統計数理 (1994)
第 42 巻 第 2 号 277-296

アフィンスケーリング法の理論的解析：内点法と双対定理*

統計数理研究所　土　谷　　隆

(1994 年 8 月　受付)

1. はじめに

アフィンスケーリング法 (Dikin (1967)) は 1967 年にロシアの数学者 I.I. Dikin によって発見された線形計画問題に対する世界で最初の内点法である．この方法は，多項式性を持つ実用的な算法として数理計画の分野で内点法が爆発的に研究されるきっかけとなった Karmarkar 法 (Karmarkar (1984)) の簡略版とも見なすことができ， 1984 年に Karmarkar 法が登場したのちに， 何人かの研究者によって再発見された (例えば Barnes (1986), Vanderbei et al. (1986)) という歴史を持つ．他のいくつかの著名な内点法 (Reneger (1988), Kojima et al. (1989a, 1989b), Ye (1991), Kojima et al. (1991)) と異なり，現在までのところ多項式性は証明されていないものの，単純で性能が良く，美しい性質を持っており， 大規模な問題を実用的な時間で解き得ることが報告されている (Adler et al. (1989a, 1989b), Monma and Morton (1987), McShane et al. (1989), Resende and Veiga (1992))．本稿ではこの方法の大域的収束性について論じ，その証明を通じて線形計画法の基本定理である双対定理が導かれることを紹介する．ここで紹介する結果は基本的には Tsuchiya (1991, 1992), Dikin (1992) 等の結果を発展させたものとして Tsuchiya and Muramatsu (1992) で得られたものであるが [1]，解説的な論文 Monteiro et al. (1993), Saigal (1992) なども参考にして，線形代数と初等的な解析の素養があれば，線形計画法に関する特別な知識がなくても理解できるようにまとめたつもりである．なお， アフィンスケーリング法に関しては多数の論文があるが，本稿では必要最小限の参考文献を挙げるにとどめた．興味のある方は，例えば Tsuchiya (1991, 1992), Monteiro et al. (1993)中の参考文献を参照されたい．

2. アフィンスケーリング法

次のような線形計画問題を考えよう．

$$
\text{(2.1)}\qquad \begin{array}{lll} \text{minimize}_x\ c^T x, & \text{subject to } Ax=b, & x\geq 0, \\ c,\ x\in\mathbb{R}^n, & A\in\mathbb{R}^{m\times n}, & b\in\mathbb{R}^m. \end{array}
$$

制約条件 $Ax=b$, $x\geq 0$ を満たす点を可能解と呼ぶ．可能解の集合を $\mathcal{P}$ と記す．特に，$x>0$ なる可能解は，内点可能解と呼ばれる．次の仮定を置く．

---

* 本報告は，第 5 回 RAMP シンポジウム (1993 年 10 月 21, 22 日，於 筑波大学) で発表された原稿 “アフィンスケーリング法の理論的解析” (第 5 回 RAMP シンポジウム論文集，pp. 29-41) に加筆し，改訂を加えたものである．

[1] Dikin (1991) においても類似の結果が得られている．

仮定 1. 線形計画問題 (2.1) は内点可能解を持つ.

また,

仮定 2. 線形計画問題 (2.1) が最適解を持つ

ことも仮定しよう.

今, 制約領域の内部に適当な計量 $G(x)$ を定め, それに関する目的関数 c^Tx の最急降下方向, つまり, "目的関数ベクトル c の空間 $Ad=0$ への計量 $G(x)$ による射影

$$\{p \mid \text{minimize}_p\,(G^{-1}(x)\,c-p)^TG(x)\,(G^{-1}(x)\,c-p),\ \text{subject to } Ap=0\} \tag{2.2}$$

の (逆) 方向" に進むことによって, 初期内点可能解 x^0 から出発して, 内点可能解の列を生成し, この線形計画問題を解くことを考えよう[2]. $G(x)$ を適切に定めるために, 線形計画問題 (2.1) と, それに対して非負変数 x のスケーリング, すなわち, $x \to Dx$ (D は対角成分が正の対角行列) という変換を施して得られる線形計画問題とは本質的に等価であることに着目する. そして, 得られる探索方向がこのようなスケーリングによらないようにするために, いかなる内点可能解が与えられようとも, 常に "現在いる内点 x を (スケーリング後の座標が) すべて 1 となるようにスケーリングした問題"

$$\text{minimize}_v\ (Xc)^Tv, \qquad \text{subject to } AXv=b, \qquad v \geq 0 \tag{2.3}$$

(X は x を対角要素に持つ対角行列である ; 以後この記法を頻繁に用いる) を考え, この問題に対して "単位行列 I による計量" に関する目的関数 $(Xc)^Tu$ の最急降下方向を

$$\{v \mid \text{minimize}_v\,(Xc-v)^T(Xc-v),\ \text{subject to } AXv=0\} \tag{2.4}$$

の (逆) 方向として求め, これを元の問題の変数空間に引き戻したものを探索方向として用いることにしてみよう. このようにして得られる探索方向が, 非負変数のスケーリングに対して不変であることは明らかであるが, これは, (2.2) において, $G(x)=X^{-2}$ と置いて得られる最急降下方向になっていることが確かめられる. そこで, $G(x)=X^{-2}$ と置いた時の (2.2) の最適解を $d(x)$ として, $-d(x)$ を探索方向として用いることにする. ここで, 次の命題が成立する.

命題 2.1. 次の 4 つの条件は同値である :
(i) ある内点可能解 x で $d(x)=0$ となる.
(ii) 任意の内点可能解 x で $d(x)=0$ となる.
(iii) 目的関数値が制約領域全域で一定値をとる.
(iv) $c \in \mathrm{Im}(A^T)$.

証明. (iii) と (iv) が同値であることは, (iii) が (仮定 1 の下では)

$$c^Tv=0 \text{ for all } v \in \mathrm{Ker}\,A \tag{2.5}$$

を意味すること, そして線形代数の良く知られた事実

$$c \in \mathrm{Im}(A^T) \Longleftrightarrow c^Tv=0 \text{ for all } v \in \mathrm{Ker}A \tag{2.6}$$

より容易に分かる. 以下 (i)～(iii) が同値であることを証明する.

(ii)⇒(i) は自明. (i)⇒(iii), (iv)⇒(ii) を示す (これで (i)～(iv) の同値性が示されたことにな

---

[2] テンソル算的にいえば, (2.2) に現れるベクトル $G^{-1}c$ は, 共変ベクトル c を計量 G^{-1} で移して得られる反変ベクトルである. 目的関数中で $G^{-1}c$ から引かれるベクトル p は 2 点間の変位を表す反変ベクトルなのでこれでつじつまがあうわけである.

る). $\hat{p}$ が (2.2) の最適解であるための必要十分条件は,

$$v^T(X^{-2}\hat{p}-c)=0 \text{ for all } v\in\mathrm{Ker}A \tag{2.7}$$

が成り立つことである ($X^{-2}\hat{p}-c$ が $p=\hat{p}$ における (2.2) の目的関数の勾配であることに注意). (i) が成立している時 $\hat{p}=d(x)=0$ であり, $\hat{p}=0$ とおいて (2.7) が成立していることから, (2.5) が成り立つ. これは, (iii) が成立していることに他ならない. ゆえに, (i)⇒(iii) が示された. 一方, (2.6) より, $c\in\mathrm{Im}(A^T)$ ならば, 任意の内点可能解 $\bar{x}>0$ について, $\hat{p}=0$ が (2.7) を満たし, したがって $d(\bar{x})=0$ であることが分かる. ゆえに (iv) が成り立てば (ii) も成立する. ∎

命題 2.1 より, 与えられた内点可能解 x で $d(x)=0$ ならば目的関数は制約領域で一定値をとり, この時は制約領域全体が最適解となる. この簡単な場合を排除するために次の仮定をおく.

仮定 3. 目的関数値は制約領域上で一定値をとらない.

この仮定の下では命題 2.1 の (i) と (iii) の同値性より制約領域の任意の内点 x で $d(x)\neq 0$ である. さらに次の命題が成立する.

命題 2.2. x を内点可能解とする. この時, $d(x)$ は次の性質を持つ.
(i) $c^Td(x)=\|X^{-1}d(x)\|^2$.
(ii) $-d(x)$ は c^Tx に関する降下方向である ; つまり $c^T(-d(x))<0$ である.
(iii) $d(x)$ は少なくとも 1 つ正の要素を持つ.

