{21}^{(2)}=\frac{\gamma_{21}}{2\mu_y},\qquad C_{22}^{(2)}=\frac{\gamma_{22}}{2\mu_x} \tag{3.20}$$

表 3. Errata for Taguchi (1993a), pp. 463-464.

False

Theorem. Let $\tilde{g}_\Delta$ be the g_Δ which minimize the expression

(5) $\varphi(g_\Delta)=\int_0^\infty \int_0^\infty \left\| \sum_{h=1}^{2} g_{\Delta(x)}^{(h)} - g_\Delta f_1(x) f_2(y) \right\| dxdy$, therefore

(6) $\tilde{g}_\Delta=\int_0^\infty \int_0^\infty \sum_{h=1}^{2} (g_{\Delta_0(x)}^{(h)},\ g_{\Delta_1(x)}^{(h)},\ g_{\Delta_2(x)}^{(h)})\ dxdy.$

True

Theorem. Let $\tilde{k}_\Delta$ be the k_Δ which minimizes the expression

(5) $\psi(k_\Delta)=\int_0^\infty \int_0^\infty \left\| \sum_{h=1}^{4} \{k_{\Delta(x)}^{(h)} - k_\Delta\} w_{\Delta_2(x)}^{(h)} \right\| dxdy$

(6) $\tilde{k}_\Delta=\int_0^\infty \int_0^\infty \sum_{h=1}^{4} \left(\frac{\partial \Delta_2^{(h)}}{\partial \Delta_0^{(h)}},\ \frac{\partial \Delta_2^{(h)}}{\partial \Delta_1^{(h)}} \right) w_{\Delta_2(x)}^{(h)}\ dxdy$

for $k_{\Delta(x)}^{(h)}=\left(\frac{\partial \Delta_2^{(h)}}{\partial \Delta_0^{(h)}},\ \frac{\partial \Delta_2^{(h)}}{\partial \Delta_1^{(h)}} \right)$ and for $w_{\Delta_2(x)}^{(h)}=\dfrac{g_{\Delta_2(x)}^{(h)}}{\int_0^\infty \int_0^\infty \sum_{k=1}^{4} g_{\Delta_2(x)}^{(k)}\ dxdy}$.

(See Grassini (1989))

を記述の文字として（外積率係数と呼ぶことが出来る）用いるのが適当となる．これは Δ 系のモメント $\gamma_{qr}^{(\nu)}$ に対するキュムラントといえるかも知れない．何れにせよ次章で此等のモメントをその特性を示して詳細に述べることにする．

4. 外積率の種々相

K. ピアソンの統計数学は，その初期のモメント形式をもとにして或る種の分布族の諸性質の記述を達成した後に，モメントそのものの生成に遡って積率母関数（m.g.f.）を想定している．

これまで第 1〜3 章で扱ったジーニ統計学は，独自の分布族の解析を通して，ピアソン統計学と数学的性格を異にする新たな統計的記述言語として外積モメントを提起するのであるが，これについても果たしてその生成源が得られるだろうか．又もし得られるならば如何なる形式の下でいわば外積率母関数（v.m.g.f.）が特定されるであろうか．

結論からいうとそれは行列乃至行列式表現を伴うので v.m.g.d. とでも表現されうる次式が想定されるのである．すなわち前章で既に述べたように，(3.11) 式の示す n 次観測ベクトルの任意の ν 箇の成分からなる ν 次部分ベクトルを ν 箇取り出した時，γ_{qi_r} を $\hat{\theta}_{qi_r}$ の余因子としてもつ v.m.g.f. $M_\gamma^{(\nu)}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q)$ は，

$$(4.1)\qquad M_\gamma^{(\nu)}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q)=\underset{X_1}{\mathrm{E}}\cdots\underset{X_\nu}{\mathrm{E}}\left[\left\{\prod_{p=1,\ldots,\check{q},\ldots,\nu} \mathrm{sgn}(X_{i_p p}-X_{i_p q})\right\}\times D(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q;\ \hat{\boldsymbol{X}}_1,\ldots,\hat{\boldsymbol{X}}_\nu)\right];$$

$$q=1,\ldots,\nu,\ \nu\leq n$$

であり，その際 $D(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q;\ \hat{\boldsymbol{X}}_1,\ldots,\hat{\boldsymbol{X}}_\nu)$ は，

$$(4.2)\qquad D(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q;\ \hat{\boldsymbol{X}}_1,\ldots,\hat{\boldsymbol{X}}_\nu)=\begin{vmatrix} \theta_{qi_0} & 1 & \cdots & 1 \\ \theta_{qi_1} & X_{i_1 1} & \cdots & X_{i_1 \nu} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \theta_{qi_\nu} & X_{i_\nu 1} & \cdots & X_{i_\nu \nu} \end{vmatrix}$$

