

多重サンプリングによる 非最小位相系の適応制御

統計数理研究所 宮 里 義 彦

(1993 年 11 月 受付)

1. 緒 言

モデル規範形適応制御系 (MRACS) を構成するためには, 制御対象の零点は安定 (最小位相系) でなければならない。これは適応制御装置が制御対象の零点を相殺する極を内部に発生させるために, 対象に不安定な零点が存在すると制御装置に不安定な極が発生して制御系の安定性が保証されないからである (Goodwin et al. (1980), Landau and Lozano (1981), Goodwin and Sin (1984))。このような前提条件は連続時間系ではそれほど問題とはならないが, 離散時間系においては大きな制約となる。なぜなら離散時間系では, もとの連続時間系が最小位相系であっても, 零次ホールダを通して離散時間化すると非最小位相系になる場合があるからである。特に連続時間表現のときに相対次数が 2 次以上の対象を, サンプリング時間を短くして離散時間化すると, 不安定な零点が発生することが知られている (Åström et al. (1983))。以上のことより離散時間非最小位相系に対してモデル規範形適応制御系を構成する手法を確立することが, 適応制御理論の課題の 1 つとされている。

これに対して, 本稿では多重サンプリングの手法 (Chammas and Leondes (1978a, 1978b), Araki and Hagiwara (1983), Kaczorek (1985), Lozano (1989), Ortega and Kreisselmeier (1990)) を使って, 非最小位相離散時間系に対してモデル規範形適応制御系を構成する手法について述べる。この手法の特色は, 多重サンプリングに基づく周期フィードバックによって, 制御対象の極だけでなく零点も極零相殺によらずに自由に再配置することができる点である。従って不安定な零点が存在しても, 入力の一様有界性を保証しながら, 適応的なモデル追従制御が実現できる。本稿の構成を以下に示す。まず本論の問題設定と制御目的を第 2 章で述べて, 続く第 3 章で多重サンプリング系の表現方法を与える。第 4 章でこの表現を使って多重サンプリングに基づく周期フィードバックを用いたモデル追従制御について考察する。そこではまずモデル追従制御系の一般形式を導出し, 次に周期フィードバックの可解条件が陽に求められる場合に議論を限定する。第 5 章では制御対象が未知の場合に, 4 章で求めた手法を用いて適応制御系を構成する。5 章までの議論でサンプル点にのみ着目した離散時間モデル規範形適応制御系の構成が, 離散時間非最小位相系についても可能になる。それに対応してサンプル点上の挙動のみに着目した数値例を第 6 章で示す。続く第 7 章では本手法の問題点として, 入力が振動的になる現象が多く見られることと, それに伴い出力のサンプル点間の応答が劣化することを指摘し, そのような問題点を解決する 1 手法について述べる。8 章では 7 章で提案した手法の有効性を, サンプル点間の応答も含む数値例で検証する。最後に第 9 章で結論を述べる。

2. 問題設定

以下に示す1入力1出力連続時間線形系を制御対象とする。

$$(2.1) \quad y(t) = G(s)u(t) = \exp(-s\tau) \cdot G_0(s)u(t)$$

ただし $G_0(s)$ は強プロパーな有理伝達関数で, τ はむだ時間である。制御目的は, (2.1) 式で表わされる未知の制御対象の T 時間ごとのサンプル値 $\{y(iT): i=0, 1, 2, \dots\}$ を, 任意の1様有界な目標信号 (既知) $\{y_M(iT): i=0, 1, 2, \dots\}$ に漸近的に追従させることであるとする。

$$(2.2) \quad y(iT) \rightarrow y_M(iT), \quad (i \rightarrow \infty)$$

このような問題を解くために, 通常は目標信号のサンプル時間 T で制御対象の入出力を離散時間化して Fig. 1 に示すような離散時間制御系を構成する。このときの対象の離散時間モデルは次のようになる。

$$(2.3) \quad y(iT) = G_T(z)u(iT)$$

$$(2.4) \quad G_T(z) = (1 - z^{-1})Z_T L^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\}$$

ただし L はラプラス変換であり, Z_T はサンプリング時間 T での z 変換である。しかし $G(s)$ の相対次数が2次以上でサンプリング時間 T が小さいときに, この方法で導出された離散時間モデルにおいて不安定零点が発生することがある (Åström et al. (1983))。そのような場合には極零相殺を生じさせるモデル追従制御は適用できない (Goodwin et al. (1980), Landau and Lozano (1981), Goodwin and Sin (1984))。

本稿では以上のような問題に着目して, 不安定零点の極零相殺を防ぐために, 出力のサンプリング時間 T に対して入力を T/m ($m \geq 2$) ごとに離散時間化する多重サンプリング方式を採用する (Fig. 2)。そのような制御系の構成のもとで入出力の有界性を保ちながら適応的に入力を合成し, 漸近的にモデル追従制御を実現する。ただし利用可能な信号は T 時間ごとの出力, T/m ごとに変化する入力と, T ごとの目標信号 (むだ時間に対応した未来情報も含む) だけとする。

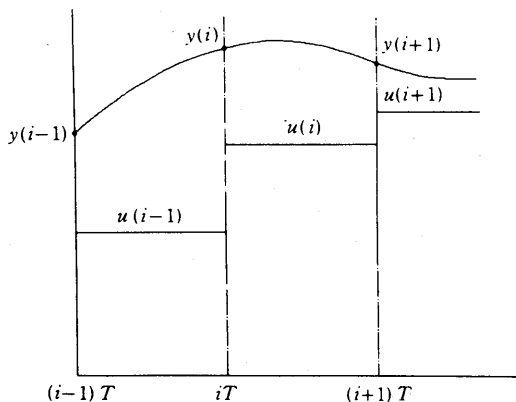


Fig. 1. Usual sampling.

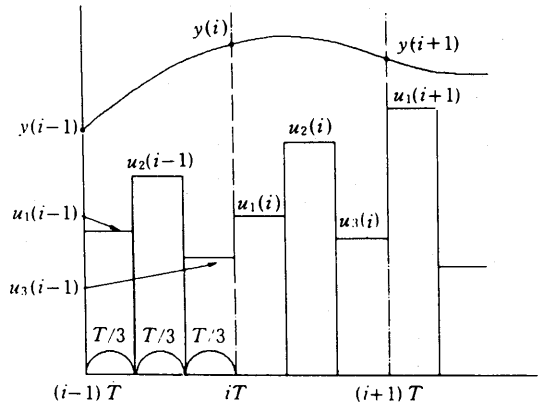


Fig. 2. Multirate sampling ($m=3$).

3. 多重サンプリング系の表現

$G_0(s)$ の次数を n' として, n' から n を次のように定義する.

1) $NT = m\tau$ となるような整数 $N(\geq 0)$ が存在するときには

$$(3.1) \quad n \equiv n'.$$

2) それ以外のときには

$$(3.2) \quad n \equiv n' + 1.$$

連続時間系の入出力をサンプリング時間 T/m で通常の方法 (Fig. 1) で離散時間化したときの離散時間表現 (状態空間表現) を (A, b, c, D) ($A \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $b, c \in \mathbf{R}^n$, $D(\text{integer}) \geq 0$) とする.

$$(3.3) \quad z^{-D} \cdot c^T (zI - A)^{-1} b = G_{T/m}(z)$$

ただし D はサンプリング時間 T/m の離散時間モデルのむだ時間であり ($D = [\tau/(T/m)]$), $G_{T/m}(z)$ は (2.4) 式で定義される. すると Fig. 2 の多重サンプリング系は以下のように表わされる.

$$(3.4) \quad x_{j+1} = Ax_j + bu_{j-D} \quad j=0, 1, 2, \dots$$

$$(3.5) \quad y_{im} = c^T x_{im} \quad i=0, 1, 2, \dots$$

ただし

$$(3.6) \quad x_j \equiv x\left(\frac{jT}{m}\right), \quad u_j \equiv u\left(\frac{jT}{m}\right), \quad y_{im} \equiv y(iT)$$

である. あらためて T 時間ごとの状態変数, 出力, および目標信号を

$$(3.7) \quad X(i) \equiv x(iT) = x_{im}, \quad y(i) \equiv y(iT) = y_{im}, \quad y_M(i) \equiv y_M(iT)$$

のようにおくと, (3.4), (3.5) 式に対応して次式が得られる.

$$(3.8) \quad X(i+1) = A^m X(i) + B^{(m)} U(im - D)$$

$$(3.9) \quad y(i) = c^T X(i)$$

ただし

$$(3.10) \quad B^{(m)} \equiv [A^{m-1}b, A^{m-2}b, \dots, Ab, b]$$

$$(3.11) \quad U(im - D) \equiv [u_{im-D}, u_{im-D+1}, \dots, u_{im-D+m-1}]^T$$

である. ここで次式を満たす整数 d ($d \geq 1$) と K ($1 \leq K \leq m$) が存在することに着目する.

$$(3.12) \quad D = (d-1)m - K + 1$$

上式を (3.11) 式に代入すると

$$(3.13) \quad U(im - D) = [u_{(i-(d-1))m+K-1}, u_{(i-(d-1))m+K}, \dots, u_{(i-(d-1))m+m-1}, \\ u_{(i-(d-2))m}, u_{(i-(d-2))m+1}, \dots, u_{(i-(d-2))m+K-2}]^T$$

を得る. さらに入力を実次のように表記すると

$$(3.14) \quad u_k(i) \equiv u_{im+k-1} \quad (k=1, 2, \dots, m)$$

$$(3.15) \quad U(im - D) = [u_K(i-(d-1)), u_{K+1}(i-(d-1)), \dots, u_m(i-(d-1)), \\ u_1(i-(d-2)), u_2(i-(d-2)), \dots, u_{K-1}(i-(d-2))]^T$$

制御対象 (3.8), (3.9), (3.14), (3.15) は以下のように m 入力 $\{u_1(i), \dots, u_m(i)\}$ / 1 出力 $\{y(i)\}$ の離散時間系と見なすことができる。

$$(3.16) \quad y(i) = A(z^{-1})y(i) + \sum_{k=1}^{K-1} B_k(z^{-1})u_k(i-(d-1)) + \sum_{l=K}^m B_l(z^{-1})u_l(i-d)$$