証明. $Ad(x)=0$ であること, そして $\hat{p}=d(x)$ とおいて (2.7) が満たされることより, (2.7) において $\hat{p}=d(x)$, $v=d(x)$ とすると $c^Td(x)-d(x)^TX^{-2}d(x)=0$ となる. これで (i) は示された. 仮定 1〜3 の下では, $d(x)\neq 0$ であり, $c^Td(x)=d(x)^TX^{-2}d(x)>0$ であるから, (ii) が成り立つことが分かる. 次に (iii) を示す. 背理法を用いるため, ある内点可能解 x において $d(x)$ の全要素が 0 以下であるとしよう. $-d(x)$ が負の要素を一つも含まないので, 任意の $\mu>0$ について $x-\mu d(x)$ は可能解である. $c^Td(x)>0$ であるから, 目的関数はいくらでも小さくできることになるが, これは最適解の存在に矛盾する. ∎

各反復で, 次の内点可能解 x^+ を現在の内点可能解 x から探索方向 $-d(x)$ に制約領域の境界にぶつかる点に向かって比率 λ だけ進んだ点に選ぶようにすると, 次のような反復式が得られる :

$$x^+=x-\lambda\frac{d(x)}{\chi[X^{-1}d(x)]}. \tag{2.8}$$

ここで, $\chi[v]$ はベクトル v の最大要素を表す. 命題 2.2(iii) より $\chi[X^{-1}d(x)]$ が常に正であるから, $x>0$ である限り, 左辺は計算可能である. $\lambda=1$ とすると, x^+ のどれかの成分が 0 になり, 内点可能解ではなくなってしまうが, λ を $0<\lambda<1$ を満たすようにとることにより, x^+ も内点可能解となり, 無限に反復を続けることができる. この反復によって線形計画問題を解く方法がアフィンスケーリング法 (Dikin (1967)) である. 各反復で λ の値を変えることも考えられるが, ここでは話を簡単にするため反復を通じて λ を定数に固定する.

(2.8) の両辺に X^{-1} を乗じて, 一般に正の要素を少なくとも 1 つ含むベクトル v に対しては各要素について $v_i/\chi[v]\leq 1$ であることを用いると,

(2.9) $$X^{-1}x^{+}=e-\lambda\frac{X^{-1}d(x)}{\chi[X^{-1}d(x)]}\geq(1-\lambda)e$$

が成り立つ．ここで，e はすべての要素が1であるベクトルである．両辺に X を乗じると次の命題が得られる．

命題 2.3. (2.8) において，

(2.10) $$x_i^{+}\geq(1-\lambda)x_i$$

が各要素について成り立つ．

これまでの導出からもわかるように，もし，A の行ベクトルにKer A を定義する上で冗長なものがあれば，それを取り去っても探索方向は影響を受けない．したがって，

仮定 4. A の行ベクトルは一次独立である

と仮定しても以後の議論の一般性は失われない．仮定4の下で，探索方向（の逆方向）$d(x)$ は次のように書ける：

(2.11) $$d(x)=X(I-P(x))Xc, \qquad P(x)\equiv XA^T(AX^2A^T)^{-1}AX.$$

$P(x)$ は射影行列である．

3. 双対問題と双対推定，双対定理

次の線形計画問題

(3.1) $$\text{maximize}_{(y,s)}\, b^Ty, \qquad \text{subject to } A^Ty+s=c, \qquad s\geq 0,$$

は，主問題 (2.1) の双対問題と呼ばれる．(3.1) の可能解の集合を $\mathscr{D}$ と表す．双対問題 (3.1) の双対問題は主問題 (2.1) に一致する[3]．もし，x が (2.1) の可能解で (y, s) が双対問題の可能解であれば，

(3.2) $$c^Tx-b^Ty=c^Tx-y^TAx=x^Ts=\|Xs\|_1\geq 0$$

が成り立つ．つまり，主問題の任意の可能解における目的関数値は，双対問題の任意の可能解におけるそれよりも大きいわけである．ここで，主問題の内点可能解 $x>0$ が与えられた時に，次のような最小2乗問題を考える：

(3.3) $$\text{minimize}_{(y,s)}\, \frac{1}{2}\|Xs\|^2, \qquad \text{subject to } A^Ty+s=c.$$

$\|\cdot\|$ は2ノルムを表す．この最適解を，$(\hat{y}(x), \hat{s}(x))$ と記して x における双対推定と呼ぶことにする．(3.3) は s に関する最小2乗問題で，A は行一次独立であるとしているのだから，この解は一意に定まり[4]，次のように書ける：

(3.4) $$\hat{y}(x)=(AX^2A^T)^{-1}AX^2c, \qquad \hat{s}(x)=c-A^T\hat{y}(x)=X^{-1}(I-P(x))Xc=X^{-2}d(x).$$

双対推定 $(\hat{y}, \hat{s})$ の s 成分が非負であれば，双対問題の可能解であるが，一般にこれは成り立た

---

[3] (3.1) は主問題と同じ形をしていないが，y を2つの非負変数の差として表し，b を $-b$ に変えて最小化問題に直すことで (2.1) と同じ形になる．この問題の双対問題は (2.1) と一致する．

[4] 一般に仮定3の下では，(y, s) が $c=A^Ty+s$ の解ならば，s の値が与えられれば y の値は例えば $y=(AA^T)^{-1}A(c-s)$ として一意に定まる．

ないことに注意しよう.

本論文では，仮定 1〜4 の下で比率 λ の値を 2/3 以下にとってアフィンスケーリング法の反復 (2.8) を行うと，主変数 x，双対推定 $(\hat{y}(x),\ \hat{s}(x))$ が，それぞれ極限 $x^\infty, (y^\infty, s^\infty)$ に収束し，この時,

$$c^T x^\infty - b^T y^\infty = (x^\infty)^T s^\infty = 0, \qquad x^\infty \geq 0, \qquad s^\infty \geq 0 \tag{3.5}$$

が満たされることを示す．先に述べたように，主問題の任意の可能解における目的関数値は，双対問題の任意の可能解におけるそれよりも大きいのであるから，反復の結果 (3.5) が漸近的に満たされるということは，極限 $x^\infty, (y^\infty, s^\infty)$ が各々 (2.1), (3.1) の最適解であることを意味している.つまり，"主問題に内点可能解が存在し（仮定 1)，制約領域上で目的関数値が一定でなく(仮定 3)，A の行ベクトルが一次独立である（仮定 4)" という仮定の下で "双対定理：主問題が最適解を持つならば（仮定 2)，双対問題が最適解を持ち，両問題の最適解における目的関数値は等しい" を示していることになるわけである. 以下 4 章から 7 章において，アフィンスケーリング法の大域的収束性の証明を通じて，仮定 1, 3, 4 の下での双対定理を示し，8 章でそれらの仮定をとり除いて， 一般的な形での双対定理を導出する.

4. 点列の収束

以降，反復 (2.8) で生成される点列を $\{x^k\}$ と記す．また，x^k における関数 f の値 $f(x^k)$ を f^k などと書くことにする．また，$X = \mathrm{diag}\,(x)$ にならって，$X^k = \mathrm{diag}\,(x^k)$, $X^* = \mathrm{diag}\,(x^*)$ などの記法を用いる（以後 x に関連してこれらに類似の記法を用いる時には一々断わらない).

まず，点列が収束すること，そしてそれに関連した点列の基本的性質を示す．Tseng と Luo によって得られた次の定理が基本的である (Tseng and Luo (1992)).

定理 4.1. A, b, c より定まる次のような定数 $\delta(A, b, c)$ が存在する：

$$\text{任意の内点可能解 } x \text{ に対して } \Gamma(x) \equiv \frac{c^T d(x)}{\|c\|\,\|d(x)\|} \geq \delta > 0. \tag{4.1}$$

証明. そのような δ が存在しないとして矛盾を導く．もしこのような δ が存在しないと，内点可能解の点列 $\{x^p\}$ で，$\Gamma(x^p) \to 0$ $(p \to \infty)$ なるものが存在する．この時，各 $d(x^p)$ は，最適化問題

$$\text{minimize}_p \ ((X^p)^2 c - p)^T (X^p)^{-2} ((X^p)^2 c - p), \qquad \text{subject to } Ap = 0 \tag{4.2}$$

の最適解である．今，$\Gamma(x^p)$ は 0 に収束するのであるから，$\{x^p\}$ の適当な部分列 $\{x^q\}$ を抜きだして, $|d_i^q|\,/c^T d^q$ $(i = 1, \ldots, n)$ がある数に収束するか, 無限大に発散するかいずれかであるようにできる．無限大に発散する d_i^q の添字集合を I とすると，I は空ではない．また，$i \in I$ についてはある正定数 C_1 が存在して，$|d_i^q| \leq C_1 c^T d^q$ が十分に大きい q について成り立つ．ここで，次の方程式

$$c^T d = c^T d^q, \qquad Ad = 0, \qquad d_i = d_i^q \ (i \notin I) \tag{4.3}$$

を考える．この方程式は d^q 自身を解として持っていることより，A, c のみによって定まる正定数 C_2 を用いて, $\|\hat{d}^q\| \leq C_2 (c^T d^q + \sum_{i \notin I} |d_i^q|) \leq C_2 (1 + (n - |I|) C_1) c^T d^q$ とそのノルムが評価できる解 $\hat{d}^q$ を持つ．さらに，各 $i \in I$ について $|d_i^q|\,/c^T d^q \to \infty$ が成立するので，$\|\hat{d}^q\| < |d_i^q|$ $(i \in I)$ が十分に大きい q について成り立つ．一方，$\hat{d}_i^q = d_i^q$ $(i \notin I)$ であるから，結局，十分に大きい

q について,

$$(\hat{d}^q)^T(X^q)^{-2}\hat{d}^q<(d^q)^T(X^q)^{-2}d^q \tag{4.4}$$

が成立するわけである．これと $c^Td^q=c^T\hat{d}^q$ を合わせて,

$$((X^q)^2c-\hat{d}^q)^T(X^q)^{-2}((X^q)^2c-\hat{d}^q)<((X^q)^2c-d^q)^T(X^q)^{-2}(X^2c-d^q), \tag{4.5}$$

$A\hat{d}^q=0$ が成立するが，これは d^q が (2.2) の最適解であることに矛盾する．■

上の定理は，アフィンスケーリング法の探索方向が，制約領域全体を通じて目的関数値が一定の面と“一定以上の正の角度”を成していることを示している．この定理より，点列の収束性を初めとして，いくつかの興味深い性質が導かれる．特に，次の定理の性質 (iii) およびそこから導かれる系 4.3 は大域的収束性の証明において重要な役割を果たす．

定理 4.2. 仮定1〜4，$0<\lambda<1$ の下で生成されるアフィンスケーリング法の探索方向 $\{d(x^k)\}$ および点列 $\{x^k\}$ は次の性質を持つ (Tseng and Luo (1992), Tsuchiya (1991)).