と表わされる行列式である．ここで D の成分 $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_q$ 及び $\hat{\boldsymbol{X}}$ はそれぞれ

$$(4.3)\qquad \widehat{\boldsymbol{\theta}}_q=\begin{pmatrix}\theta_{qi_0}\\ \theta_{qi_1}\\ \vdots\\ \theta_{qi_\nu}\end{pmatrix};\qquad \boldsymbol{X}_j=\begin{pmatrix}1\\ X_{i_1j}\\ \vdots\\ X_{i_\nu j}\end{pmatrix}$$

を示すベクトルである．

(4.1) 式の $M_\gamma^{(\nu)}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_q)$ に対して次の諸性質が容易に認められる．

Proposition 1. 一般に

$$(4.4)\qquad \frac{\partial M_\gamma^{(n)}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_q)}{\partial\theta_{qr}}=\gamma_{qr};\qquad r=0,1,\dots,n$$

が成立する．

Proposition 2. 観測ベクトル $\boldsymbol{X}$ についてその X_q 成分のその他の成分に関する線形集中回帰関数を

$$(4.5)\qquad \tilde{X}_q=-\mathrm{sgn}(q-r)\sum_{\substack{r=0\\ r\neq q}}^{n}\frac{\gamma_{qr}}{\gamma_{qq}}X_r;\qquad \boldsymbol{X}_{\tilde{q}}=\begin{pmatrix}1\\ X_1\\ \vdots\\ \tilde{X}_q\\ \vdots\\ X_n\end{pmatrix}$$

とすれば，$\widehat{\boldsymbol{\theta}}_q=\boldsymbol{X}_{\tilde{q}}$ とした時

$$(4.6)\qquad M_\gamma^{(n)}(\boldsymbol{X}_{\tilde{q}})=0$$

が成立する．従って又 X_q の $\tilde{X}_q$ による回帰残差 ζ を

$$(4.7)\qquad \zeta=X_q-\tilde{X}_q$$

とすれば

$$(4.8)\qquad \zeta=\sum_{\substack{r=0\\ r\neq q}}^{n}\frac{\gamma_{qr}}{\gamma_{qq}}\boldsymbol{X}_r=M_\gamma^{(n)}(\boldsymbol{X}_q)/\gamma_{qq}$$

となる．

この性質によって $M_\gamma^{(n)}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_q)$ は X_q の線形集中回帰の母関数 (l.c.r.g.f.) ということも出来ることになる．

このように，モメントの母関数が他の母関数と同一又は密着した形式を示す例は，既に或種の分布に於て認められている．二項分布を例にとれば，この分布は不連続な密度関係をもつが，その母関数 (f.g.f.) は

$$(4.9)\qquad P(t)=\sum_{j=0}^{\infty}f_jt^j$$

のような級数形式で与えられる．この時この分布の (m.g.f.) は $P(e^t)$ の形で表現され，他方そのファクトリアル・モメント母関数 (f.m.g.f.) は $P(1+t)$ で示されることは周知の通りである．

モメント系はキュムラント系を含めて対象とする分布によってその適応力が判断されるのであって，例えばガンマ分布，正規分布やポアソン分布等の各々によって事情を異にし，単純には優劣を示し難い．

PROPOSITION 3. (4.4) 式に於て $q=r=n$ とする $M_\gamma^{(n)}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n)$ から生成される γ_{nn} は $n-1$ 次元の平均差 $\Delta_{x_1,\dots,x_{n-1}}$ を与えることになる．従って (4.1) 式の n の代わりに $n+1$ を用いた時 $M_\gamma^{(n+1)}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{n+1})$ は $r=n+1$ とすることによって