ただし z はシフトオペレータ ($zy(i) = y(i+1)$) であり

$$(3.17) \quad A(z^{-1}) \equiv a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n} = 1 - z^{-n} \det(zI - A^m)$$

$$(3.18) \quad \begin{aligned} B_k(z^{-1}) &\equiv b_{k1} + b_{k2} z^{-1} + \dots + b_{kn} z^{-(n-1)} \\ &= z^{-(n-1)} c^T \text{adj}(zI - A^m) A^{K-1-k} b, \end{aligned} \quad (1 \leq k \leq K-1)$$

$$(3.19) \quad \begin{aligned} B_l(z^{-1}) &\equiv b_{l1} + b_{l2} z^{-1} + \dots + b_{ln} z^{-(n-1)} \\ &= z^{-(n-1)} c^T \text{adj}(zI - A^m) A^{m-1+K-l} b, \end{aligned} \quad (K \leq l \leq m)$$

である。

4. 多重サンプリングに基づくモデル追従制御

本章では制御対象が既知であると仮定して、多重サンプリングを利用したモデル追従制御系の構成法について述べる。

最初に多重サンプリングに基づく周期フィードバック制御の一般形を導く。周期フィードバック制御は次のように表わされる。

$$(4.1) \quad \begin{aligned} u_k(i) &= G_k(z^{-1})v(i-1), & (1 \leq k \leq K-1) \\ u_l(i) &= G_l(z^{-1})v(i), & (K \leq l \leq m) \end{aligned}$$

ただし多項式 $G_k(z^{-1})$ ($1 \leq k \leq m$)

$$(4.2) \quad G_k(z^{-1}) = g_{k0} + g_{k1} z^{-1} + \dots + g_{kn_g} z^{-n_g}, \quad (0 \leq n_g < \infty)$$

は次式を満足するように決定される。

$$(4.3) \quad \sum_{k=1}^m G_k(z^{-1})B_k(z^{-1}) = 1$$

また $v(i)$ は以下のようにして生成される信号である。

$$(4.4) \quad L(z^{-1})v(i) = \{1 - A_M(z^{-1})\}y_M(i+d) - D(z^{-1})y(i)$$

ここに $L(z^{-1})$, $D(z^{-1})$

$$(4.5) \quad L(z^{-1}) = 1 + l_1 z^{-1} + \dots + l_{d-1} z^{-(d-1)}$$

$$(4.6) \quad D(z^{-1}) = d_0 + d_1 z^{-1} + \dots + d_{n-1} z^{-(n-1)}$$

は次の Diophantine 方程式の解であり、

$$(4.7) \quad \{1 - A(z^{-1})\}L(z^{-1}) + z^{-d}D(z^{-1}) = \{1 - A_M(z^{-1})\}$$

$\{1 - A_M(z^{-1})\}$ は任意の Hurwitz 多項式である。

$$(4.8) \quad \{1 - A_M(z^{-1})\} = 1 - a_{M1} z^{-1} - \dots - a_{Mn} z^{-n}$$

モデル追従制御を実現する周期フィードバック制御に関して、次の定理が得られる。

THEOREM 1. 制御系 (3.8), (3.9), (3.14), (3.15) と制御則 (4.1)~(4.8) において、(4.3) 式

を満足する多項式 $G_k(z^{-1})$ ($1 \leq k \leq m$) が存在すると仮定する. このとき任意の有界な目標信号 $y_M(i)$ に対して, 制御系の全ての信号は有界となり, 出力誤差は漸近的に零に収束する.

$$(4.9) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \{y_M(i) - y(i)\} = 0$$

証明. 最初に (4.9) 式を示す. 周期フィードバック制御 (4.1), (4.2) より次式が得られる.

$$(4.10) \quad y(i) = A(z^{-1})y(i) + z^{-d}v(i)$$

(4.10) 式を (4.4) 式に代入すると次のようになる.

$$(4.11) \quad [(1 - A(z^{-1}))L(z^{-1}) + z^{-d}D(z^{-1})]y(i) = (1 - A_M(z^{-1}))y_M(i)$$

ここで Diophantine 方程式 (4.7) より次式が成立することに着目する.

$$(4.12) \quad [(1 - A(z^{-1}))L(z^{-1}) + z^{-d}D(z^{-1})]y(i) = (1 - A_M(z^{-1}))y(i)$$

これより (4.11), (4.12) 式から次式を得る.

$$(4.13) \quad (1 - A_M(z^{-1}))y(i) = (1 - A_M(z^{-1}))y_M(i)$$

$\{1 - A_M(z^{-1})\}$ が安定であることから, 漸近的なモデル追従 (4.9) が実現する.

次に $v(i)$ と $u_k(i)$ が有界であることを示す. (4.10), (4.13) 式から次式が得られる.

$$(4.14) \quad \begin{aligned} (1 - A_M(z^{-1}))v(i) &= (1 - A(z^{-1}))\{1 - A_M(z^{-1})\}y(i+d) \\ &= (1 - A(z^{-1}))\{1 - A_M(z^{-1})\}y_M(i+d) \end{aligned}$$

ここに $\{1 - A_M(z^{-1})\}$ が安定であることと $y_M(i)$ の有界性から, $v(i)$ も有界であることが示される. 従って (4.1), (4.2) 式より $u_k(i)$ ($1 \leq k \leq m$) もまた有界であることがわかる. 以上より制御系の全ての信号が有界であることが示された.

これ以後, 本稿では $m=n$ である場合 (Case 1: m が最大の場合, Method 1) と, $m=2$ である場合 (Case 2: m が最小の場合, Method 2) の 2 通りの場合についてのみ考える. その 2 通りの場合には (4.3) 式の可解条件を求めることができる.

Method 1: $m=n$

m が最大になる場合を考える. m は以下のようにして定まる.

$$m = n \equiv \begin{cases} n' : & NT = n'\tau \ (N \geq 0: \text{整数}) \text{ の場合} \\ n'+1 : & \text{それ以外の場合} \end{cases}$$

これから導かれる多重サンプリング方式は Chammas and Leondes (1978a, 1978b), Araki and Hagiwara (1983), Kaczorek (1985), Lozano (1989), Ortega and Kreisselmeier (1990), Miyasato (1991a, 1991b, 1992), 宮里 (1991, 1992) らによって提案されたものと本質的に同じである. このとき制御系 (3.8), (3.9), (3.14), (3.15) は n 入力/1 出力系と見なすことができる.

$$(4.15) \quad y(i) = A(z^{-1})y(i) + \sum_{k=1}^{K-1} B_k(z^{-1})u_k(i - (d-1)) + \sum_{i=K}^n B_i(z^{-1})u_i(i-d)$$

ただし $A(z^{-1})$ と $B_k(z^{-1})$ ($1 \leq k \leq n$) は (3.17), (3.18), (3.19) 式によって定義される. ここで次の仮定をおく.

ASSUMPTION 1. (A, b) は可制御で, (c, A^n) は可観測である.

すると $B_k(z^{-1})$ ($1 \leq k \leq n$) に関して次の補題が得られる.

LEMMA 1. (A, b) が可制御, (c, A^n) が可観測であると仮定する (Assumption 1). このとき任意の $p(z^{-1})$ (z^{-1} について $n-1$ 次)

$$(4.16) \quad p(z^{-1}) = p_1 + p_2 z^{-1} + \cdots + p_n z^{-(n-1)} \quad (p_k \in \mathbf{R} : 1 \leq k \leq n)$$

に対して次式を満足する $\{h_k \in \mathbf{R} : k=1, 2, \dots, n\}$ が一意に存在する.

$$(4.17) \quad \sum_{k=1}^n h_k B_k(z^{-1}) = p(z^{-1})$$

(証明は付録参照.)

Lemma 1 より, $m=n$ のときには Assumption 1 のもとで (4.3) 式が一意解 $G_k(z^{-1}) \equiv g_k$ (スカラー; $n_g=0$) ($1 \leq k \leq n$) を有することがわかる. 従って周期フィードバック制御は以下のように表わされる.

$$(4.18) \quad \begin{aligned} u_k(i) &= g_k v(i-1), & (1 \leq k \leq K-1) \\ u_l(i) &= g_l v(i), & (K \leq l \leq n) \end{aligned}$$

ただし g_k ($1 \leq k \leq n$) は次式を満足するように定められる.

$$(4.19) \quad \sum_{k=1}^n g_k B_k(z^{-1}) = 1$$

以上より, Assumption 1 のもとで多重サンプリング方式 $m=n$ (Method 1) を使って安定なモデル追従制御系を構成することができる (Miyasato (1991a, 1991b, 1992), 宮里 (1991, 1992)).

THEOREM 2. $m=n$ (Method 1) とおいたときの制御系 (3.8), (3.9), (3.14), (3.15) 式と制御則 (4.3)~(4.7), (4.18), (4.19) において, (A, b) が可制御, (c, A^n) が可観測であると仮定する (Assumption 1). このとき任意の目標信号 $y_M(i)$ に対して制御系の全ての信号は一様有界となり, 出力誤差は漸近的に零に収束する.

$$(4.20) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \{y_M(i) - y(i)\} = 0$$

Theorem 2 の証明は Theorem 1 と Lemma 1 から容易に行えるので省略する. (c, A^n) の可観測性に関して次の補題が得られる.

LEMMA 2. (A, b) が可制御のとき A は cyclic となる. cyclic な A に対して次の事項が成立する.

1) A の固有値が互いに相異なるとき

$$(c, A^n) \text{ が可観測} \iff (c, A) \text{ が可観測}$$

2) それ以外のとき

$$(c, A^n) \text{ が可観測} \iff (c, A) \text{ が可観測で, } A \text{ の重複する固有値が非零}$$

(証明は付録参照.)