(i) $\lim_{k\to\infty}d(x^k)=0$.

(ii) $\{x^k\}$ はある可能解 x^* に収束する．

(iii) $v^*\equiv c^Tx^*=\lim_{k\to\infty}c^Tx^k$ とすると，すべての $k\geq 0$ について，$\delta(A,b,c)\|c\|\|x^k-x^*\|\leq(c^Tx^k-v^*)$ が成り立つ．

証明. 探索方向 $-d(x^k)$ が目的関数の降下方向で (cf. 命題 2.2 (ii))，しかも目的関数値は仮定2より下に有界であることから，$\{c^Tx^k\}$ の極限値 v^* が存在する．定理 4.1 より，各 $k>0$ について,

$$\begin{aligned}\|c\|\,\delta(A,b,c)\|x^k-x^{k+1}\|=\|c\|\,\delta(A,b,c)\left\|\frac{\lambda}{\chi[(X^k)^{-1}d^k]}\,d^k\right\|&\leq c^T\left(\frac{\lambda}{\chi[(X^k)^{-1}d^k]}\,d^k\right)\\&=c^T(x^k-x^{k+1})\end{aligned} \tag{4.6}$$

が成立する．$c^T(x^k-x^{k+1})$ は 0 に収束するので,

$$\lim_{k\to\infty}\left\|\frac{\lambda}{\chi[(X^k)^{-1}d^k]}\,d^k\right\|=0. \tag{4.7}$$

また,

$$0<\lambda\chi[(X^k)^{-1}d^k]\leq\lambda\|(X^k)^{-1}d^k\|=\lambda\frac{c^Td^k}{\|(X^k)^{-1}d^k\|}\leq\lambda\frac{c^Td^k}{\chi[(X^k)^{-1}d^k]}=c^T(x^k-x^{k+1}) \tag{4.8}$$

で，この最右辺は 0 に収束していくことから，$\lim_{k\to\infty}\|(X^k)^{-1}d^k\|=0$.（ここで，最初の不等式，等式は各々命題 2.2 (iii), (i) による．）したがって $\{(X^k)^{-1}d^k\}$ は有界である．この事実と (4.7) より d^k は 0 に収束する．

一方，(4.6) で各反復について両辺の和をとることによって，任意の k について,

$$\delta(A,b,c)\|c\|\|x^k-x^0\|\leq\delta(A,b,c)\|c\|\sum_{l=1}^{k}\|x^l-x^{l-1}\|\leq c^Tx^0-c^Tx^k\leq c^Tx^0-v^* \tag{4.9}$$

が成りたつことが分かる．(4.9) の2番目の不等式より，$\{x^k\}$ はコーシー列であり，したがって，$\{x^k\}$ は収束し，極限 x^* を持つことが分かる．以下 (iii) を示す．(4.9) より，上と同様にして，$l>k$ を満たす任意の k,l について,

$$\delta(A,b,c)\|c\|\|x^l-x^k\|\leq c^Tx^k-c^Tx^l \tag{4.10}$$

が成立する．$l \to \infty$ とすることで性質 (iii) が得られる．■

さて，x^* において，$x_i^*=0$ であるような i の集合を N，それ以外，つまり，$x_i^*>0$ であるような i の集合を B としよう．明らかに，x^* は内点可能解ではなく，したがって N は空ではない．以後，一般にベクトル v とその要素の添字の部分集合 J が与えられている時，J に対応する成分からなる部分ベクトルを v_J と記すことにする．さて，集合

(4.11) $$\mathscr{S}=\{x \in \mathscr{P} \mid x_N=0\}$$

は x^* をその相対的内点（つまり $x \in \mathscr{S}$ で $x_B>0$ なる点）として含む $\mathscr{P}$ の面である．

定理 4.2 (iii) より次の系が直ちに得られる．

系 4.3. 定理 4.2 の仮定の下で，次の性質が成り立つ：

(4.12) $$\frac{c^T(x^k-x^*)}{\| x_N^k \|} \geq \delta(A,b,c) \| c \| >0.$$

以下，集合 $\mathscr{S}$ 上では c^Tx の値は一定であることを示そう．

命題 4.4. 次の性質が成り立つ：

(i) $s_B=0$ なる $s+A^Ty=c$ の解が存在する．

(ii) $\mathscr{S}$ 上で目的関数は一定の値をとる．

(iii) (i) の解 (s,y) を用いて，$x \in \mathscr{P}$ ならば，$c^T(x-x^*)=s^Tx=s_N^Tx_N$ と書ける．

証明. まず (i) を示す．もし，$s+A^Ty=c$ かつ $s_B=0$ であるような (y,s) が存在しなければ，集合 $\{(y,s) \mid c=s+A^Ty\}$ と $\{(y,s) \mid s_B=0\}$ の間の最小距離が 0 より大きいので，ある定数 $\varepsilon>0$ が存在して，すべての $s+A^Ty=c$ について，$\| s_B \|>\varepsilon$ である．ところが，双対推定 $(\bar{y}(x^k), \bar{s}(x^k))$ の $\bar{s}_B(x^k)$ 成分は，(3.4) より，$\|\bar{s}_B(x^k)\|=\|(X_B^k)^{-2}d_B^k\| \leq \|(X_B^k)^{-2}\| \| d(x^k) \|$ と評価でき，X_B^k の対角要素が正数に収束し，定理 4.2 (i) に示したように $d(x^k)$ が 0 に収束することより，0 に収束する．双対推定は $s+A^Ty=c$ の解であるから，ε の存在に矛盾し，(i) が示される．(i) の解を一つ選ぶと，$x \in \mathscr{P}$ ならば，$c^Tx=s^Tx+y^TAx=s_N^Tx_N+y^Tb$. もし，$x \in \mathscr{S}$ ならば，$x_N=0$ より，$c^Tx=y^Tb$. この右辺は x の値によらないので (ii) が従う．さらに，$c^Tx^*=v^*=b^Ty$ であることも分かる．この関係を上で得た $c^Tx=s_N^Tx_N+y^Tb (x \in \mathscr{P})$ に代入して (iii) を得る．■

5. ポテンシャル関数による解析

$(\bar{y},\bar{s})$ を $\bar{s}_B=0$ を満たす $A^Ty+s=c$ の解とする．前章の命題 4.4 (iii) より，$\bar{s}^Tx$ と c^Tx の関数値は $\mathscr{P}$ 上では定数値しか異ならない．目的関数を c^Tx から $\bar{s}^Tx$ に変えた場合のアフィンスケーリング法の探索方向は射影

(5.1) $$\{p \mid \text{minimize}_p\ (X^2\bar{s}-p)^TX^{-2}(X^2\bar{s}-p),\ \text{subject to}\ Ap=0\}$$

の逆方向として表せ，仮定 3 の下では (5.1) の解は第 1 章で導出したのと同様にして，$X(I-P(x))X\bar{s}$ と書ける．上に述べた c^Tx と $\bar{s}^Tx$ の関係より容易に想像されるように，$P(x)$ の定義より，

(5.2) $$X(I-P(x))X\bar{s}=X(I-P(x))X(c-A^T\bar{y})=X(I-P(x))Xc=d(x)$$

と書けて，$d(x)$ と $X(I-P(x))X\bar{s}$ とは一致する．以降の解析には $\bar{s}$ を用いた表式 $d(x)=X(I-P(x))X\bar{s}$ を用いた方が便利なので，これを使うことにする．

また，

$$u(x)\equiv\frac{X^{-1}d(x)}{c^T(x-x^*)}=\frac{X\bar{s}(x)}{\bar{s}_N^T x_N} \tag{5.3}$$

を導入する(2番目の等式は (2.11)，(3.4), 命題 4.4 (iii) より従う).