$$\Delta_{x_1,\dots,x_n}=\gamma_{n+1\ \ n+1} \tag{4.10}$$

が得られる．

PROPOSITION 4. (4.2) 式の示す行列式 $D(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q\,;\ \hat{\boldsymbol{X}}_1,\dots,\hat{\boldsymbol{X}}_\nu)$ の i 行ベクトルを構成するのは，j 列に位置する各観測値ベクトル $\boldsymbol{X}_j$; $j=1,\dots,\nu$ の第 i_r 番目の観測項目 X_{i_rj} である．今 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_q$ の代わりに $\hat{\boldsymbol{\varphi}}_q$ を用い，又 $\boldsymbol{X}_{i_rj}$ を $Y_{i_rj}=\dfrac{X_{i_rj}}{2\mu_{i_r}}$ と置き換えるならば，上記の $D(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q\,;\ \hat{\boldsymbol{X}}_1,\dots,\hat{\boldsymbol{X}}_\nu)$ の代わりに $D(\hat{\boldsymbol{\varphi}}_q\,;\ \hat{\boldsymbol{Y}}_1,\dots,\hat{\boldsymbol{Y}}_\nu)$ が得られるが，この時 $\hat{\boldsymbol{\varphi}}_q$ は次の形で集中モメント母関数 $M_{\mathcal{E}}^{(\nu)}(\hat{\boldsymbol{\varphi}}_q)$ を与えることが出来る．即ち

$$M_{\mathcal{E}}^{(\nu)}(\hat{\boldsymbol{\varphi}}_q)=\underset{X_1}{\mathrm{E}}\cdots\underset{X_\nu}{\mathrm{E}}\left[\left\{\prod_{p=1,\dots,\check{q},\dots,\nu}\frac{\mathrm{sgn}(X_{i_pp}-X_{i_pq})}{2\mu_{i_p}}D(\hat{\boldsymbol{\varphi}}_q\,;\ \hat{\boldsymbol{X}}_1,\dots,\hat{\boldsymbol{X}}_\nu)\right\}\right] \tag{4.11}$$

である．従って今

$$\hat{\boldsymbol{\varphi}}_q=\begin{pmatrix}\varphi_{qi_0}\\ \varphi_{qi_1}\\ \vdots\\ \varphi_{qi_\nu}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\theta_{qi_0}\\ \mu_{i_1}\theta_{qi_1}\\ \vdots\\ \mu_{i_\nu}\theta_{qi_\nu}\end{pmatrix}\equiv\hat{\boldsymbol{\theta}}_q' \tag{4.12}$$

とすれば

$$M_{\mathcal{E}}^{(\nu)}(\hat{\boldsymbol{\varphi}}_q)=2^\nu\left(\prod_{p=1}^{\nu}\mu_{i_p}\right)M_\gamma^{(\nu)}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q') \tag{4.13}$$

と表わすことが出来る．

Proposition 4 の関係は，従来の特性関数 (c.f.) を $\phi(t)=\int e^{itx}dF$ とした時，$\phi(t)$ は m.g.f. $M(\theta)$ によって $M(it)$ と表わされると同時に，キュムラント母関数 (c.g.f.) は単純に$\log\phi(t)$ と示されることと対照的であるといえよう．この意味で $M_{\mathcal{E}}^{(n)}(\hat{\boldsymbol{\varphi}})$ をジョルダン空間 Δ の外積キュムラント母関数といってもよいであろう．

ピアソン系とジーニ系は，それぞれ対象とする分布族の相異に応じて数学的に相異なる特性量を見出すのであるが，以上の諸属性について検討した結果は，反面に於て可成り共通性・類似性もありそうである．

因みに上述の外積モメントは m.g.f. における 3 次及び 4 次のモメントのように歪みや尖りを記述するモメントを欠いているが，それに代わる測度として，Kakwani の所得分布の解析結果や集中曲線・曲面の特性を基礎にして構成された統計量を示すことが出来る (Kakwani (1980)，田口 (1984) 及び Taguchi (1991) 等参照)．但し此等についてここでは詳論しない．