Method 2: $m=2$

次に $m=2$ の場合 (m が最小となる場合) について考える. このとき制御系 (3.8), (3.9), (3.14), (3.15) は 2 入力/1 出力系と見なすことができる.

$$(4.21) \quad y(i) = A(z^{-1})y(i) + \begin{cases} B_1(z^{-1})u_1(i-d) + B_2(z^{-1})u_2(i-d), & (K=1) \\ B_1(z^{-1})u_1(i-(d-1)) + B_2(z^{-1})u_2(i-d), & (K=2) \end{cases}$$

ただし $A(z^{-1})$ は (3.17) 式で定められ, $B_k(z^{-1})$ ($k=1, 2$) は (3.18), (3.19) 式あるいは次のように定められる.

$$(4.22) \quad \begin{aligned} B_1(z^{-1}) &\equiv b_{11} + b_{12}z^{-1} + \dots + b_{1n}z^{-(n-1)} \\ &= \begin{cases} z^{-(n-1)}c^T \text{adj}(zI - A^2)Ab, & (K=1) \\ z^{-(n-1)}c^T \text{adj}(zI - A^2)b, & (K=2) \end{cases} \end{aligned}$$

$$(4.23) \quad \begin{aligned} B_2(z^{-1}) &\equiv b_{21} + b_{22}z^{-1} + \dots + b_{2n}z^{-(n-1)} \\ &= \begin{cases} z^{-(n-1)}c^T \text{adj}(zI - A^2)b, & (K=1) \\ z^{-(n-1)}c^T \text{adj}(zI - A^2)Ab, & (K=2) \end{cases} \end{aligned}$$

上式は Mita et al. (1990), 新・北森 (1983) による 2-delay 入力制御系と等価である. ここで次の仮定をおく.

ASSUMPTION 2. $B_1(z^{-1})$ と $B_2(z^{-1})$ は既約である.

注意 1. Mita et al. (1990) によると, (c, A^2) が可観測, $(A^2, (Ab+b))$ が可制御で $c^T(Ab+b) \neq 0$ のとき, Assumption 2 はほとんど全ての $T(>0)$ に対して成立する.

$m=2$ (Method 2) としたときに, Assumption 2 のもとで (4.3) 式を満足する一意解 $G_k(z^{-1})$ ($n_g = n-2$) が存在する.

$$(4.24) \quad G_k(z^{-1}) = g_{k1} + g_{k2}z^{-1} + \dots + g_{kn-1}z^{-(n-2)}, \quad (k=1, 2)$$

従って周期フィードバック制御は以下のように表わされる.

$$(4.25) \quad u_1(i) = \begin{cases} G_1(z^{-1})v(i), & (K=1) \\ G_1(z^{-1})v(i-1), & (K=2) \end{cases}$$

$$(4.26) \quad u_2(i) = G_2(z^{-1})v(i)$$

ただし $G_k(z^{-1})$ ($k=1, 2$) は次の Bezout 等式を満足するように決定される.

$$(4.27) \quad G_1(z^{-1})B_1(z^{-1}) + G_2(z^{-1})B_2(z^{-1}) = 1$$

以上より Assumption 2 のもとで, 多重サンプリング方式 $m=2$ (Method 2) を用いて安定なモデル追従制御系を構成することができる (Miyasato (1993a, 1993b)).

THEOREM 3. $m=2$ (Method 2) としたときの制御系 (3.8), (3.9), (3.14), (3.15) と制御則 (4.4)~(4.8), (4.24)~(4.27) において, Assumption 2 が成立するとする. このとき任意の有界な目標信号 $y_M(i)$ に対して制御系の全ての信号は一様有界となり, 出力誤差は漸近的に零に収束する.

$$(4.28) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \{y_M(i) - y(i)\} = 0$$

Theorem 3 の証明は Theorem 1 と Assumption 2 から自明である。

注意 2. これまでに述べた以外に, m が $3 \leq m \leq n-1$ となる場合も考えることができるが, このとき周期フィードバック $G_k(z^{-1})$ ($1 \leq k \leq m$) は一意に定めることができない。

5. 多重サンプリングによる適応制御

本章ではシステムパラメータが未知の場合に, パラメータを推定しながら適応的に入力を作成する. $m=n$ (Method 1) あるいは $m=2$ (Method 2) のいずれのときも, 適応制御系は Theorem 2 または Theorem 3 と Certainty Equivalence (Goodwin and Sin (1984)) の原理に基づいて構成される. 制御系設計にあたって次の仮定をおく。

ASSUMPTION 3. 制御対象の次数 n とむだ時間 D が既知である (従って d と K も既知)。

以上の準備のもとに適応制御系を構成する. まず制御対象を以下のような回帰形式で表わす。

(制御対象)

$$(5.1) \quad y(i) = \theta^{(m)T} \phi^{(m)}(i-1), \quad (m=n \text{ or } 2) \\ \theta^{(m)}, \phi^{(m)}(i-1) \in \mathbf{R}^{mn+n}$$

ただし

$$(5.2) \quad \theta^{(n)T} \equiv [a_1, \dots, a_n, b_{11}, \dots, b_{1n}, b_{21}, \dots, b_{2n}, \dots, b_{n1}, \dots, b_{nn}]^T \quad (\in \mathbf{R}^{n^2+n})$$

$$(5.3) \quad \phi^{(n)}(i-1) \equiv [y(i-1), \dots, y(i-n), u_1(i-d+1), \dots, u_1(i-d-n+2), \dots, \\ u_{K-1}(i-d+1), \dots, u_{K-1}(i-d-n+2), \\ u_K(i-d), \dots, u_K(i-d-n+1), \dots, \\ u_n(i-d), \dots, u_n(i-d-n+1)]^T \quad (\in \mathbf{R}^{n^2+n})$$

$$(5.4) \quad \theta^{(2)T} \equiv [a_1, \dots, a_n, b_{11}, \dots, b_{1n}, b_{21}, \dots, b_{2n}]^T \quad (\in \mathbf{R}^{3n})$$

$$(5.5) \quad \phi^{(2)}(i-1) \equiv [y(i-1), \dots, y(i-n), u_1(i-d), \dots, u_1(i-d-n+1), \\ u_2(i-d), \dots, u_2(i-d-n+1)]^T \quad (\in \mathbf{R}^{3n}), \quad (K=1)$$

$$(5.6) \quad \phi^{(2)}(i-1) \equiv [y(i-1), \dots, y(i-n), u_1(i-d+1), \dots, u_1(i-d-n+2), \\ u_2(i-d), \dots, u_2(i-d-n+1)]^T \quad (\in \mathbf{R}^{3n}), \quad (K=2)$$

である. Assumption 1 ($m=n$: Method 1) あるいは Assumption 2 ($m=2$: Method 2) のもとで次式が成立することに着目する。

$$(5.7) \quad \det [B_0^{(m)}(\theta^{(m)})] \neq 0, \quad (m=n, \text{ or } 2)$$

$$(5.8) \quad B_0^{(n)}(\theta^{(n)}) \equiv \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{1n} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \quad (\in \mathbf{R}^{n \times n})$$

$$(5.9) \quad B_0^{(2)}(\theta^{(2)}) \equiv \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & \cdots & 0 & b_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & b_{11} & \ddots & \vdots & \vdots & b_{21} & \ddots & \vdots \\ b_{1n} & \vdots & \ddots & 0 & b_{2n} & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & b_{1n} & & b_{11} & 0 & b_{2n} & & b_{21} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{1n} & 0 & \cdots & 0 & b_{2n} \end{bmatrix} \quad (\in \mathbf{R}^{2(n-1) \times 2(n-1)})$$

以上の回帰形式に対して、次に示すような正規化システム、適応同定器、適応則 (Lozano (1992)) と制御則を導入する。

(正規化システム)

$$(5.10) \quad y_N(i) = \theta^{(m)T} \phi_N^{(m)}(i-1) \quad \left(\equiv \frac{y(i)}{1 + \|\phi^{(m)}(i-1)\|} \right)$$

$$(5.11) \quad \phi_N^{(m)}(i-1) \equiv \frac{\phi^{(m)}(i-1)}{1 + \|\phi^{(m)}(i-1)\|}$$

(適応同定器)

$$(5.12) \quad \hat{y}(i) = \hat{\theta}^{(m)}(i-1)^T \phi_N^{(m)}(i-1)$$

$$(5.13) \quad \hat{y}_N(i) = \hat{\theta}^{(m)}(i-1)^T \phi_N^{(m)}(i-1) \quad \left(\equiv \frac{\hat{y}(i)}{1 + \|\phi^{(m)}(i-1)\|} \right)$$

ただし $\hat{\theta}^{(m)}(i-1) (\in \mathbf{R}^{mn+n})$ は時刻 $(i-1)$ における $\theta^{(m)}$ の推定値である。

(適応則 I)

$$(5.14) \quad \hat{\theta}^{(m)}(i) = \hat{\theta}^{(m)}(i-1) + \frac{P^{(m)}(i-1) \phi_N^{(m)}(i-1)}{1 + \phi_N^{(m)}(i-1)^T P^{(m)}(i-1) \phi_N^{(m)}(i-1)} \epsilon_N(i)$$

$$(5.15) \quad P^{(m)}(i) = P^{(m)}(i-1) - \frac{P^{(m)}(i-1) \phi_N^{(m)}(i-1) \phi_N^{(m)}(i-1)^T P^{(m)}(i-1)}{1 + \phi_N^{(m)}(i-1)^T P^{(m)}(i-1) \phi_N^{(m)}(i-1)}$$

$$(5.16) \quad \epsilon(i) = y(i) - \hat{y}(i)$$

$$(5.17) \quad \epsilon_N(i) = y_N(i) - \hat{y}_N(i) \quad \left(\equiv \frac{\epsilon(i)}{1 + \|\phi^{(m)}(i-1)\|} \right)$$

$$(5.18) \quad P^{(m)}(0) = P^{(m)}(0)^T > 0$$

$$(5.19) \quad \bar{\theta}^{(m)}(i) = \hat{\theta}^{(m)}(i) + P^{(m)}(i) \alpha^{(m)}(i)$$

ここに $\alpha^{(m)}(i) (\in \mathbf{R}^{n+mn})$ は $i \rightarrow \infty$ とともに収束する有界なベクトルで、 $B_0^{(m)}(\hat{\theta}^{(m)}(i))$ が正則行列のときは零ベクトルとなる。

(制御則)