我々は，点列 $\{x^k\}$ の x^* の近くでの漸近的挙動に興味がある．直観的には，x^k が x^* に十分に近ければ，そこにおいてほとんど等号で満たされる不等式制約 $x_N\geq 0$ に比べると，それ以外の制約 $x_B\geq 0$ の境界は相対的に遠いので，制約 $x_B\geq 0$ の影響は無視できるようになると考えられる．そこで，$x_B\geq 0$ を無視した次の線形計画問題

$$\text{minimize}_z \ \bar{s}_N^T z_N, \qquad \text{subject to } A_N z_N + A_B z_B = b, \qquad z_N\geq 0 \tag{5.4}$$

を考えよう．ここで，A_N, A_B は，各々添字集合 N, B に対応する A の列ベクトルからなる部分行列である．問題 (5.4) の制約領域は，(2.1) の制約領域の x^* に十分近い近傍を拡大した，いわば “接空間” のようなものであると考えられる．そして，(5.4) に対するアフィンスケーリング法が，(2.1) に対するアフィンスケーリング法の x^* の十分近くでの良い近似となっていることが期待される．ここで，$A_B x_B^*=b$ であることに着目して，$z_B'\equiv z_B-x_B^*$ を導入して上の問題を書き直すと，(5.4) は実は次のような同次形問題であることが分かる：

$$\text{minimize}_z \ \bar{s}_N^T z_N, \qquad \text{subject to } A_N z_N + A_B z_B' = 0, \qquad z_N\geq 0. \tag{5.5}$$

このような同次形線形計画問題に対するアフィンスケーリング法は，Karmarkar 法と本質的に等価であり，ポテンシャル関数を使ってその挙動がきれいに解析できることが知られている (Bayer and Lagarias (1989))．以上のような考察に基づいて，“‘接空間’ による近似” と “ポテンシャル関数の解析” を組み合わせると，アルゴリズムの漸近的な挙動の解析ができるのではないか？ というのが本章で行う議論の動機である．

明らかに $x\in\mathscr{P}$ は (5.4) の可能解となっている．(5.4) は自由変数 z_B が入った問題であるという点で第1章で取り扱った標準形線形計画問題とは異なる形をしているが，“非負変数を1にスケーリングした空間で（単位行列を計量とした）最急降下方向に探索方向を選ぶ” というアフィンスケーリング法の精神に基づくと，$\mathscr{P}$ の内点可能解 x において，同次形問題に対するアフィンスケーリング法の探索方向(の逆方向)$(\tilde{d}_N(x), \tilde{d}_B(x))$ は

$$\{(p_N, p_B)\mid \text{minimize}_p \ (X_N^2\bar{s}_N-p_N)^T X_N^{-2}(X_N^2\bar{s}_N-p_N), \text{ subject to } Ap=0\} \tag{5.6}$$

として与えられる (cf. (2.2)). $\tilde{d}_N(x)$ は x の関数として一意に定まる．$\tilde{d}_B(x)$ は上の最適化問題の解としては一意に定まらないこともあるが，ここでは，“$\tilde{d}_N(x)$ を上のように選んだ上で，できるだけ $\tilde{d}(x)$ が $d(x)$ に近くなるようにする” ことを考えて，次の最適化問題の最適解に選ぶことにする．

$$\tilde{d}_B(x)=\{p_B\mid \text{minimize}_{p_B}(p_B-d_B(x))^T X_B^{-2}(p_B-d_B(x)), \text{ subject to } Ap=0, p_N=\tilde{d}_N(x)\}. \tag{5.7}$$

$u(x)$ に対応して，同次形アフィンスケーリング方向 $\tilde{d}(x)$ についてもそれを目的関数値で正規化した量

$$\tilde{u}(x)\equiv\frac{X^{-1}\tilde{d}(x)}{\bar{s}_N^T x_N} \tag{5.8}$$

を考える．

上で導入したベクトルの次の性質が重要である．証明は第7章で行う．なお，以下の補題 (ii) で，e はすべての成分が1であるようなベクトルである．

補題 5.1. $\tilde{d}_N(x^k)$, $u(x^k)$, $\tilde{u}(x^k)$ は次の性質を持つ (Tsuchiya (1991, 1992))：

(i) $\bar{s}_N^T\tilde{d}_N^k=\|(X_N^k)^{-1}\tilde{d}_N^k\|^2$.

(ii) $e^T\tilde{u}_N^k=1$ (したがって $\|\tilde{u}_N^k\|\geq 1/|N|$ である；$|N|$ は N の要素数).

(iii) $\|u_N^k-\tilde{u}_N^k\|=O((\bar{s}_N^Tx_N^k)^2)$.

(iv) $u_B^k=O(\bar{s}_N^Tx_N^k)$.

(v) $|\chi[\tilde{u}_N^k]-\chi[u^k]|=O((\bar{s}_N^Tx_N^k)^2)$.

ここで，次のポテンシャル関数を導入する．

$$\psi(x_N)=|N|\log \bar{s}_N^Tx_N-\sum_{j\in N}\log x_j. \tag{5.9}$$

Karmarkar ポテンシャル関数 (Karmarkar (1984)) との類似として Tsuchiya (1992) において導入されたこの関数は，現在知られているほとんどすべての(非退化仮定を置かない)アフィンスケーリング法の大域的収束性の解析 (Tsuchiya (1991, 1992), Dikin (1991), Tsuchiya and Muramatsu (1992)) において非常に本質的な役割を果たしている．命題 4.4 (iii)，相加相乗平均の不等式および系 4.3 を用いると

$$\begin{aligned}\exp(\psi(x_N^k))&=\frac{(\bar{s}_N^Tx_N^k)^{|N|}}{\prod_{j\in N}x_j^k}=\frac{(c^T(x^k-x^*))^{|N|}}{\prod_{j\in N}x_j^k}\geq\left(|N|\frac{c^T(x^k-x^*)}{\sum_{j\in N}x_j^k}\right)^{|N|}\\&\geq\left(|N|\frac{\delta(A,b,c)\|c\|\|x_N^k\|}{\sqrt{|N|}\|x_N^k\|}\right)^{|N|}\geq(\sqrt{|N|}\delta(A,b,c)\|c\|)^{|N|}>0\end{aligned} \tag{5.10}$$

という評価が成り立つので $\{\psi(x_N^k)\}$ は下に有界である．

以降，本章では，ポテンシャルの減少を解析することによって，次の定理を証明する．

定理 5.2. ポテンシャル関数 $\{\psi(x_N^k)\}$ は上に有界であり，

$$\lim_{k\to\infty}u_N^k=\frac{e}{|N|},\qquad \lim_{k\to\infty}u_B^k=0 \tag{5.11}$$

が成り立つ．

そして，次章でこの結果が“仮定1～3の下では双対問題にも可能解および最適解が存在し，x^k が主問題の最適解集合の相対的内点，$(\bar{y}(x^k),\ \bar{s}(x^k))$ が双対問題の最適解集合の相対的内点に収束すること”を意味することを示す．

まず，(5.2) より $\bar{s}^Td(x)=\|X^{-1}d(x)\|^2$ であることに注意すると，

$$\frac{c^Tx^{k+1}-v^*}{c^Tx^k-v^*}=\frac{\bar{s}_N^Tx_N^{k+1}}{\bar{s}_N^Tx_N^k}=1-\lambda\frac{\|u^k\|^2}{\chi[u^k]},\qquad \frac{x_i^{k+1}}{x_i^k}=1-\lambda\frac{u_i^k}{\chi[u^k]}, \tag{5.12}$$

と書ける．このことを用いると，アフィンスケーリング法の k 回目の反復におけるポテンシャル関数の減少量は次のように表せる．

$$\psi(x_N^{k+1})-\psi(x_N^k)=|N|\log\left(1-\lambda\frac{\|u^k\|^2}{\chi[u^k]}\right)-\sum_{j\in N}\log\left(1-\lambda\frac{u_i^k}{\chi[u^k]}\right)\equiv G(u^k,\ \lambda) \tag{5.13}$$

一方，x_N^k から同次形アフィンスケーリング方向 $-\tilde{d}_N(x^k)$ に境界までの比率 λ だけ進んだ時の

ポテンシャルの減少量は，補題 5.1 (i) を用いると，同様にして，

$$\psi\left(x_N^k-\lambda\frac{\tilde{d}_N^k}{\chi[(X_N^k)^{-1}\tilde{d}_N^k]}\right)-\psi(x_N^k)=|N|\log\left(1-\lambda\frac{\|\tilde{u}_N^k\|^2}{\chi[\tilde{u}_N^k]}\right)-\sum_{j\in N}\log\left(1-\lambda\frac{\tilde{u}_i^k}{\chi[\tilde{u}_N^k]}\right)\equiv H(\tilde{u}_N^k,\ \lambda) \tag{5.14}$$

と書ける．

$\bar{s}_N^T x_N^k>0$ であることから $G(u^k,\ \lambda)$ は各 k について定義されるが，$H(\tilde{u}_N^k,\ \lambda)$ がすべての k について定義可能とは限らない（H の定義式の 2 つの log の引数の内，最初の項が 0 以下になってしまう可能性がある)．次の補題は $H(\tilde{u}_N^k,\ \lambda)$ が十分に大きい k については常に定義可能であり，しかも，$G(u^k,\ \lambda)$ が $H(\tilde{u}_N^k,\ \lambda)$ に漸近的にほぼ等しくなることを示している．

補題 5.3. ある $K>0$ が存在し，すべての $k\geq K$ で $H(\tilde{u}_N^k,\ \lambda)$ は定義可能であり，

$$r^k\equiv G(u^k,\ \lambda)-H(\tilde{u}_N^k,\ \lambda) \tag{5.15}$$

とすると $\sum_{k=K}^{\infty}|r^k|<\infty$ が成立する．

さらに，$H(\tilde{u}_N^k,\ \lambda)$ について，次の評価が成り立つ (Tsuchiya and Muramatsu (1992))．この評価が本質的である．

定理 5.4. 上で述べた K について，$k\geq K,\ 0<\lambda\leq 2/3$ ならば，$H(\tilde{u}_N^k,\ \lambda)\leq 0$ が成り立つ．さらに，$H(\tilde{u}_N^k,\ \lambda)\to 0$ $(k\to\infty)$ ならば，$\lim_{k\to\infty}\tilde{u}_N^k=e/|N|$ が成り立つ．