最後に次の提案を行う．

SUGGESTION 1. 外積モメント $\gamma_{qr}^{(n)}$ 及び集中モメント $C_{qr}^{(n)}$ を q 行 r 列の要素とする $(n, n+1)$ 行列を

$$M_n(\gamma)=(\gamma_{qr}^{(n)}), \qquad M_n(C)=(C_{qr}^{(n)}) \tag{4.14}$$

とする．又その部分行列を $M_\nu(\gamma)$, $M_\nu(C)$ 等とする．

此等の詳細は今後の検討課題となろう．

5. むすびにかえて ―― ジーニ系の固有分布族の所在について ――

ピアソン系の内外に於ては，従来より各種のモメント系が存在し，其等の間に相互依存関係や適合性の優劣が論じられている．

更に特性関数の概念は，characteristic exponent の概念を通じて，中心極限定理の成立条件をめぐってピアソン系外に幾多の分布族の所在を認めることになった．然しそれは一般的にはなお抽象的段階に止って，ピアソン系外の諸分布族に対して具体的で有効な解析手段を与えるものではない．そのような分布族の一つは各種の所得及び資産分布を含む一族であると予想されているが，それは又ジーニ系の解析・記述の対象であり，そこに Kakwani (1980) の解析や本稿に示したような外積率モメント及びその母関数のような解析概念の提案の余地が見出されるのである．その契機となるものは後掲の Taguchi (1972a, 1972b, 1973, 1981, 1987, 1991) 及び田口 (1972, 1984, 1988a, 1988b, 1993) に示される一連の研究成果である．更に此等の分布の時間的構造変化は，寄与度・寄与率の概念によって効果的に把握されることが関 (1992) によって最近報告されている．

但し此の種の分布族は，物理現象や生物現象等の諸領域にもしばしば出現するので，其等は解析的な分布型として力学的概念等により抽象的，客観的に規定されるべきであろう．

其の為に従来のモメント系がよく記述し得た分布族を今仮にピアソン系の固有分布族，或は単にP系分布族としよう．此の時G系分布族に関する大摑みの近似的予想は，正の有限な算術平均値をもつ対数P系分布族といった類のものである．

このことを以下ジブラ分布とよばれる対数正規分布，及びパレート分布の一般化とみなされる対数ガンマ分布について，其等の外積モメント，及び集中モメントの計算結果によって追究してみよう．其の際パレート分布及びその一般化分布（表2の*2 参照）はデータへの高い適合性を示すパラメータの範囲内で，理論上2次以上の m.g.f. のモメントは発散することが容易に認められる．

一方に於て此等の分布の集中モメントは一般に

$$0 \leq C_{rq}^{(n)} \leq 1 \tag{5.1}$$

をみたすのであり，此の結果は正値分布一般に拡張することが出来る．但し実際は n が増大すると益々 0 に接近する点に問題が存在する．従って n 次元の集中度 $G_{x_1\cdots x_n}$ は $\Delta_{x_1\cdots x_n}\Big/\left(2^n\prod_{r=1}^{n}\mu_r\right)$ の代わりにその n 乗根を用いて $\frac{1}{2}\sqrt[n]{\Delta_{x_1\cdots x_n}\Big/\prod_{r=1}^{n}\mu_r}$ と定義すべきであろう．然し当面は $n=2$ について検討を行うことが先決である．

例1. 二変量のジブラ分布については，X, Y の対数線形相関係数を ρ, Y の X についての対数線形回帰係数を η_1 とした時，集中モメント C_{10}, C_{11}, C_{12} は次のように示される．

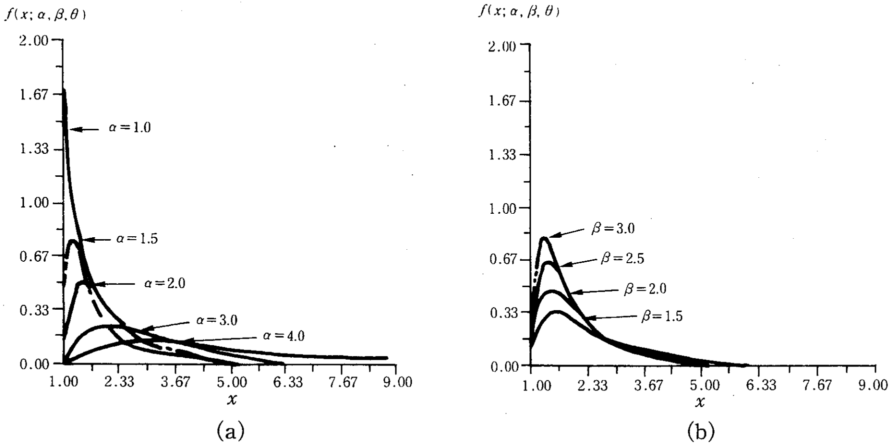

図 3.　一般化パレート分布の密度関数. (a) $\beta=2.0$ の場合, 分布の α による変化, (b) $\alpha=2.0$ の場合, 分布の β による変化.