(Method 1: $m=n$)

$$(5.20) \quad \begin{aligned} u_k(i) &= \bar{g}_k(i - d_c) v(i-1), & (1 \leq k \leq K-1) \\ u_l(i) &= \bar{g}_l(i - d_c) v(i), & (K \leq l \leq n) \end{aligned}$$

$$(5.21) \quad \bar{g}^{(n)}(i) = \{B_0^{(n)}(\bar{\theta}^{(n)}(i))\}^{-1} e_1^{(n)} \quad \left(\Leftrightarrow \sum_{k=1}^n \bar{g}_k(i) \bar{B}_k(i, z^{-1}) = 1 \right)$$

$$(5.22) \quad \bar{g}^{(n)}(i) \equiv [\bar{g}_1(i), \dots, \bar{g}_n(i)]^T \quad (\in \mathbf{R}^n)$$

$$(5.23) \quad e_1^{(n)} \equiv [1, 0, \dots, 0]^T \quad (\in \mathbf{R}^n)$$

(Method 2: $m=2$)

$$(5.24) \quad u_1(i) = \begin{cases} \bar{G}_1(i-d_c, z^{-1})v(i), & (K=1) \\ \bar{G}_1(i-d_c, z^{-1})v(i-1), & (K=2) \end{cases}$$

$$(5.25) \quad u_2(i) = \bar{G}_2(i-d_c, z^{-1})v(i), \quad (K=1, 2)$$

$$(5.26) \quad \bar{g}^{(2)}(i) = \{B_0^{(2)}(\bar{\theta}^{(2)}(i))\}^{-1} e_1^{(2)} \quad \left(\Leftrightarrow \sum_{k=1}^2 \bar{G}_k(i, z^{-1})\bar{B}_k(i, z^{-1}) = 1 \right)$$

$$(5.27) \quad \bar{G}_k(i, z^{-1}) \equiv \bar{g}_{k1}(i) + \bar{g}_{k2}(i)z^{-1} + \cdots + \bar{g}_{k,n-1}(i)z^{-(n-2)}, \quad (k=1, 2)$$

$$(5.28) \quad \bar{g}^{(2)}(i) \equiv [\bar{g}_{11}(i), \dots, \bar{g}_{1,n-1}(i), \bar{g}_{21}(i), \dots, \bar{g}_{2,n-1}(i)]^T \quad (\in \mathbf{R}^{2(n-1)})$$

$$(5.29) \quad e_1^{(2)} \equiv [1, 0, \dots, 0]^T (\in \mathbf{R}^{2(n-1)})$$

(Method 1 と Method 2)

$$(5.30) \quad \bar{B}_k(i, z^{-1}) = \bar{b}_{k1}(i) + \bar{b}_{k2}(i)z^{-1} + \cdots + \bar{b}_{kn}(i)z^{-(n-1)}, \quad (1 \leq k \leq m)$$

ただし $d_c (\geq 0)$ は計算による時間遅れ, $\bar{b}_{kj}(i)$ ($1 \leq k \leq m, 1 \leq j \leq n$) は $\bar{\theta}^{(m)}(i)$ の要素であり, $v(i)$ は以下のように決定される信号である.

$$(5.31) \quad \bar{L}(i-d_c, z^{-1})v(i) = \{1 - A_m(z^{-1})\}y_m(i+d) - \bar{D}(i-d_c, z^{-1})y(i)$$

$$(5.32) \quad \{1 - \bar{A}(i, z^{-1})\}\bar{L}(i, z^{-1}) + z^{-d}\bar{D}(i, z^{-1}) = \{1 - A_m(z^{-1})\}$$

$$(5.33) \quad \bar{L}(i, z^{-1}) \equiv 1 + \bar{l}_1(i)z^{-1} + \cdots + \bar{l}_{d-1}(i)z^{-(d-1)}$$

$$(5.34) \quad \bar{D}(i, z^{-1}) \equiv \bar{d}_0(i) + \bar{d}_1(i)z^{-1} + \cdots + \bar{d}_{n-1}(i)z^{-(n-1)}$$

$$(5.35) \quad \bar{A}(i, z^{-1}) = \bar{a}_1(i)z^{-1} + \cdots + \bar{a}_n(i)z^{-n}$$

ここに $\bar{a}_j(i)$ ($1 \leq j \leq n$) も $\bar{\theta}^{(m)}(i)$ の要素である. 調整ベクトル $\alpha^{(m)}(i)$ ($\in \mathbf{R}^{mn+n}$) は $B_0^{(m)}(\bar{\theta}^{(m)}(i))$ ($m=n$ or 2) が正則となるように定められる (Lozano and Goodwin (1985), Lozano (1992)). また (5.26) と (5.32) 式における時変多項式の積を以下のように定義する (Goodwin and Sin (1984)).

時変多項式 $\bar{A}(i, z^{-1}) = \sum_k \bar{a}_k(i)z^{-k}$ と $\bar{B}(i, z^{-1}) = \sum_k \bar{b}_k(i)z^{-k}$ に対して

$$(5.36) \quad \bar{A}(i, z^{-1})\bar{B}(i, z^{-1}) \equiv \sum_k \sum_l \bar{a}_k(i)\bar{b}_l(i)z^{-(k+l)} \\ (= \bar{B}(i, z^{-1})\bar{A}(i, z^{-1}))$$

$$(5.37) \quad \bar{A}(i, z^{-1}) \cdot \bar{B}(i, z^{-1}) \equiv \sum_k \sum_l \bar{a}_k(i)\bar{b}_l(i-k)z^{-(k+l)} \\ (\neq \bar{B}(i, z^{-1}) \cdot \bar{A}(i, z^{-1})).$$

以下の定理が本稿の主要な結果である.

THEOREM 4. 制御対象 (3.8), (3.9), (3.14), (3.15) に適応則 (5.14)~(5.19) と制御則 (5.20)~(5.23) (Method 1: $m=n$), あるいは (5.24)~(5.29) (Method 2: $m=2$), (5.30)~(5.35) を適用して構成される制御系を考える. Assumption 1 (Method 1: $m=n$) あるいは Assumption 2 (Method 2: $m=2$) と, Assumption 3 が成立するとする. 調整ベクトル $\alpha^{(m)}(i)$ ($\in \mathbf{R}^{mn+n}$) (有界で $i \rightarrow \infty$ とともに収束) を次式が成立するように決定する.

$$(5.38) \quad |\det[B_0^{(m)}(\bar{\theta}^{(m)}(i))]| \geq \delta > 0 \\ (\bar{\theta}^{(m)}(i) = \bar{\theta}^{(m)}(i) + P^{(m)}(i)\alpha^{(m)}(i)), \quad (m=n \text{ or } 2)$$

このとき任意の有界な目標信号 $y_m(i)$ に対して, 制御系の全ての信号は一様有界となり, 出力誤差は漸近的に零に収束する.

$$(5.39) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \{y_M(i) - y(i)\} = 0$$

証明. Lozano (1992) の結果から次の事項が導かれる.

- 1) $\epsilon_N(i) \rightarrow 0$, $P^{(m)}(i)\phi_N^{(m)}(i) \rightarrow 0$.
- 2) $\bar{\theta}^{(m)}(i)$ と $P^{(m)}(i)$ が有界で収束する.

ここで以下のような拡張同定誤差を定義する.

$$(5.40) \quad \begin{aligned} \bar{\epsilon}(i) &\equiv \epsilon(i) - \alpha^{(m)}(i-1)^T P^{(m)}(i-1) \phi^{(m)}(i-1) \\ &= y(i) - \bar{\theta}^{(m)}(i-1)^T \phi^{(m)}(i-1) \end{aligned}$$

$$(5.41) \quad \begin{aligned} \bar{\epsilon}_N(i) &\equiv \epsilon_N(i) - \alpha^{(m)}(i-1)^T P^{(m)}(i-1) \phi_N^{(m)}(i-1) \\ &= y_N(i) - \bar{\theta}^{(m)}(i-1)^T \phi_N^{(m)}(i-1) \quad \left(\equiv \frac{\bar{\epsilon}(i)}{1 + \|\phi^{(m)}(i-1)\|} \right) \end{aligned}$$

このとき次の事項が導かれる.

- 3) $\bar{\epsilon}_N(i) \rightarrow 0$.
- 4) $\bar{\theta}^{(m)}(i)$ は有界で収束する.

さらに 4) の事項と (5.39) より次の 5) を示すことができる.

- 5) $\bar{g}_k(i)$ ($1 \leq k \leq n$) (Method 1: $m=n$)
 $\bar{g}_{kj}(i)$ ($k=1, 2; 1 \leq j \leq n-1$) (Method 2: $m=2$)
 $\bar{l}_j(i)$ ($1 \leq j \leq d-1$), $\bar{d}_j(i)$ ($0 \leq j \leq n-1$)
 は有界で収束する.

表記の簡単のために $A(z^{-1})$, $\bar{A}(i, z^{-1})$ のかわりに A , $\bar{A}(i)$ 等のように記するものとする. 以下の信号を定義する.

$$(5.42) \quad w(i) \equiv \{1 - \bar{A}(i)\} \cdot (1 - A_M) y_M(i+d)$$

$$(5.43) \quad z(i) \equiv z^{-d} \cdot (1 - A_M) y_M(i+d)$$

このとき制御系全体は入力が $w(i)$, $z(i)$ 及び $\bar{\epsilon}(i)$ で, 出力が $v(i)$ 及び $y(i)$ となるような線形時変システムとして表現できる.

$$(5.44) \quad \begin{bmatrix} (1 - A_M) + \Delta_1(i) & \Delta_2(i) \\ \Delta_3(i) & (1 - A_M) + \Delta_4(i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(i) \\ y(i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w(i) - \bar{D}(i)\bar{\epsilon}(i) \\ z(i) + \bar{L}(i)\bar{\epsilon}(i) \end{bmatrix}$$

ただし $\Delta_m(i)$ ($1 \leq m \leq 4$) は z^{-1} に関する時変多項式で, その係数はすべて $i \rightarrow \infty$ で零に収束する.

$$(5.45) \quad \Delta_m(i) = \Delta_m(i, z^{-1}) \rightarrow 0, \quad (\text{as } i \rightarrow \infty), \quad (1 \leq m \leq 4)$$

このとき線形時変システム (5.44) は特性多項式が $\{1 - A_M(z^{-1})\}^2$ であるような漸近指数安定なシステムに収束する. つまり線形時変システム (5.44) の特性根 (時変) は, $\{1 - A_M(z^{-1})\}^2 = 0$ の根 ($\in \mathbf{Z}_s \equiv \{z: |z| < 1\} = \text{安定根の領域}$) に収束する. 従って $i(\geq N)$ (N は十分大きな有限の整数) に対して, システム (5.44) の特性根も領域 \mathbf{Z}_s に含まれる (安定根の領域 \mathbf{Z}_s は開集合であるから). 以上の考察と信号 $w(i)$, $z(i)$ と多項式 $\bar{D}(i)$, $\bar{L}(i)$ の全ての係数が有界であることから, 以下の事項が成立する (Goodwin and Sin (1984)).