これらの評価を認めれば，定理 5.2 は以下のようにして簡単に導出できる．

定理 5.2 の証明. 補題 5.3 より，$k\geq K$ について，$\psi^k=\psi^0+\sum_{l=0}^{K-1}G(\tilde{u}^k,\ \lambda)+\sum_{l=K}^{k-1}H(\tilde{u}^k,\ \lambda)+\sum_{l=K}^{k-1}r^l$. ψ^k が下に有界であること（式 (5.10)), r^l の和が有界であること(補題 5.3), $k\geq K$ で $H(\tilde{u}_N^k,\ \lambda)\leq 0$（定理 5.4 の前半部）であることから，$\psi^k$ は上に有界であり（主張の前半部)，さらに $H(\tilde{u}_N^k,\ \lambda)\to 0$ となることも分かる．定理 5.4 の後半部より $\lim_{k\to\infty}\tilde{u}_N^k=e/|N|$ であることが分かる．これを用いて補題 5.1 (iii), (iv) より (5.11) が成立する．∎

以下，補題 5.3，定理 5.4 を証明する．

補題 5.3 の証明. まず，(5.12), 定理 4.2 (iii), (2.10) より，

$$\begin{aligned}1-\frac{\lambda}{\chi[u^k]}\|u^k\|^2=\frac{\bar{s}^T x^{k+1}}{\bar{s}^T x^k}&\geq\frac{\delta(A,b,c)\|c\|\|x^{k+1}-x^*\|}{\bar{s}_N^T x_N^k}\\&\geq\frac{\delta\|c\|\|x_N^{k+1}\|}{\bar{s}_N^T x_N^k}\geq\frac{(1-\lambda)\|c\|\delta\|x_N^k\|}{\|\bar{s}_N\|\|x_N^k\|}=\frac{(1-\lambda)\|c\|\delta}{\|\bar{s}_N\|}>0\end{aligned} \tag{5.16}$$

と評価できる（評価の最右辺が k に依らないことに注意)．また，補題 5.1 (ii)～(v) より，

$$\frac{\lambda}{\chi[u^k]}\|u^k\|^2=\frac{\lambda}{\chi[\tilde{u}_N^k]}\|\tilde{u}_N^k\|^2+O((\bar{s}_N^T x_N^k)^2) \tag{5.17}$$

と評価できることを (5.16) と合わせて用いると

$$\frac{1-\lambda\|\tilde{u}_N^k\|^2/\chi[\tilde{u}_N^k]}{1-\lambda\|u^k\|^2/\chi[u^k]}=1+O((\bar{s}_N^T x_N^k)^2) \tag{5.18}$$

であることが分かる．一方，(2.10)，補題 5.1 (ii), (iii), (v)より，

$$1-\frac{\lambda}{\chi[u^k]}u_i^k \geq 1-\lambda, \qquad \frac{\lambda}{\chi[u^k]}u_i^k = \frac{\lambda}{\chi[\tilde{u}_N^k]}\tilde{u}_i^k + O((\bar{s}_N^T x_N^k)^2) \tag{5.19}$$

と評価できるので，(5.18) を導いたのと同様にして，各 $i \in N$ について，

$$\frac{1-\lambda \tilde{u}_i^k/\chi[\tilde{u}_N^k]}{1-\lambda u_i^k/\chi[u^k]} = 1 + O((\bar{s}_N^T x_N^k)^2) \tag{5.20}$$

を得る．(5.18), (5.20) の log をとることによって，$G(u_N^k, \lambda) = H(\tilde{u}_N^k, \lambda) + r^k$, $r^k = O((\bar{s}_N^T x_N^k)^2)$ が成立することが分かる．最後に，$\sum|r^k|$ が有界であることを示す．そのためには，$\bar{s}_N^T x_N^k$ の 1 次収束を示せば十分である．補題 5.1 (ii), (iii)より，$\|u^k\| \geq 1/(2|N|)$ が十分に大きい k について成り立つ．この事実を用いて，十分に大きな k に対して

$$\frac{\bar{s}^T x^{k+1}}{\bar{s}^T x^k} = 1-\frac{\lambda}{\chi[u^k]}\|u^k\|^2 \leq 1-\lambda\|u^k\| \leq 1-\frac{\lambda}{2|N|} \tag{5.21}$$

と評価でき，1 次収束性が示される．∎

定理 5.4 の証明． 以下，$q=|N|$, $\tilde{u}_N = \tilde{u}_N^k$, $\tilde{\lambda} = \lambda/\chi[\tilde{u}_N^k]$ と記す．変数 $\tilde{v}_N = \tilde{u}_N - e/q$, $\theta = q\tilde{\lambda}/(q-\tilde{\lambda})$ を導入し，$\tilde{u}_N^T e = 1$ (補題 5.1 (ii)) に注意すると，

$$1-\lambda\frac{\tilde{u}_i}{\chi[\tilde{u}_N]} = \frac{\tilde{\lambda}}{\theta}(1-\theta\tilde{v}_i), \qquad 1-\lambda\frac{\|\tilde{u}_N\|^2}{\chi[\tilde{u}_N]} = \frac{\tilde{\lambda}}{\theta}(1-\theta\|\tilde{v}_N\|^2) \tag{5.22}$$

と書ける．ここで，$1/q \leq \chi[\tilde{u}_N]$, $0<\lambda\leq 2/3$, $0<1-\lambda\|\tilde{u}_N\|^2/\chi[\tilde{u}_N] \leq 1-\lambda\chi[\tilde{u}_N]$ より，

$$0<\lambda^2 \leq \theta \leq 2q. \tag{5.23}$$

(5.22) より，

$$H(\tilde{u}_N, \lambda) = q\log(1-\theta\|\tilde{v}_N\|^2) - \sum_{i\in N}\log(1-\theta\tilde{v}_i) \tag{5.24}$$

と書ける．ここで次の不等式を用いて H を評価する：

$$\log(1-\zeta) \leq -\zeta \qquad (\zeta<1), \tag{5.25}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^q \log(1-\eta_i) &= \sum_{i:\,-\eta_i<\chi[\eta]}\left(-\eta_i - \frac{\eta_i^2}{2} - \frac{\eta_i^3}{3} - \cdots\right) + \sum_{i:\,-\eta_i\geq\chi[\eta]}\log(1-\eta_i) \\
&\geq \sum_{i:\,-\eta_i<\chi[\eta]}\left(-\eta_i - \frac{|\eta_i|^2}{2} - \frac{|\eta_i|^3}{2} - \cdots\right) + \sum_{i:\,-\eta_i\geq\chi[\eta]}\log(1-\eta_i) \\
&\geq \sum_{i:\,-\eta_i<\chi[\eta]}\left(-\eta_i - \frac{\eta_i^2}{2(1-|\eta_i|)}\right) + \sum_{i:\,-\eta_i\geq\chi[\eta]}\left(-\eta_i - \frac{\eta_i^2}{2(1-\chi[\eta])}\right) \\
&\geq -\eta^T e - \frac{\|\eta\|^2}{2(1-\chi[\eta])} \qquad (\eta\in\mathbb{R}^q,\ 0\leq\chi[\eta]<1).
\end{aligned} \tag{5.26}$$

これらを (5.24) に代入して $\tilde{v}_N^T e = 0$ に注意すると，

$$H(\tilde{u}_N, \lambda) \leq -q\theta\|\tilde{v}_N\|^2 + \frac{\theta^2\|\tilde{v}_N\|^2}{2(1-\theta\chi[\tilde{v}_N])} = \theta\|\tilde{v}_N\|^2\left(-q+\frac{\theta}{2(1-\theta\chi[\tilde{v}_N])}\right), \tag{5.27}$$

を得る．$\tilde{v}_N$ と θ の定義を (5.27) の右辺に代入して，(5.23), $\chi[\tilde{u}_N] = \chi[\tilde{v}_N] + 1/q$ に注意すると

$$H(\tilde{u}_N, \tilde{\lambda}) \leq \theta\left\|\tilde{u}_N - \frac{1}{q}e\right\|^2\left(-q+\frac{1}{\chi[\tilde{u}_N]}\frac{\lambda}{2(1-\lambda)}\right) \leq \lambda^2\left\|\tilde{u}_N - \frac{1}{q}e\right\|^2\left(-q+\frac{1}{\chi[\tilde{u}_N]}\right) \leq 0 \tag{5.28}$$

が得られる．この評価は $k\geq K$ で常に成立するものである．$\tilde{u}_N^T e=1$ を考慮すると，(5.28) の (≤ 0 を除いた) 最右辺の関数の値が 0 をとるのは $\tilde{u}_N=e/|N|$ の時で，その時に限る．このことから，$H(\tilde{u}_N^k, \lambda)\to 0$ ならば，$\tilde{u}_N^k=e/|N|$ が成立することは容易に分かる．∎

6. 大域的収束性の証明

以下，主変数 x^k，双対推定 $(\hat{y}^k, \hat{s}^k)$ の大域的収束性などを証明する．本章の内容が本稿の主要結果である．

定理 6.1. 仮定 1〜4 の下で，$0<\lambda\leq 2/3$ としたアフィンスケーリング法が生成する点列 $\{x^k\}$ の極限 x^* を相対的内点として含む集合 $\mathcal{S}$ は (2.1) の最適解全体の集合である．また，双対推定 $\{(\hat{y}^k, \hat{s}^k)\}$ の任意の集積点は，集合

(6.1) $$\mathcal{T}=\{(y, s)|A^T y+s=c,\ s_B=0,\ s_N\geq 0\}$$

の相対的内点 ($\mathcal{T}$ 上で $s_N>0$ なる点) であり，この時，$\mathcal{T}$ は双対問題の最適解全体の集合になっている．さらに，$\mathcal{S}, \mathcal{T}$ 両最適解集合上での目的関数値は一致する．(つまり，主問題の内点可能解，最適解の存在から双対問題の可能解，最適解の存在，両問題の最適値の一致性がいえるわけである.)