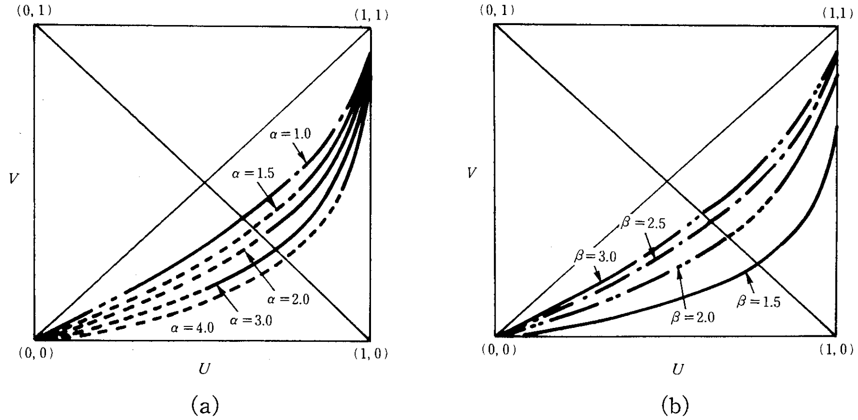

図 4.　一般化パレート分布のローレンツ曲線. (a) $\beta=2.0$ の場合, 曲線の α による変化, (b) $\alpha=2.0$ の場合, 曲線の β による変化.

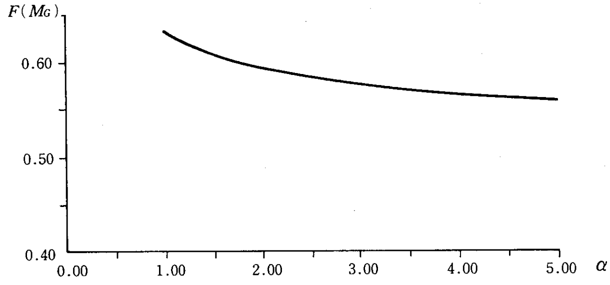

図 5.　$F(M_G)=\dfrac{\gamma(\alpha,\,\alpha)}{\Gamma(\alpha)}$ のグラフ. ここで M_G は幾何平均値を表わす.

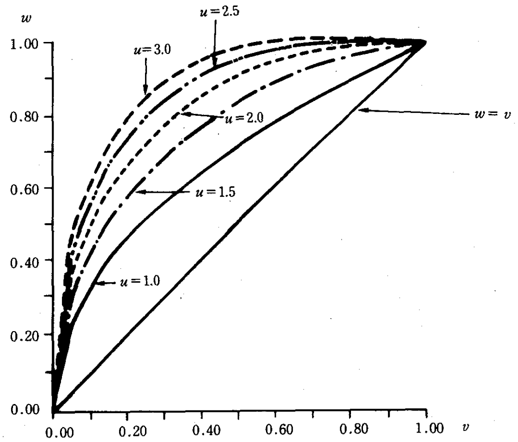

図6. ベータ分布 $w=I_v\left(\frac{1}{2},\ u\right)$ のグラフ.

(5.2)
$$\begin{aligned}
-C_{10}&=\Phi\left\{(\eta_1-1)\frac{\sigma_x}{\sqrt{2}}\right\}-\Phi\left\{(1-\eta_1)\frac{\sigma_x}{\sqrt{2}}\right\}\\
&=2\Phi\left\{(\eta_1-1)\frac{\sigma_x}{\sqrt{2}}\right\}-1=1-2\Phi\left\{(1-\eta_1)\frac{\sigma_x}{\sqrt{2}}\right\}\\
-C_{11}&=\Phi\left(\rho\frac{\sigma_y}{\sqrt{2}}\right)-\Phi\left(-\rho\frac{\sigma_y}{\sqrt{2}}\right)=2\Phi\left(\rho\frac{\sigma_y}{\sqrt{2}}\right)-1=1-2\Phi\left(-\rho\frac{\sigma_y}{\sqrt{2}}\right)\\
C_{12}=G_x&=\Phi\left(\frac{\sigma_x}{\sqrt{2}}\right)-\Phi\left(-\frac{\sigma_x}{\sqrt{2}}\right)=2\Phi\left(\frac{\sigma_x}{\sqrt{2}}\right)-1=1-2\Phi\left(-\frac{\sigma_x}{\sqrt{2}}\right)
\end{aligned}$$

更に表2で示した二変量集中係数を G_{xy} とすれば，対数分散 σ_x^2, σ_y^2 が1よりも小である時,

(5.3)
$$G_{xy}=\frac{3(1-\rho^2)}{2\pi\sqrt{4-\rho^2}}\sigma_x\sigma_y+O\left(\sqrt{\frac{\sigma_x^2+\sigma_y^2}{2}}^{\,3}\right)$$

が得られる (田口 (1988b), p. 149, (3.22) 式参照).