$$(5.46) \quad |v(i)| \leq M_1 + M_2 \sup_{j \leq i} |\bar{\epsilon}(j)|$$

$$(5.47) \quad |y(i)| \leq M_3 + M_4 \sup_{j \leq i} |\bar{\epsilon}(j)|$$

$$(0 < M_1, M_2, M_3, M_4 < \infty)$$

5) の事項と (5.20) (Method 1: $m=n$) あるいは (5.24), (5.25) (Method 2: $m=2$) を考慮すると

$$(5.48) \quad |u_k(i)| \leq M_5 + M_6 \sup_{j \leq i} |\bar{\epsilon}(j)|, \quad (0 < M_5, M_6 < \infty), \quad (1 \leq k \leq m)$$

が得られ、これより次の不等式が導かれる。

$$(5.49) \quad \|\phi^{(m)}(i-1)\| \leq M_7 + M_8 \sup_{j \leq i} |\bar{\epsilon}(j)|, \quad (0 < M_7, M_8 < \infty)$$

従って 3) の事項と Key Technical Lemma (Goodwin and Sin (1984)) より、 $\phi^{(m)}(i)$ と $\bar{\epsilon}(i)$ の一様有界性と、 $\bar{\epsilon}(i)$ が漸近的に零に収束することが示せる。

$$(5.50) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \bar{\epsilon}(i) = 0$$

以上より全ての信号の一様有界性が示された。

次に出力誤差の収束性を示す。まず (5.44) より

$$(5.51) \quad (1 - A_M)y(i) + \Delta_4(i)y(i) + \Delta_3(i)v(i) = (1 - A_M)y_M(i) + \bar{L}(i)\bar{\epsilon}(i)$$

が得られる。4) と 5) の事項と、(5.45), (5.50) 及び $y(i)$ と $v(i)$ の有界性から

$$(5.52) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \{1 - A_M(z^{-1})\} \{y(i) - y_M(i)\} = 0$$

が導かれる。ここに $\{1 - A_M(z^{-1})\}$ が安定多項式であることから (5.39) が示される。

注意 3. Assumption 1 (Method 1: $m=n$) または Assumption 2 (Method 2: $m=2$) のもとでは、不等式 (5.7) が成立する。その場合、ある $\delta(>0)$ に対して (5.38) を満足し、 $i \rightarrow \infty$ で収束するような有界なベクトル $\alpha^{(m)}(i)$ が存在する ($\alpha^{(m)}(i)$ を決定するアルゴリズムについては Lozano and Goodwin (1985) と Lozano (1992) を参照)。 (5.38) を満足する $\alpha^{(m)}(i)$ は有限回のステップで求めることができる。

注意 4. それぞれの方法 (Method 1, Method 2) において同定すべきシステムパラメータの個数と計算すべき制御パラメータの個数は表 1 のとおりである。Method 2 ($m=2$) においては動的な周期フィードバックが必要となるが、次数 n が大きいときは Method 2 のほうが Method 1 よりも構成が簡単になる (制御パラメータの数には大きな差はないが、同定すべきシステムパラメータの数は Method 1 のほうが大幅に多いから)。

なお適応則としては Theorem 3 で示したもの以外に固定トレース型の最小 2 乗法 (Lozano and Goodwin (1985)) も考えることができる。

THEOREM 5. 同じ制御則を採用する。しかし適応則は (5.14)~(5.19) のかわりに以下を採用する。

表 1. 調整パラメータの個数.

	システムパラメータの個数	制御パラメータの個数
Method 1 ($m=n$)	n^2+n	$2n+d-1$
Method 2 ($m=2$)	$3n$	$3n+d-3$

(適応則 II)

$$(5.53) \quad \hat{\theta}^{(m)}(i) = \hat{\theta}^{(m)}(i-1) + \frac{P^{(m)}(i-1)\phi_N^{(m)}(i-1)}{1 + \phi_N^{(m)}(i-1)^T P^{(m)}(i-1) \phi_N^{(m)}(i-1)} \epsilon_N(i)$$

$$(5.54) \quad P^{(m)}(i) = \frac{1}{\lambda(i)} \left\{ P^{(m)}(i-1) - \frac{P^{(m)}(i-1)\phi_N^{(m)}(i-1)\phi_N^{(m)}(i-1)^T P^{(m)}(i-1)}{1 + \phi_N^{(m)}(i-1)^T P^{(m)}(i-1) \phi_N^{(m)}(i-1)} \right\}$$

$$(5.55) \quad \lambda(i) = 1 - \frac{1}{\text{trace} P^{(m)}(0)} \cdot \frac{\phi_N^{(m)}(i-1)^T P^{(m)}(i-1)^2 \phi_N^{(m)}(i-1)}{1 + \phi_N^{(m)}(i-1)^T P^{(m)}(i-1) \phi_N^{(m)}(i-1)}$$

$$(5.56) \quad \epsilon(i) = y(i) - \hat{y}(i)$$

$$(5.57) \quad \epsilon_N(i) = y_N(i) - \hat{\theta}^{(m)}(i-1)^T \phi_N^{(m)}(i-1) \left(\equiv \frac{\epsilon(i)}{1 + \|\phi_N^{(m)}(i-1)\|^2} \right)$$

$$(5.58) \quad \bar{\theta}^{(m)}(i) = \bar{\theta}^{(m)}(i) + P^{(m)}(i) \alpha^{(m)}(i)$$

このとき同じ条件のもとで、制御系は一様有界となり出力誤差は漸的に零に収束する。

証明は Theorem 2 とほぼ同様に行えるので省略する。

6. 数値例 (サンプル点にのみ着目した場合)

提案する手法の有効性を示すために数値実験を行った。以下のような連続時間系を考える。

$$(6.1) \quad G(s) = \frac{1}{(s+1)^3}$$

$$\left(G_0(s) = \frac{1}{(s+1)^3} \right)$$

制御の目的は、制御対象 (6.1) のサンプル出力 $y(iT)$ をあらかじめ与えられた目標信号 $y_M(iT)$ に追従させることである ($y(iT) \rightarrow y_M(iT)$)。サンプリング周期は $T=1$ とした。このとき通常のサンプリング手法 (Fig.1) に基づく $G(s)$ の離散時間モデルの極と零点は以下のようになる。

極: 0.367879 (安定)

零点: -0.123776 (安定), -1.79896 (不安定)

これより不安定な零点 (-1.79896) のために、普通のモデル規範形適応制御方式 (MRAC) は適用できない。

通常の手法に対し提案する手法では、入力サンプリング周期は $T/n=1/3$ (Method 1: $m=n$) または $T/2=1/2$ (Method 2: $m=2$) であり、出力サンプリング周期は $T=1$ となる。目標信号と設計パラメータは以下のように選んだ。

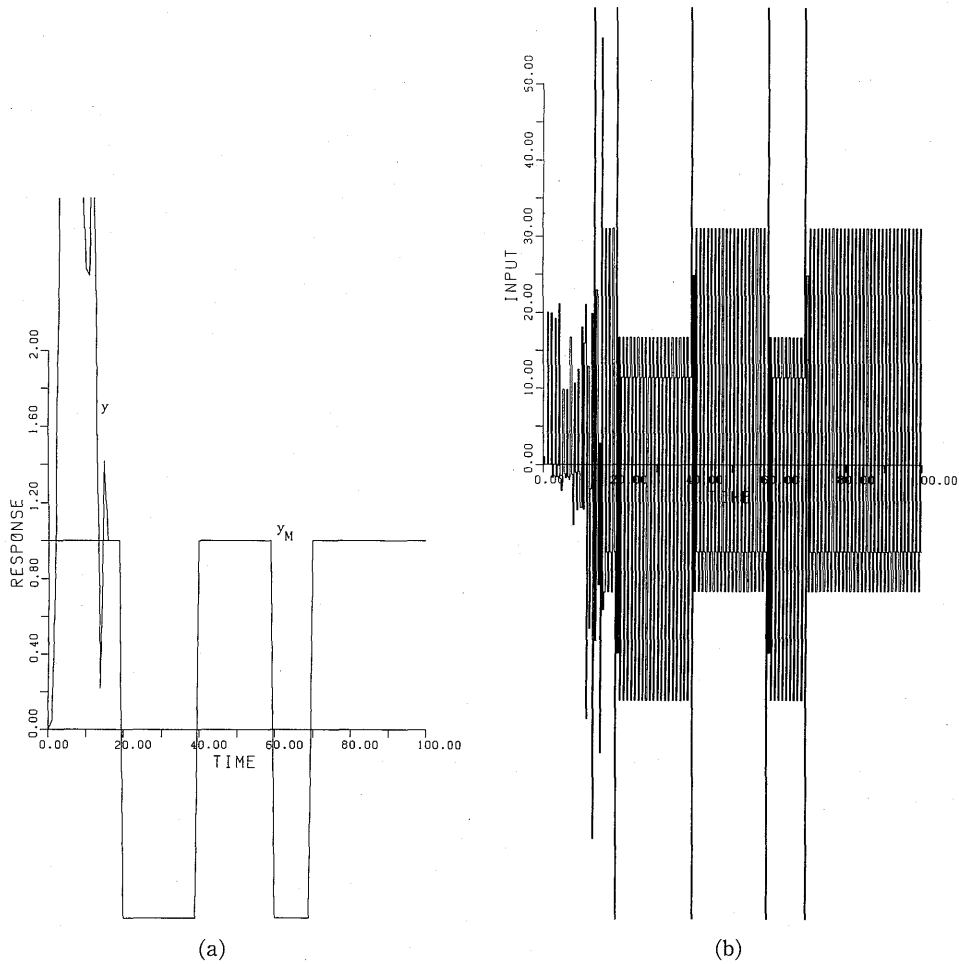


Fig. 3. (a) Simulation results (Method 1, Adaptive Law I). Outputs.
(b) Simulation results (Method 1, Adaptive Law I). Inputs.