証明. $w_N^k\equiv(\bar{s}_N^T x_N^k)(X_N^k)^{-1}e$ と置くと，$w_i^k\geq \bar{s}_N^T x_N^k/\|x_N^k\|$．この不等式の右辺は定理 4.2 (iii)より下から正定数で押えられるので，すべての k について，$w_N^k\geq \varepsilon e>0$ なる定数 ε が存在する．一方，定理 5.2 より，$\exp(\psi^k)=\prod_{i\in N}w_i^k$ は上に有界であるから，$w_N^k\geq\varepsilon e>0$ と合わせるとすべての k について $w_N^k<\zeta e$ なる正定数 ζ が存在することが分かる．

さて，定義 (5.3) より $\hat{s}_i^k=u_i^k w_i^k$ $(i\in N)$ である．定理 5.2 より u_N^k が $e/|N|$ に収束し，上で観察したように $\varepsilon e\leq w_N^k\leq\zeta e$ が成立するので，$\hat{s}_N(x^k)$ は有界であり，さらに，任意の $\hat{s}_N(x^k)$ の集積点は正の値をとる．また，補題 5.1 (iv) より，$\hat{s}_B^*=(X_B^*)^{-1}(\bar{s}_N^T x_N^*)\lim_{k\to\infty}u_B^k=0$. 仮定 4 の下では，この時 $\hat{y}^k$ も有界である．ゆえに，$(\hat{y}^k, \hat{s}^k)$ の任意の集積点を $(\hat{y}^*, \hat{s}^*)$ とすると，$\hat{s}_N^*>0$, $\hat{s}_B^*=0$. これらの事実と $x_B^*>0$, $x_N^*=0$ であることより，$(x^*, (\hat{y}^*, \hat{s}^*))$ の組は，$x_i^*\hat{s}_i^*=0$ を満たし，さらに，x_i^*, $\hat{s}_i^*$ のいずれかが正である(つまり両方とも 0 になることはない)ことが分かる．したがって，(3.5) とあわせて，x^*, $(\hat{y}^*, \hat{s}^*)$ は各々主問題，双対問題の最適解であり，目的関数値は一致することが示せるわけである．

最後に，$\mathcal{S}, \mathcal{T}$ が各々主問題，双対問題の最適解全体の集合であることは，関係

(6.2) $$c^T(x-x^*)=(s_N^*)^T x_N\ \ (x\in\mathcal{P}), \qquad b^T(y^*-y)=(x_B^*)^T s_B\ \ ((y, s)\in\mathcal{D})$$

から簡単に確かめられる．∎

注意. その証明を見ると分かるように，定理 6.1 では，仮定 1〜4 の下で x_i, s_i のいずれか一方が必ず正であるような主問題，双対問題の最適解の組が存在することも示されている．このような最適解の組を“強相補性条件を満たす主双対最適解”と呼ぶ．一般に，任意の線形計画問題について，強相補性条件を満たす主双対最適解が与えられれば，主問題，双対問題の最適解全体の集合は，N, B に対応する添字集合を用いて，各々 $\mathcal{S}, \mathcal{T}$ に当たる集合として表されることが，定理 6.1 の後半部と同様にして簡単に証明できる．このような意味で，強相補性条件を満たす主双対最適解は，線形計画問題の最適解集合を完全に特徴付けるものである．

この時，目的関数は漸近的に $1-\lambda$ の収束率で収束する．

定理 6.2. 定理 6.1 の仮定の下で，漸近的に目的関数値は収束率 $1-\lambda$ の 1 次収束をする．

証明. (5.12) に定理 5.2 の結果を代入すれば容易に分かる．■

実は，定理 6.1 の仮定の下では，双対推定は x の初期値に関わらず，一定の点に収束することがいえる．この点は $\mathscr{T}$ の解析的中心 (y^c, s^c) と呼ばれ，次のように定義される：

$$(6.3)\ (y^C, s^C)\equiv\{(y, s)\in\mathscr{T}|\text{minimize}_s-\sum_{i\in N}\log s_i,\ s_N>0\}=\{(y,s)\in\mathscr{T}|\text{minimize}_y\, f(y),\ s_N>0\}.$$

ここで $f(y)\equiv-\sum_{i\in N}\log(c-A^Ty)_i$ と置いた．

解析的中心について，次の命題が成立する．

命題 6.3.

(i) $\mathscr{T}$ に解析的中心が存在するための必要十分条件は，$\mathscr{T}$ が有界であることである．

(ii) $\mathscr{T}$ の相対的内点 (y, s) が，$\mathscr{T}$ の解析的中心であるための必要十分条件は，それが条件

$$(6.4)\qquad \Delta y^T\nabla f(y)=\Delta y^TA_NS_N^{-1}e=0 \text{ for all } \Delta y\in\{\Delta y|A_B^T\Delta y=0\}$$

$(S_N\equiv\text{diag}(s_N))$ を満たすことである．

証明. 仮定 4 の下では s の有界性と y の有界性が等価であることに注意しさえすれば (i) は容易に分かる．以下 (ii) を示す．(6.4) が必要条件であることは，$\mathscr{T}$ の解析的中心が関数 $-\sum_{i\in N}\log s_i=-\sum_{i\in N}\log(c-A^Ty)_i$ を最小化する点であり，この関数が最小値を $\mathscr{T}$ の相対的内点にとることから従う（$\mathscr{T}$ の相対的内点で $-\sum_{i\in N}\log s_i$ が微分可能であることに注意）．十分性を示すには，$-\sum_{i\in N}\log s_i$ が $\mathscr{T}$ 内に高々1 つしか極値を持たないことを示せば良い．以下の証明は本質的に Tanabe (1987) によるものである．極値が 2 つ存在したとし，それらを (y^{C_1}, s^{C_1}), (y^{C_2}, s^{C_2}) とする．これらの点は (6.4) を満たすので，

$$(6.5)\qquad \Delta y^T(A_N(S_N^{C_1})^{-1}e-A_N(S_N^{C_2})^{-1}e)=\Delta y^TA_N(S_N^{C_1})^{-1}(S_N^{C_2})^{-1}(s_N^{C_2}-s_N^{C_1})=0$$

がすべての $\{\Delta y|A_B^T\Delta y=0\}$ について成立する．ここで，$\Delta y=y^{C_2}-y^{C_1}$ と置き $A_B^T\Delta y=0$, $s_N^{C_2}-s_N^{C_1}=A_N^T\Delta y$ であることに注意すると，(6.5) は $\Delta y^TA_N(S_N^{C_1})^{-1}(S_N^{C_2})^{-1}A_N^T\Delta y=0$ と書ける．これは，$\|(S_N^{C_1}S_N^{C_2})^{-1/2}A_N^T\Delta y\|=\|A_N^T\Delta y\|=0$ であることを意味し，したがって，$A^T\Delta y=0$ かつ $\Delta y\neq 0$ が成立する筈であるが，これは仮定 4 に矛盾する．したがって $\mathscr{T}$ 内には $-\sum_{i\in N}\log s_i$ の極値は一つしかない．■

次の定理が双対推定の収束に関する結果である．

定理 6.4. 仮定 1〜4 の下で双対問題の最適解全体の集合 $\mathscr{T}$ は有界であり，定理 6.1 の下で生成される双対推定 $(\hat{y}^k, \hat{s}^k)$ は常に (6.3) で定義される $\mathscr{T}$ の解析的中心に収束する．

証明. 上の命題より，$\mathscr{T}$ の解析的中心の存在および $(\hat{y}^k, \hat{s}^k)$ への $\mathscr{T}$ の解析的中心への収束を示すには，双対推定の任意の集積点 $(\hat{y}^*, \hat{s}^*)$ を選び，これが関係 (6.4) を満たすことを示せばよい．以下それを示す．定理 6.1 より，$\hat{s}_N^*>0$ である．u_N^k が $e/|N|$ に収束するのであるから，$(\hat{y}^*, \hat{s}^*)$ に収束する部分列に対応して，$|N|x_N^k/\hat{s}_N^Tx_N^k$ も(部分列の)極限を持つ．この極限を $\bar{x}_N^*$ と記すことにすると，$\bar{x}_N^*=(\hat{S}_N^*)^{-1}e$ が成り立つ．また，適当な $\bar{x}_B^*$ が存在して，$A_N\bar{x}_N^*+A_B\bar{x}_B^*=0$ が成立する．この時，任意の $\Delta y\in\{\Delta y\,|\,A_B^T\Delta y=0\}$ に対して，

$$(6.6)\qquad 0=\Delta y^T A_B \tilde{x}_B^* = -\Delta y^T A_N \tilde{x}_N^* = -\Delta y^T A_N (\hat{S}_N^*)^{-1} e$$