猶，一変量のジブラ分布とその集中曲線及び集中度 C_{12} については，Aitchison and Brown (1957) を参照されたい.

例2. 一般化パレート分布 (表2の*2参照) の二変量分布は Taguchi (1993b) に於て示され，解析されているが，その集中モメントは次式のように不完全ベータ関数 $I_z(p, q)$ によって表現される (図3～5参照). すなわち

(5.4)
$$\begin{aligned}
C_{10}&=-I_{(1-\eta_1)^2/(2\beta_1-\eta_1)^2}\left(\frac{1}{2},\ \alpha\right)\\
C_{11}&=-I_{\eta_1^2/(2\beta_1-\eta_1)^2}\left(\frac{1}{2},\ \alpha\right)\\
C_{12}=G_x&=\frac{\beta_{1/(2\beta-1)^2}\left(\frac{1}{2},\ \alpha\right)}{B\left(\frac{1}{2},\ \alpha\right)}=I_{1/(2\beta-1)^2}\left(\frac{1}{2},\ \alpha\right)
\end{aligned}$$

である. ここで G_x 等は又次式等で示される.

$$G_x = \frac{2}{B\left(\frac{1}{2}, \alpha\right)} \int_0^{1/(2\beta-1)} (1-w^2)^{\alpha-1} dw = \frac{\int_0^{1/(2\beta-1)} (1-w^2)^{\alpha-1} dw}{\int_0^1 (1-w^2)^{\alpha-1} dw} \tag{5.5}$$ （図 6 参照）

二次元の集中係数は一般的な形で計算を行っていないが，従来のパレート分布を表わす $\alpha=1$ の場合は適当な大きさの対数相関係数 ρ の下で

$$G_{xy} = \frac{3(1-\rho^2)}{16pq} \tag{5.6}$$

となる．従って，パレート係数が適当な大きさであれば

$$G_{xy} = \frac{3(1-\rho^2)}{4} G_x G_y \tag{5.7}$$

が成立する（田口（1988b), p. 157, (3.39)〜(3.42) 式参照).

更に，多変量のパレート分布については Mardia (1962) の解析があり，その集中解析が今後の課題とされる．

ジーニ系に固有の分布族の存在と形態を探索する為には，今後更に他の対数ピアソン系分布族のうちで有限な算術平均値をもつもの等について集中解析を行い検討を重ねる必要がある．

因みにデータ・ベースの側から，実際の m.g.f.の計算では理論モデルと異なり常に有界であるという反論がよく提起される．然しこの場合，推定対象となる母数は，その推定による実現値が何等かの形で母数の有限性を保障する範囲内にあることを求められるであろう．そもそも従来の 2 次モメントが所得分布に対して此の種の保障を与え得なかった時に，それに代わるものとしてジーニ係数が評価されてきたのではなかったであろうか．

謝　辞

本稿の整理及び附帯資料の作製に当たっては森田篤子さん，中森しおりさん及び上田真保子さんの手を煩らわせることが数多く重なりました．此の機会に厚く感謝致します．又細部に亘り審査されたレフェリーの諸氏に重ねて感謝致します．

参考資料：Giorgi (1992) の“*Il rapporto*”によるジーニ統計学研究状況

(1)　主な著者名を紹介された論文の多い順に示すと

Yitzhaki, S.	15篇
Kakwani, N.C.	13
Giorgi, G.M.; Pietra, G.; Silber, J.	12
Gini, C.; Taguchi, T.	11
Gastwirth, J.L.; Moothathu, T.S.K.	10
Sandstrom, A.	9
Dagum, C.; De Simoni, S.; Fortunati, P.; Frosini, B.V.; Pallini, A.; Zanardi, G.	8
Berrebi, Z.M.	7
Girone, G.; Lerman, R.I.; Sen, A.	6