$$\begin{aligned}
 y_M(i) &= (-1)^{\lfloor \frac{i}{20} \rfloor}, \quad (0 \leq i < 70); & y_M(i) &= 1, \quad (i \geq 70) \\
 1 - A_M(z^{-1}) &= 1, \quad d_c = 0 \\
 P^{(m)}(0) &= 10^8 \cdot I \\
 B_0^{(n)}(\hat{\theta}^{(n)}(0)) &= 0.1 \cdot I_3, \quad (m=n) \\
 B_0^{(2)}(\hat{\theta}^{(2)}(0)) &= 0.1 \cdot I_4, \quad (m=2) \\
 n' &= 3, \quad \tau = 0 \\
 n &= 3, \quad D = 0 \quad (m=n), \quad D = 0 \quad (m=2), \quad K=1, \quad d=1
 \end{aligned}$$

Fig. 3 (Method 1) と Fig. 4 (Method 2) は適応則 I を用いたときの結果である。それらの数値例では $B_0^{(m)}(\hat{\theta}^{(m)}(i))$ が常に正則であったので、 $\alpha^{(m)}(i) \equiv 0$ とおいた。不安定零点が存在するにもかかわらず入力是有界で、出力誤差は漸近的に零に収束していることがわかる。ただしここではサンプル点上の出力のみを問題としていることに注意する。

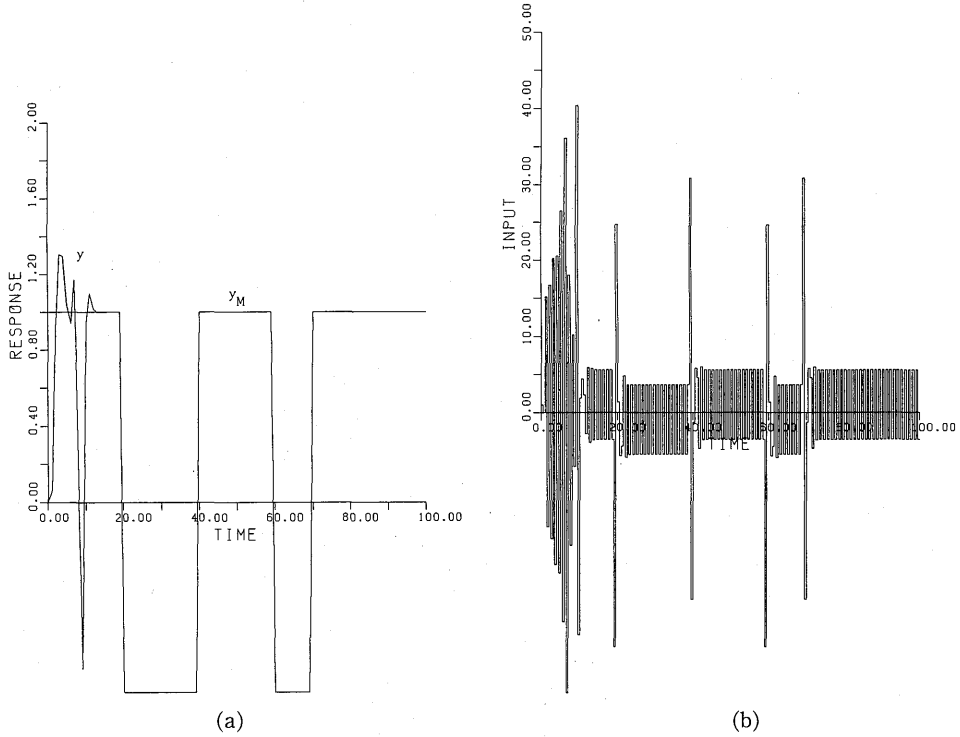


Fig. 4. (a) Simulation results (Method 2, Adaptive Law I). Outputs.
(b) Simulation results (Method 2, Adaptive Law I). Inputs.

7. サンプル点間応答と入力特性の改善

6章の数値例において入力が振動的になる現象が見られる。このような問題は Moore et al. (1993) でも指摘されているように、多重サンプリング方式が零点の再配置を行うために従来より短い周期で入出力特性を切り換えているからであり、これにより当然のことながら出力のサンプル点間応答は劣化する。本章では5章で述べた2つの方法のうち、調整するパラメータ数や入力の切り換え回数の点からより実用的と思われる Method 2 に対して、入力の振動を緩和して出力のサンプル点間応答を改善する1手法を提案する (以後 Method 2' とする)。

入力が振動的になるのは、(5.26) 式から一意に決まる解 $\bar{G}_k(i, z^{-1})$ ($k=1, 2$) が互いに異なるためである。これに対して自由度を増やすことで得られる解の集合の中から、望ましい特性を持つフィードバック解を選択する。以下のように次数を大きくした Bezout 等式の解 $\bar{G}_k(i, z^{-1})$ ($k=1, 2$) を考える。

$$(7.1) \quad \sum_{k=1}^2 \bar{G}_k(i, z^{-1}) \bar{B}_k(i, z^{-1}) = 1$$

$$(7.2) \quad \bar{G}_k(i, z^{-1}) = \bar{g}_{k1}(i) + \bar{g}_{k2}(i)z^{-1} + \cdots + \bar{g}_{k,m+1}(i)z^{-m} \quad (k=1, 2)$$

$$(7.3) \quad m = n - 2 + r \geq n - 2 \quad (r \geq 0)$$

$\bar{G}_k(i, z^{-1})$ の次数 $m = n - 2 + r$ は、解が存在するために必要な最低次数 $n - 2$ 以上に設定する。 r が解の自由度になる。このとき自由度が r の一般解 $\bar{G}_k(i, z^{-1})$ は以下のように表わされる。

$$(7.4) \quad \bar{G}_k(i, z^{-1}) = \bar{G}_{k0}(i, z^{-1}) + \sum_{j=1}^r \gamma_j \bar{G}_{kj}(i, z^{-1}) \quad (k=1, 2)$$

ただし γ_j は自由パラメータ, $\bar{G}_{kj}(i, z^{-1})$ は次式を満たす解 (自由度の数だけ存在) であり,

$$(7.5) \quad \sum_{k=1}^2 \bar{G}_{kj}(i, z^{-1}) \bar{B}_k(i, z^{-1}) = 0 \quad (1 \leq j \leq r)$$

$\bar{G}_{k0}(i, z^{-1})$ は最小次数 ($m=n-2$ 次) の通常の Bezout 等式の解である. ここで r 個の自由パラメータを入力振動性を緩和するために用いる. つまり入力振動性は

$$(7.6) \quad \Delta \bar{G}(i, z^{-1}) \equiv \bar{G}_1(i, z^{-1}) - \bar{G}_2(i, z^{-1})$$

に起因することに着目し, $\Delta \bar{G}(i, z^{-1})$ のある種のノルムに関係する値, たとえば

$$(7.7) \quad J_1(i) \equiv \| [\Delta \bar{G}(i, \exp(-j\omega_1 T)), \Delta \bar{G}(i, \exp(-j\omega_2 T)), \dots, \Delta \bar{G}(i, \exp(-j\omega_M T))] \|^2$$

($0 \leq \omega_1 \sim \omega_M < 2\pi/T$)

$$(7.8) \quad J_2(i) \equiv \int_0^{2\pi/T} |\Delta \bar{G}(i, \exp(-j\omega T))|^2 W(\omega T) d\omega \quad (W(\omega T): \text{重み関数})$$

などのいずれかを最小化するように γ_j を決定する. そのような最適値 γ_j は, $n, r, \omega_1 \sim \omega_M, M$ が決まれば $J_1(i)$ に対しては解析的に求めることができる. また $J_2(i)$ については, $W(\omega T)$ の選び方により解析的に求められる場合もある.

8. 数値例 (サンプル点間応答も考慮した場合)

第6章と同じ対象について, 前章で述べた手法 Method 2' を適用して入力特性とサンプル点間応答を改善する (設定条件は6章と同じ).

まず通常の Method 2 を用いたときの出力のサンプル点間も含めた応答を Fig. 5 に示す. 目標信号が一定になっても入力が振動的であるために, 出力も振動的になっていることがわかる (ただしサンプル点上では目標信号に一致している).

次に第7章で用いた手法 Method 2' を適用する. $J_1(i)$ と $J_2(i)$ を評価関数として入力特性を改善するが, ここでは目標信号の特性と計算の簡単のために $J_1(i)$ においては $M=1, \omega_1=0$ (ステップ状の信号に対応), $J_2(i)$ においては $W(\omega T) \equiv 1$ ($0 \leq \omega < 2\pi/T$) とした. このとき $J_2(i)$ は以下のようになって, 最適値 γ_1 は解析的に求められる.

$$(8.1) \quad J_2(i) = (2\pi/T) \sum_{j=1}^m \{ \bar{g}_{1j}(i) - \bar{g}_{2j}(i) \}^2$$

またこの例題では $\omega_1=0, M=1$ より $r \geq 1$ に対して $J_1(i)=0$ とすることができる ($J_1(i)$ についても最適値 γ_1 は解析的に求められる). Fig. 6 は $r=1$ として $J_1(i)$ を最小にするように γ_1 を決定した場合である. 最小値として $J_1(i)=0$ が実現されたことより, $\bar{G}_1(i, z^{-1})$ と $\bar{G}_2(i, z^{-1})$ の定常ゲインが等しくなって

$$(8.2) \quad \bar{G}_1(i, 1) = \bar{G}_2(i, 1).$$

目標信号が一定のときは, 隣接する入力の差も零に漸近的に収束している. またこれにより出力も一定値に収束している (サンプル点間も含めて振動が生じない). 一方 Fig. 7 は $r=1$ として $J_2(i)$ を最小化するように γ_1 を決定した場合である. Fig. 4, Fig. 5 に比べると入力の振動特性と出力のサンプル点間応答に若干の改善がみられるが, Fig. 6 と異なり隣接する入力間の差は残ったままであるし, 出力も振動的である. 最後に Fig. 8 では $r=2$ として, 最初に $J_2(i)$ を

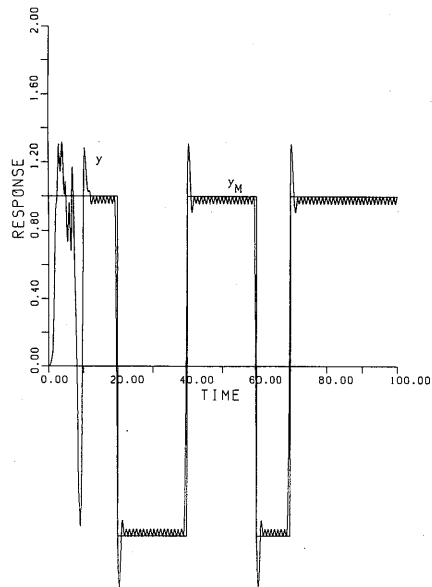


Fig. 5. Simulation results (Method 2, Adaptive Law I). Outputs (including intersampling responses).