が成り立つ．これが示したかったことであり，よって定理は証明された．∎

7. 補題 5.1 の証明

本章では，細かい評価を行なって，補題 5.1 を証明する．証明の基本的考え方は Tsuchiya and Monteiro (1992) による．$\tilde{d}(x)=(\tilde{d}_N(x),\ \tilde{d}_B(x))$ は (5.6) の最適解である．$\tilde{d}(x)$ における目的関数の勾配を，以下 $(g_N(x),\ g_B(x))\equiv(X_N^{-2}\tilde{d}_N(x)-\bar{s}_N,\ 0)$ と記す．$\tilde{d}(x)$ の (5.6) に関する最適性より，$(p=)\tilde{d}(x)$ における (5.6) の制約領域の接空間 $\Theta\equiv\{v|Av=0\}$ の任意の元 v について，

$$(7.1)\qquad v^T g(x)=v^T((X_N)^{-2}\tilde{d}_N(x)-\bar{s}_N,\ 0)=v_N^T((X_N)^{-2}\tilde{d}_N(x)-\bar{s}_N)=0$$

となる．

補題 5.1 (i), (ii) の証明． $\tilde{d}(x^k)\in\Theta$ であるから $g(x^k)^T\tilde{d}(x^k)=\tilde{d}_N(x^k)^T((X_N^k)^{-2}\tilde{d}_N(x^k)-\bar{s}_N)=0$. これより (i) が従う．一方，$x^k\in\mathscr{P}$, $x^*\in\mathscr{P}$, $x_N^*=0$ より，$(x_N^k,\ x_B^k-x_B^*)=x^k-x^*\in\Theta$. したがって $g(x^k)^T(x^k-x^*)=(x_N^k)^T((X_N^k)^{-2}\tilde{d}(x_N^k)-\bar{s}_N)=0$． これより (ii) は容易に分かる．∎

補題 5.1 (iii) 以降の証明は少し込み入っている．証明のために 3 つの補題を用意する．なお，証明において“v_B を未知数とする方程式 $A_Bv_B=A_Nw_N$ が解を持つならば，A より定まる定数 $C^*>0$ を用いてそのノルムが $\|v_B\|\le C^*\|w_N\|$ と押さえられるような解 v_B が存在する”ことを利用する．

補題 7.1.

$$(7.2)\qquad \|X_B^{-1}d_B(x)\|\le C^*\|X_B^{-1}\|\|X_N\|\|X_N^{-1}d_N(x)\|.$$

証明． $d(x)$ が (5.1) の最適解であることより，$d_B(x)$ は，次の問題の最適解である．

$$(7.3)\qquad \text{minimize}_{p_B}\ p_B^T X_B^{-2} p_B,\qquad \text{subject to } A_B p_B=-A_N d_N(x).$$

$A_Bp_B=-A_Nd_N(x)$ は解 $d_B(x)$ を持つので，$\|\bar{p}_B\|\le C^*\|d_N(x)\|$ であるような解 $\bar{p}_B$ を持つ．$\|\bar{p}_B\|$ は (7.3) の可能解であり，一方，$d_B(x)$ は最適解であるから，$\|X_B^{-1}d_B(x)\|\le\|X_B^{-1}\|\|\bar{p}_B\|\le C^*\|X_B^{-1}\|\|X_N\|\|X_N^{-1}d_N(x)\|$ が成立する．∎

補題 7.2. ベクトル $(d_N(x)-\tilde{d}_N(x),\ d_B(x))$ は次の最適化問題の一意解である．

$$(7.4)\qquad \text{minimize}_{(q_N,q_B)}\ q_B^T X_B^{-2} q_B+q_N^T X_N^{-2} q_N,\qquad \text{subject to } A_B q_B+A_N q_N=-A_N\tilde{d}_N(x).$$

証明． 最適化問題 (5.1) を，新しい変数 $q_N=p_N-\tilde{d}_N(x)$, $q_B=p_B$ を導入して書き直すと，

$$(7.5)\qquad \text{minimize}_{(q_N,q_B)}\ 2g_N(x)^T q_N+q_N^T X_N^{-2} q_N+q_B^T X_B^{-2} q_B,\qquad \text{subject to } A_N q_N+A_B q_B=-A_N\tilde{d}_N(x)$$

となる．この問題の最適解が $(d_N(x)-\tilde{d}_N(x),\ d_B(x))$ で与えられることは明らかである．(7.4) の制約領域内で $g_N(x)^T q_N=0$ であることを示せば良い．ここで，$A\tilde{d}=0$ であることを用いると，$A_N\tilde{d}_N=-A_B\tilde{d}_B$. これより $A_N q_N+A_B(q_B-\tilde{d}_B)=0$ が成り立つので $(q_N,\ q_B-\tilde{d}_B)\in\Theta$. した

がって，(7.1) より $g_N^T q_N=0$. ∎

補題 7.3. $\| X_B^{-1}\| \| X_N \| \to 0$ ならば

(7.6) $$\| X_N^{-1}(d_N(x)-\tilde{d}_N(x)) \| \le 3(C^*)^2 \| X_B^{-1} \|^2 \| X_N \|^2 \| X_N^{-1} d_N(x) \|.$$

証明. $(q_N,\ q_B)=(0,\ \tilde{d}_B(x))$ は (7.4) の可能解であるから，補題 7.2 より，不等式

(7.7) $$\|X_N^{-1}(d_N(x)-\tilde{d}_N(x))\|^2+\|X_B^{-1}d_B(x)\|^2 \le \|X_B^{-1}\tilde{d}_B(x)\|^2$$

が成り立つ．したがって，

(7.8) $$\begin{aligned}\|X_N^{-1}(d_N(x)-\tilde{d}_N(x))\|^2 &\le \|X_B^{-1}\tilde{d}_B(x)\|^2-\|X_B^{-1}d_B(x)\|^2 \\ &\le \|X_B^{-1}(\tilde{d}_B(x)-d_B(x))\|\|X_B^{-1}(\tilde{d}_B(x)+d_B(x))\|\end{aligned}$$

を得る．ここで，$\tilde{d}_B(x)$ が (5.7) の最適解であることに注目しよう．$Ad(x)=0$ であることを用いると，(5.7) の制約を次のように書き直すことができる．

(7.9) $$A_B(p_B-d_B(x))=-A_N(\tilde{d}_N(x)-d_N(x))=-A_N\delta d_N(x)$$

ここで $\delta d_N(x)=\tilde{d}_N(x)-d_N(x)$ と置いた．この方程式は解を持つ(例えば $p_B=\tilde{d}_B(x)$) ので，$\| \bar{p}_B-d_B(x)\| \le C^* \|\tilde{d}_N(x)-d_N(x)\|$ なる $\bar{p}_B$ が存在する．すると $\tilde{d}_B(x)$ が制約 (7.9) の下で，$\| X_B^{-1}(p_B-d_B(x)) \|$ を最小化するものであることから，

(7.10) $$\begin{aligned}\| X_B^{-1}(\tilde{d}_B(x)-d_B(x)) \| &\le \| X_B^{-1}(\bar{p}_B-d_B(x))\| \le \| X_B^{-1} \| \| \bar{p}_B-d_B \| \\ &\le \| X_B^{-1} \| C^* \| \delta d_N \| \le C^* \| X_B^{-1} \| \| X_N \| \| X_N^{-1}\delta d_N \|\end{aligned}$$

と評価できる．この結果と補題 7.1 を用いると，(7.8) は，さらに

(7.11) $$\begin{aligned}\| X_N^{-1}\delta d_N(x)\|^2 &\le \| X_B^{-1}(\tilde{d}_B(x)-d_B(x)) \| \| X_B^{-1}(\tilde{d}_B(x)+d_B(x)) \| \\ &\le C^* \| X_B^{-1} \| \| X_N \| \| X_N^{-1}\delta d_N \| \cdot (2C^* \| X_B^{-1} \| \| X_N \| \| X_N^{-1} d_N(x)\| \\ &\quad + C^* \| X_B^{-1} \| \| X_N \| \| X_N^{-1}\delta d_N(x) \|)\end{aligned}$$

と評価できる．したがって，

(7.12) $$\begin{aligned}(1-(C^*)^2 \| X_B^{-2} \| \| X_N \|^2) \| X_N^{-1}(\tilde{d}_N(x)-d_N(x)) \| \\ \le 2(C^*)^2 \| X_B^{-1} \|^2 \| X_N \|^2 \| X_N^{-1} d_N(x) \|\end{aligned}$$

を得る．これより補題は証明された．∎

補題 5.1(iii)〜(v)の証明. 補題 7.3 に $x:=x^k$ を代入し，(5.2) より $\|X_N^{-1}d_N(x)\| \le \|X\bar{s}\|=\|X_N\bar{s}_N\|$, 定理 4.2 (iii)より $\delta \| c \| \| x_N^k \| \le \bar{s}_N^T x_N^k$ であることを用いると補題 5.1 (iii) が得られる．

次に (iv) を証明する．補題 7.1，$\| X_N^{-1}d_N(x) \| \le \| X_N\bar{s}_N \|$，系 4.3 より，

(7.13) $$\| u_B^k \| \le \frac{\| (X_B^k)^{-1} d_B^k\|}{\bar{s}_N^T x_N^k} \le \frac{C^* \|(X_B^k)^{-1} \| \| X_N^k \| \|(X_N^k)^{-1} d_N^k \|}{\bar{s}_N^T x_N^k} \le C \| X_N^k \bar{s}_N \|,$$