Mehran, F.; Shorrocks, A.F.	5

その他13名各4篇，16名各3篇，50名各2篇，167名各1篇が紹介されている．

(2) 主な誌名を紹介された論文数の多いものの順に示すと

Statistica	37篇
Metron	28
Econometrica	16
Sankhyā	15
J. Econom. Theory	12
American Economic Review	11
J. Amer. Statist. Assoc.	10
Review of Income and Wealth	9
Bull. Inst. Internat. Statist.	8
Bull. Internat. Statist. Inst.	8
J. Business and Economic Statistics	8
Math. Social Sci.	8
Quart. J. Econom.	8
Atti della Riunione Scientifica della Societa Italiana di Statistica	7
Economic J.	7
J. Econometrics	7
La distribuzione personale del reddito: problemi di formazione, di ripartizione e di misurazione	7
Review of Economics and Statistics	7
Econom. Lett. (Lausanne, Switzerland)	6
Annali dell'Istituto di Statistica	5
Ann. Inst. Statist. Math.	5
Giornale degli Economisti e Annali di Economia	5
Internat. Econom. Rev.	5
Jahrbücher für National Ökonomie und Statistik	5
Oxford Economic Papers	5
Quaderno dell'Istituto di Statistica	5
Ricerche Economiche	5
Statistical Papers/Statistische Hefte	5

その他4誌各4篇，4誌各3篇，9誌各2篇，32誌各1篇が紹介されている．

(3) 1905年より1991年に至る年次別論文数（カッコ内はその年次の論文数）

1905(1), 1909(1), 1910(1), 1912(1), 1914(1), 1915(1), 1916(2), 1917(1), 1920(1), 1921(1), 1930(1), 1931(9), 1932(3), 1933(3), 1934(1), 1935(5), 1936(2), 1937(2), 1940(2), 1941(2), 1947(1), 1948(3), 1950(4), 1951(1), 1954(3), 1955(4), 1957(2), 1958(1), 1959(1), 1960(2), 1961(2), 1962(2), 1963(3), 1964(3), 1965(6), 1966(4), 1967(9), 1968(3), 1969(1), 1970(2), 1971(6), 1972(18), 1973(10), 1974(11), 1975(8), 1976(12), 1977(16), 1978(16), 1979(24), 1980(19), 1981(20), 1982(10), 1983(20), 1984(11), 1985(19), 1986(24), 1987(26), 1988(22), 1989(21), 1990(22), 1991(9)

参 考 文 献

Aitchison, J. and Brown, J.A.C. (1957). *The Lognormal Distribution*, University Press, Cambridge.

Castellano, V. (1965). Corrado Gini : memoir, *Metron*, **XXIV**, N. 1-4, 3-35.

Gini, C. (1914). Sulla misura della concentrazione e della variabilita dei caratteri, *Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze*, Lettere ed Arti, tomo **LXXIV**, parte II, 1203-1248.

Gini, C. (1931). Promising fields in statistical domain, 経済論叢, **32**(1) (第 19 回国際統計協会会議記念特輯号), 14-22.

Gini, C. (1965). On the characteristics of Italian statistics, *J. Roy. Statist. Soc. Ser. A*, **128**, 89-109.

Giorgi, G.M. (1990). Bibliographic portrait of the Gini concentration ratio, *Metron*, **XLVIII**, N.1-4, 183-221.

Giorgi, G.M. (1992). *Il rapporto di concentrazione di Gini —— Genesi, evoluzione ed una bibliografia commentata* ——, Libreria editorice ticci, Siena.

Grassini, L. (1989). Derivation of the concentrative linear regression estimates from minimum conditions, *Proceedings of the 47th Session of the ISI*, Contributed Paper, Book 1, 397-398.

井上照丸 (1957). 「国際統計協会」,『統計学辞典』(増補版第一刷), p. 44, 東洋経済新報社, 東京.

Kakwani, N.C. (1980). *Income Inequality and Poverty*, Oxford University Press.

Kendall, M.G. and Stuart, A. (1969). *The Advanced Theorem of Statistics*, Vol. 1, 46-51, 55-93, Griffin, London.

Lunetta, G. (1972a). Sulla concentrazione delle distribuzioni doppie, *Societa Italiana di Statistica*, **XXVII**, 127-150.

Lunetta, G. (1972b). Di un indice di concentrazione per variabili statistiche doppie, *Annali della Facolta di Economia e Commercio dell'Universita di Catania*, **A.XVIII**, 203-219.