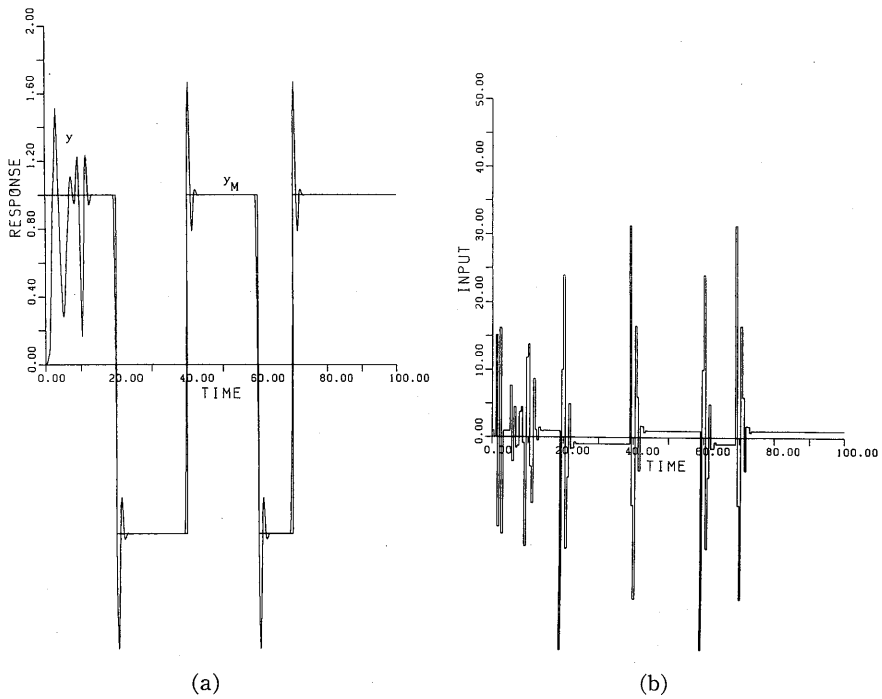


Fig. 6. (a) Simulation results (Method 2', Adaptive Law I, $J_1(i)$). Outputs (including intersampling responses).
(b) Simulation results (Method 2', Adaptive Law I, $J_1(i)$). Inputs.

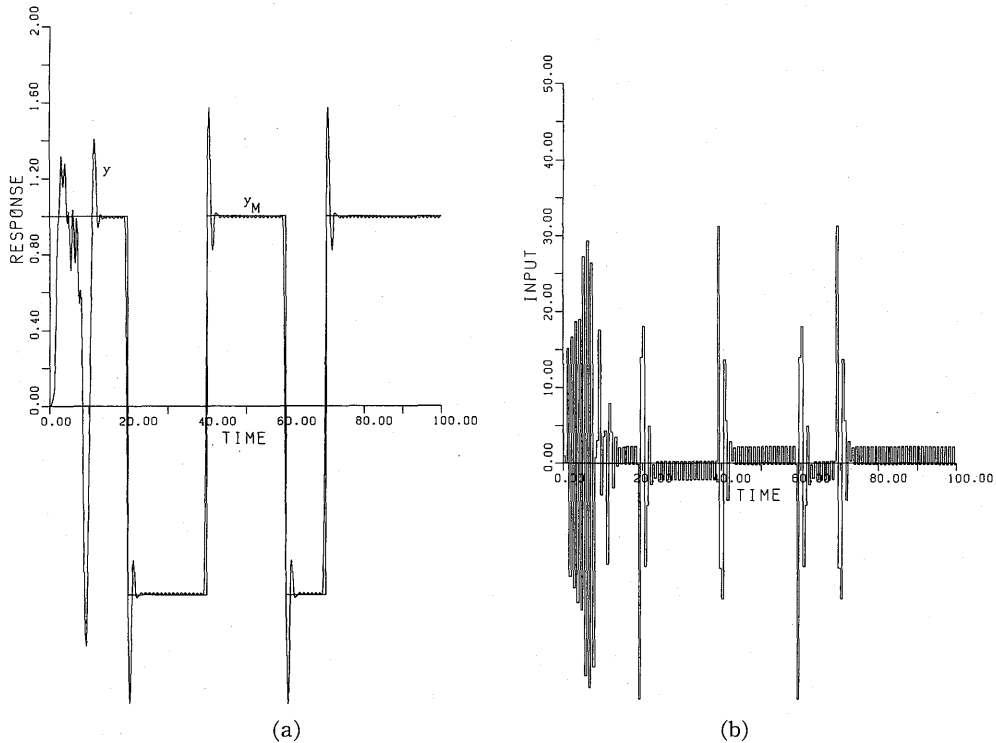


Fig. 7. (a) Simulation results (Method 2', Adaptive Law I, $J_2(i)$). Outputs (including intersampling responses).
(b) Simulation results (Method 2', Adaptive Law I, $J_2(i)$). Inputs.

最小化するような γ_1 と γ_2 の関係式を求め、次にその中で $J_1(i)$ を最小化する (0 にする) γ_1 と γ_2 を特定化した。Fig. 6 と同様に目標信号が一定のときに隣接する入力差が漸近的に零に収束しているし (この場合も (8.2) が成立する), 出力もサンプル点間を含めて一定値に収束している。

またこれ以外の他の目標信号の場合でもその周波数成分が特定化できるときには, その成分に対応して $\omega_1 \sim \omega_M$, M を設定して $J_1(i) = 0$ となるように r を定めてフィードバック解を求めると (本章の例では $\omega_1 = 0$, $M = 1$, $r \geq 1$), 入力差 $u_1(i) - u_2(i)$ を零に収束させることができる。

9. 結 言

多重サンプリングに基づく周期フィードバックを用いて, 離散時間非最小位相系に対してモデル規範形適応制御系を構成する手法を提案した。本手法においては, 制御対象の極だけでなく零点も極零相殺によらずに自由に再配置できるので, 入出力の有界性が保証されるモデル追従型の制御系が実現される。本稿では周期フィードバックの可解条件が陽に求められる 2 通りの制御系構成法を示したが, 制御対象の次数が大きい場合には, 同定するパラメータ数, 調整する制御パラメータ数, 及び出力の 1 回のサンプリング間の入力の切り換え回数から, Method 2 ($m=2$) のほうが Method 1 ($m=n$) よりも有用な方法だと思われる (注意 4)。

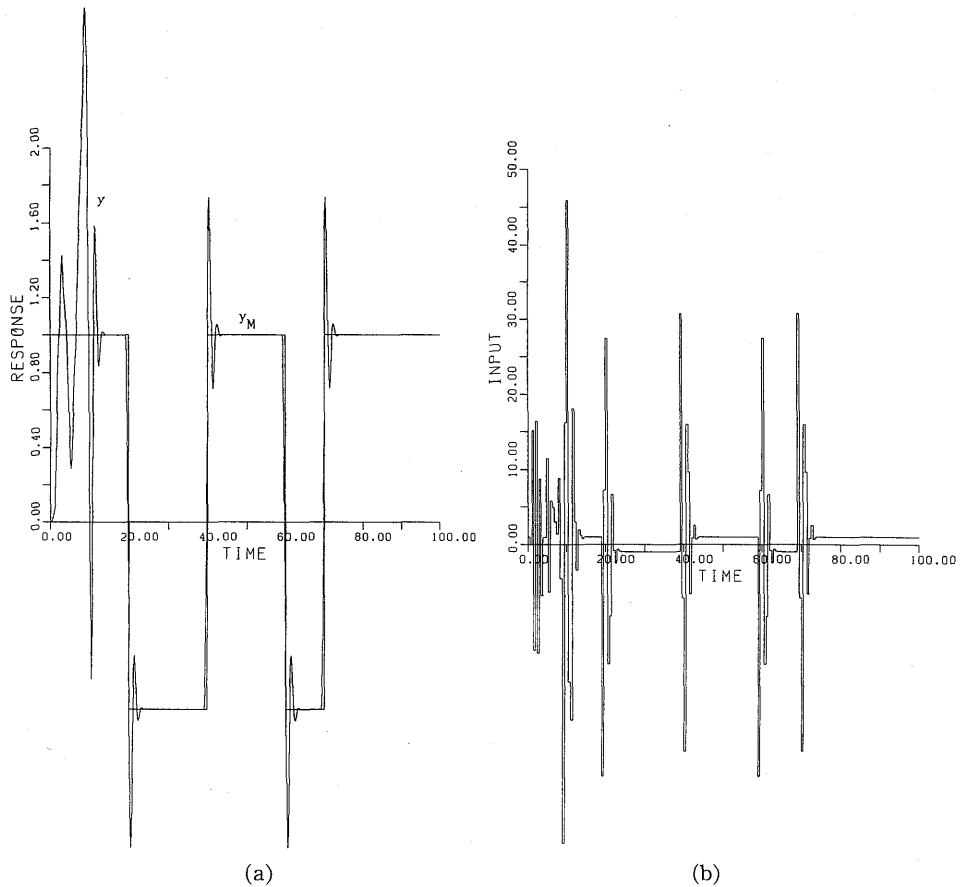


Fig. 8. (a) Simulation results (Method 2', Adaptive Law I, $J_1(i)$, $J_2(i)$). Outputs (including intersampling responses).
 (b) Simulation results (Method 2', Adaptive Law I, $J_1(i)$, $J_2(i)$). Inputs.