Mardia, K.V. (1962). Multivariate Pareto distributions, *Ann. Math. Statist.*, **33**, 1008-1015.

Olkin, I. and Yitzhaki, S. (1992). Gini regression analysis, *Internat. Statist. Rev.*, **60**(2), 185-196.

Pearson, K. (1948). *Early Statistical Papers*, University Press, Cambridge.

関弥三郎 (1992).『寄与度・寄与率 —— 増加率の寄与度分解法 ——』, 産業統計研究社, 東京.

Stuart, A. and Ord, J.K. (1987). *Kendall's Advanced Theory of Statistics, Vol. I, Distribution Theory*, 5th ed., Griffin, London.

田口時夫 (1972). 二次元離散分布の集中多面体, 集中係数及び新たな各種相関係数について —— 企業集中の多次元的解析法 ——, 統数研彙報, **20**, 77-115.

Taguchi, T. (1972a). On the two dimensional concentration surface and extension of concentration coefficient and Pareto distribution to the two dimensional case —— I, *Ann. Inst. Statist. Math.*, **24**(2), 355-381.

Taguchi, T. (1972b). On the two dimensional concentration surface and extension of concentration coefficient and Pareto distribution to the two dimensional case —— II, *Ann. Inst. Statist. Math.*, **24**(3), 599-619.

Taguchi, T. (1973). On the two dimensional concentration surface and extension of concentration coefficient and Pareto distribution to the two dimensional case —— III, *Ann. Inst. Statist. Math.*, **25**(1), 215-237.

Taguchi, T. (1981). On a multiple Gini's coefficient and some concentrative regressions, *Metron*, **XXXIX**, N. 1-2, 69-98.

田口時夫 (1984).『経済分析と多次元解析』, 東洋経済新報社, 東京.

Taguchi, T. (1987). On the structure of multivariate concentration —— Some relationships among the concentration surface and two variate mean difference and regressions, *Comput. Statist. Data Anal.*, **6**, 307-334.

田口時夫 (1988a). 集中多様体と集中解析のシステム (I) —— ジーニの統計方法論の幾何学的展開 ——, 統計数理, **36**(1), 41-53.

田口時夫 (1988b). 集中多様体と集中解析のシステム (II) —— 相対的ベクトル積率と非線形集中統計量 ——, 統計数理, **36**(2), 139-166.

Taguchi, T. (1991). A characterization of Gini's statistics —— On a system of vector analysis of

distribution ——, *Metron,* **XLIX**, N. 1-4, 23-95.
田口時夫 (1993). ジーニ統計学の数学的性格，統計学，**65**, 11-23.
Taguchi, T. (1993a). A characterization of Gini's statistics: on a system of vector analysis of distribution, *Bull. Internat. Statist. Inst.*, Contributed Papers, 49th Session, Book 2, 463-464.
Taguchi, T. (1993b). A concentration analysis of income distribution model and consumption pattern —— Introduction of logarithmic gamma distribution and statistical analysis of Engel elasticity ——, *Statistica*, Anno **LIII**, 31-57.

On the Methods of Multi-variate Concentration Analysis
—— A System of Statistical Description by the Concentration Curve and Surface ——

Tokio Taguchi
(Emeritus Professor of the Institute of Statistical Mathematics)

In this paper, the author tries to make some comparisons between the Pearson system and the Gini system on statistical description and analysis (abbreviated to the P-system and the G-system below). In the second section, he introduces the two bibliographs with respect to the Gini statistics, exhibited by Professor Giorgi (see (1990) and (1992) in the References). In the third section, he introduces a characterization of the G-system from the viewpoints of the vector product moments (see Taguchi (1991, 1993a)), in the comparisons with the P-system. Also the introduction of generating function of vector product moment is tried. In the fourth section, he discusses more precisely the characteristics of vector product moment.

In the concluding section, he exhibits some analytical results of income distributions (the Gibrat distribution and a generalization of the Pareto distribution), as proper distributions of the G-system. He forecasts the followings: while the P-system is suitable to the expression of stochastic events, the G-system is suitable to the expression of statistical causalities in the collective phenomena, caused by the interactions around distribution working among the members of collective.

Key words: Descriptive statistics, Pearson's system, Gini's system, Jordan's system, vector product moment and its characteristics, collective phenomenon, elasticity.