なお本手法により対象が非最小位相系であっても、サンプリング時点では入出力の有界性と出力誤差の零収束性が保証される。しかしその一方で、多重サンプリングに伴い入出力特性が短い周期で切り換えられることによる入力の振動現象が見られ、そのため出力のサンプル点間応答が劣化する場合が多い。これに対しては Method 2 を拡張して、Bezout 等式の次数を上げて得られる自由度を使って、多重サンプリング間で入力のフィードバックゲインができるだけ等しくなるようにすることで、入力の振動現象もある程度緩和させることができ、出力のサンプル点間応答も改善されることを示した (Method 2')。Method 2' のより一般的な表現 (Method 1 に対応する形式、またはより一般的な制御系の表現に対応する形式)、さらに多くの例題による検討、あるいは $J_1(i)$, $J_2(i)$ 以外の別の評価の可能性について検討することは今後の課題である。なお同様の方法と位相差に着目したフィードバック解についての考察が、水野・藤原 (1994) によっても一部行われていることを付言しておく。またサンプル点間応答をより適切に評価するためには、サンプル点間応答もフィードバックする制御方式 (ある種の出力時変制御 (Hagiwara and Araki (1988)) や 2-delay 出力制御 (Mita et al. (1990))) も考慮に入れなければならない。これも今後の研究課題としたい。

最後に貴重なコメントをいただいた査読者の方々にお礼申し上げます。また7章と8章の内容について助言をいただいた名古屋工業大学 水野直樹助教授に感謝します。

付 録

A.1 Lemma 1 の証明

(c, A^n) が可観測であるという仮定から、次式を満たす正則行列 $T (\in \mathbf{R}^{n \times n})$ が存在する。
(可観測正準形)

$$(A.1.1) \quad \bar{A}^n \equiv T^{-1} A^n T = \begin{bmatrix} * & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ * & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ * & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A.1.2) \quad \bar{c}^T \equiv c^T T = [1 \ 0 \ \cdots \ 0]$$

この表現 (A.1.1) と (A.1.2) を用いると、 $B_k(z^{-1})$ は以下のように表わされる。

$$(A.1.3) \quad \begin{aligned} B_k(z^{-1}) &= z^{-(n-1)} c^T \text{adj}(zI - A^n) A^{K-k-1} b \\ &= [1, z^{-1}, \dots, z^{-(n-1)}] T^{-1} A^{K-k-1} b, \quad (1 \leq k \leq K-1) \end{aligned}$$

$$(A.1.4) \quad \begin{aligned} B_l(z^{-1}) &= z^{-(n-1)} c^T \text{adj}(zI - A^n) A^{n+K-l-1} b \\ &= [1, z^{-1}, \dots, z^{-(n-1)}] T^{-1} A^{n+K-l-1} b, \quad (K \leq l \leq n) \end{aligned}$$

従って (4.17) が成立するためには、 h_k ($k=1, 2, \dots, n$) を次のように定めればよいことがわかる。

$$(A.1.5) \quad \tilde{h} = \{B^{(n)}\}^{-1} T p$$

ただし

$$(A.1.6) \quad B^{(n)} = [A^{n-1}b, A^{n-2}b, \dots, Ab, b]$$

$$(A.1.7) \quad p = [p_1, p_2, \dots, p_n]^T$$

$$(A.1.8) \quad \tilde{h} = [h_K, \dots, h_n, h_1, \dots, h_{K-1}]^T$$

である。ここに (A, b) は可制御であるから、 $\{B^{(n)}\}^{-1}$ は存在して \tilde{h} は一意に決定される。

A.2 Lemma 2 の証明

Lemma 2 の条件は、次式が成立するための条件から求められる。

$$(A.2.1) \quad \text{rank} \begin{bmatrix} c^T \\ \lambda I - A^n \end{bmatrix} = n \quad (\forall \lambda \in \mathbf{C})$$

A の固有値が互いに異なるときは、1) の事項は A を対角化することで示すことができる。一方、 A の固有値の中で重複するものがあるときは、 A は Jordan 標準形に変換できる ((A, b) の可制御性から A は cyclic, つまり A の幾何学的多重度は 1 となるから)。このとき、もし A の重複する固有値が 0 ならば A の Jordan 標準形を使って

$$(A.2.2) \quad \text{rank } A^n \leq n-2$$

を示すことができる。従って 2) の事項が成立することがわかる。

参 考 文 献

- Araki, M. and Hagiwara, T. (1983). Pole assignment by multirate sampled-data output feedback, *Internat. J. Control*, **44**, 1661-1673.
- Åström, K.J., Hagander, P. and Sternby, J. (1983). Zeros of sampled systems, *Automatica*, **20**, 31-38.
- Chammas, A.B. and Leondes, C.T. (1978a). On the design of linear time invariant systems by periodic output feedback Part I. Discrete-time pole assignment, *Internat. J. Control*, **27**, 885-894.
- Chammas, A.B. and Leondes, C.T. (1978b). On the design of linear time invariant systems by periodic output feedback Part II. Output feedback controllability, *Internat. J. Control*, **27**, 895-903.
- Goodwin, G.C. and Sin, K.S. (1984). *Adaptive Filtering, Prediction, and Control*, Prentice-Hall, New Jersey.
- Goodwin, G.C., Ramadge, P.J. and Caines, P.E. (1980). Discrete-time multivariable adaptive control, *IEEE Trans. Automat. Control*, **25**, 449-456.
- Hagiwara, T. and Araki, M. (1988). Design of stable state feedback controller based on multirate sampling of the plant output, *IEEE Trans. Automat. Control*, **33**, 812-819.
- Kaczorek, T. (1985). Pole placement for linear discrete-time systems by periodic output feedbacks, *Systems Control Lett.*, **6**, 267-269.
- Landau, I.D. and Lozano, R. (1981). Unification of discrete time model reference adaptive control, *Automatica*, **17**, 593-611.
- Lozano, R. (1989). Robust adaptive regulation without persistent excitation, *IEEE Trans. Automat. Control*, **34**, 1260-1267.
- Lozano, R. (1992). Singularity-free adaptive pole-placement without resorting to persistency of excitation: detailed analysis for first order systems, *Automatica*, **28**, 27-34.
- Lozano, R. and Goodwin, G.C. (1985). A globally convergent adaptive pole placement algorithm without a persistency of excitation requirement, *IEEE Trans. Automat. Control*, **30**, 795-798.
- Mita, T., Chida, Y., Kaku, Y. and Numasato, H. (1990). Two-delay digital control and its applications — avoiding the problems on unstable limiting zeros, *IEEE Trans. Automat. Control*, **35**, 962-970.
- 宮里義彦 (1991). 周期時変フィードバックによる適応制御, 計測自動制御学会論文集, **27**, 1244-1250.
- Miyasato, Y. (1991a). Model reference adaptive control for non-minimum phase system by periodic feedback, *Intelligent Tuning and Adaptive Control* (ed. R. Devanathan), 399-404, Pergamon Press, Oxford.
- Miyasato, Y. (1991b). Model reference adaptive control for non-minimum phase systems with time delay by periodic feedback, *Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control*, **2**, 1465-1466.
- 宮里義彦 (1992). 周期時変フィードバックによる適応制御 (むだ時間系への拡張), 計測自動制御学会論文集, **28**, 1141-1143.
- Miyasato, Y. (1992). Model reference adaptive control for non-minimum phase multivariable systems by periodic feedback, *Proceedings of the 31st IEEE Conference on Decision and Control*, **2**, 1247-1252.
- Miyasato, Y. (1993a). Model reference adaptive control for non-minimum phase system by 2-delay feedback, *Adaptive Systems in Control and Signal Processing 1992 (Selected Papers from the 4th IFAC Symposium, Grenoble, France, 1-3 July 1992)* (eds. L. Dugard, M.M'Saad and I.D. Landau), 197-202, Pergamon Press, Oxford.
- Miyasato, Y. (1993b). Model reference adaptive control for non-minimum phase multivariable system by 2-delay feedback, *Preprints of IFAC 12th World Congress*, **3**, 377-380.
- 水野直樹, 藤原保史 (1994). 目標値特性を考慮した 2-Delay 制御系の入力特性の改善, 計測自動制御学会第 14 回適応制御シンポジウム資料, 65-68.
- Moore, K.L., Bhattacharyya, S.P. and Dahleh, M. (1993). Capabilities and limitations of multirate control schemes, *Automatica*, **29**, 941-951.
- Ortega, R. and Kreisselmeier, G. (1990). Discrete-time model reference adaptive control for continuous-time systems using generalized sampled-data hold functions, *IEEE Trans. Automat. Control*, **35**, 334-338.

新 誠一, 北森俊行 (1983). 2 入力 1 出力系に対する MRACS の一設計法, 第 22 回 SICE 学術講演会予稿集, 5-6.

Model Reference Adaptive Control for Non-minimum Phase Systems by Multirate Sampling

Yoshihiko Miyasato

(The Institute of Statistical Mathematics)

In most of the studies of model reference adaptive control (MRAC), controlled systems are confined to minimum phase systems, since MRAC techniques utilize control laws involving cancellations of zeros of systems. It makes the scope of application of MRAC too restrictive, for non-minimum phase discrete-time systems can often appear. For example, when continuous-time systems with relative degree greater than two, are sampled at a fast rate, those give rise to non-minimum phase discrete-time systems. In those cases, usual MRAC methods which involve cancellations of unstable zeros cannot be utilized. Hence, the study of MRAC for non-minimum phase discrete-time systems is of great importance.

The purpose of the present paper is to propose design methods of MRAC for non-minimum phase discrete-time systems by using multirate sampling methods. In our methods, not only poles but also zeros of controlled systems are relocated by periodic feedback control with multirate sampling, and no cancellation of zeros occurs. It is shown that even if unstable zeros exist, the output error converges to zero asymptotically, while the control input remains uniformly bounded. This paper is organized as follows: the control problem to be solved in this paper is stated in Section 2. Section 3 shows how to describe multirate sampling systems. In Section 4, we consider model-following control by using periodic feedback based on multirate sampling. First, we derive the general form of the periodic feedback control with multirate sampling. Next, we consider the restricted cases where the solvability conditions of the periodic feedback are given explicitly. The adaptive control by multirate sampling is proposed in Section 5. In Section 6, several simulation studies for non-minimum phase discrete-time systems show the effectiveness of the proposed methods. However, only responses on the sampling instances are considered in those simulation studies. In the following Section 7, we propose a design method where the input property of multirate sampling and intersampling response of the output are also considered. The effectiveness of that method is shown by the simulation studies in Section 8. Finally, Section 9 concludes this paper.