ここで C は k に依らない正定数である．よって (iv) も証明された．

最後に (v) は，(ii)〜(iv) から自明に従う．∎

8. ふたたび双対定理

本稿では，アフィンスケーリング法の大域的収束性の証明を通じ，主問題 (2.1) に関して内

点可能解の存在（仮定1），目的関数値が制約領域上で一定値を取ること（仮定3），A の行一次独立性（仮定4），を仮定して，“双対定理：主問題に最適解が存在すれば双対問題にも最適解が存在し，両問題における目的関数の最適値は一致すること”，そしてさらに，“強相補性条件を満たす主双対最適解の存在定理：主問題に最適解が存在すれば強相補性条件を満たす主双対最適解が存在すること”を示した．これらの結果を得るにあたって仮定1,3と4は取り除けることは周知の事実であるが，本稿の立場からも，前章までの結果を用いて以下のようにして示せる．

仮定4（A の行ベクトルの一次独立性）を元の問題(2.1)が満たさない場合は，$\mathrm{Ker}\,A$ を変えないようにして，A の行ベクトルを選んで仮定4が満たされるようにし，そのようにして作った新しい問題に対して前章までの結果を適用し，元の問題に結果を解釈し直せば，（仮定1,3の下で）双対定理が成立し，主問題の最適解の存在の仮定の下で強相補性条件を満たす主双対最適解の存在がいえることが簡単に確かめられる．

次に仮定3を取り外す．もし，仮定3が満たされないとすると命題2.1 (iii) より $c\in\mathrm{Im}(A^T)$ が成り立つので $c-A^Ty^*=0$ なる y^* が存在する．したがって $(y,s)=(y^*,0)$ は双対問題(3.1)の可能解である．(2.1)の内点可能解を x^* とすると，$x^*,(y^*,0)$ は強相補性条件を満たす主双対最適解となっているので，仮定3が成り立たなくても双対定理および強相補性条件を満たす主双対最適解の存在定理は成り立つことがわかる．

最後に，仮定1がなくてもこれらの定理が成立することを導く．（以下の証明は2段階単体法に対応する考え方で，村松正和氏によるものである．）まず，$\bar{x}>0$ なるベクトルを一つ選び，$r=A\bar{x}-b$ と置く．そして次の線形計画問題を考える：

$$(8.1)\qquad \mathrm{minimize}_{(x,t)}\ t,\qquad \text{subject to}\ Ax-rt=b,\ x\geq 0,\ t\geq 0.$$

$(x,\ t)=(\bar{x},\ 1)$ は内点可能解であり，この問題は，仮定1を満たしていることは簡単に確かめられる．その双対問題は，

$$(8.2)\qquad \mathrm{maximize}_{(y,s,s_0)}\ b^Ty,\qquad \text{subject to}\ s=-A^Ty,\ s_0=1+r^Ty,\ s\geq 0,\ s_0\geq 0$$

である．(8.1)の最適解全体の集合 $\mathscr{P}'$ は，(2.1)の可能解全体の集合 $\mathscr{P}$ を用いて $\mathscr{P}'=\{(x,\ t)|x\in\mathscr{P},\ t=0\}$ と書ける．(8.1)は仮定1を満たすので，強相補性条件を満たす主問題(8.1)の最適解 $(\bar{x}^*,\bar{t}^*)$，双対問題(8.2)の最適解 $(\bar{y}^*,\bar{s}^*,\bar{s}_0^*)$ が存在する．（前段で既に仮定3,4を取り除いたことに注意．）この時，$\bar{t}^*=0$ は明らか．$\bar{x}^*$ の要素で $\bar{x}_i^*=0$ のものの添字集合を N_1, $\bar{x}_i^*>0$ なるものの添字集合を B_1 とすると，定理6.1の注より，

$$(8.3)\qquad \mathscr{P}'=\{(x,t)|Ax=b,\ x_{N_1}=0,\ x_{B_1}\geq 0,\ t=0\}$$

と書ける．したがって

$$(8.4)\qquad \mathscr{P}=\{x|\ Ax=b,\ x_{N_1}=0,\ x_{B_1}\geq 0\}$$

である．一方，双対問題の最適解 $(\bar{y}^*,\bar{s}^*,\bar{s}_0^*)$ は，強相補性条件より，

$$(8.5)\qquad \bar{s}^*=-A^T\bar{y}^*,\qquad \bar{s}_0^*=1+r^Ty,\qquad \bar{s}_{N_1}^*>0,\qquad \bar{s}_{B_1}^*=0,\qquad \bar{s}_0^*>0$$

を満たす．

(2.1)の可能解において $x_{N_1}=0$ が常に成立するので，実は，元の主問題(2.1)は次の線形計画問題と同じである．

$$(8.6)\qquad \mathrm{minimize}_{x_{B_1}}\ c_{B_1}^Tx_{B_1},\qquad \text{subject to}\ A_{B_1}x_{B_1}=b,\qquad x_{B_1}\geq 0$$

この双対問題は，

$$(8.7)\qquad \text{maximize}_{(y, s_{B_1})}\ b^T y, \qquad \text{subject to}\ c_{B_1} - A_{B_1}^T y = s_{B_1},\quad s_{B_1} \geq 0$$

となる．線形計画問題 (8.6) は，内点可能解 $\bar{x}_{B_1}^* > 0$ を持つので，仮定 1 を満たす．したがって (8.6), (8.7)について，強相補性条件を満たす主双対最適解の組 ($x_{B_1}^{**}$, (y^{**}, $s_{B_1}^{**}$)) が存在する．

さて，$x_{B_1}^{**}$ の要素で $x_i^{**}=0$ であるようなものの添字集合を N_2 と置き，$x_i^{**}>0$ であるようなものの添字集合を $B_2(=B_1-N_2)$ と置くと，

$$(8.8)\qquad x_{N_2}^{**}=0,\qquad x_{B_2}^{**}>0,\qquad s_{N_2}^{**}>0,\qquad s_{B_2}^{**}=0$$

が成立する．そこで，$x_{B_1}^{**}=(x_{N_2}^{**},\ x_{B_2}^{**})$ に N_1 成分 $x_{N_1}^{**}=0$ を補い，

$$(8.9)\qquad x^{**}=(x_{N_1}^{**},\ x_{N_2}^{**},\ x_{B_2}^{**})=(0,\ 0,\ x_{B_2}^{**})$$

と置くとこれは，(2.1) の可能解となっている．一方，$s_{B_1}^{**}$ については N_1 成分を $s_{N_1}^{**}=c_{N_1}-A_{N_1}^T y^{**}$ と置いて補い，$s^{**}=c-A^T y^{**}$ を満たすようにする．(y^{**}, s^{**}) は，$s_{B_1}^{**}=(s_{N_2}^{**},\ s_{B_2}^{**})\geq 0$ を満たしているものの (cf. (8.8))，$s_{N_1}^{**}\geq 0$ は満たされる保証がないので，(3.1) の可能解になっているとは限らない．しかし，(8.5) を考慮して，十分に大きい μ を用いて ($\tilde{y}^{**}$, $\tilde{s}^{**}$)$\equiv$($y^{**}+\mu\bar{y}^*$, $s^{**}+\mu\bar{s}^*$) を構成してやると，これは (3.1) の可能解になっている．そして，x^{**} と ($\tilde{y}^{**}$, $\tilde{s}^{**}$) は，(3.5) を満たし，さらに，元の主問題 (2.1) とその双対問題 (3.1) について，強相補性条件を満たす主双対最適解になっていることも容易に確かめられる．よって内点可能解が存在しない場合も，主問題の最適解の存在のみから，その双対問題の最適解の存在，両問題における目的関数値の一致性，そして強相補性条件を満たす主双対最適解の存在が証明された．

以上の議論により，仮定 1, 3, 4 は取り除かれたわけである．第 3 章で述べたように，双対問題 (3.1) の双対問題は主問題 (2.1) であるから，双対問題 (3.1) を主問題とみなしてこれまでの結果を適用することにより，今まで述べてきたのとは逆に，双対問題の最適解の存在から，主問題の最適解の存在，目的関数値の一致性，強相補性条件を満たす主双対最適解の存在も同様に導ける．したがって，次の良く知られた基本的定理が証明されたことになる．

定理 8.1. (双対定理，強相補性条件を満たす主双対最適解の存在定理) 主問題 (2.1)，双対問題 (3.1) のいずれかに最適解が存在すれば，もう片方にも最適解が存在し，両問題の最適値は一致する．また，この時，強相補性条件を満たす主双対最適解が存在する．

9. おわりに

局所 Karmarkar ポテンシャル関数を用いたアフィンスケーリング法の大域的収束性の証明を紹介し，そして，それを通じて線形計画法の基本定理である双対定理が導かれることを見てきた．線形計画法の教科書では，双対定理はしばしば単体法の大域的収束性の証明から導かれるが，ここで紹介したものは，その内点法版であると考えることもできる．

最後に，ここで紹介した結果が得られた後に得られたアフィンスケーリング法に関する理論的結果について簡単に紹介しよう．我々は，定理 6.1 ではステップ幅 λ を 2/3 以下とした時の主変数，双対推定の大域的収束性を証明し，さらに，定理 6.2 では目的関数値が漸近的に収束率 $1-\lambda$ の 1 次収束をすること，そして定理 6.4 では双対推定が双対問題の最適解集合の解析的中心という特別の点に収束することを示した．これらが本論で紹介した主要な理論的結果であるわけだが，ステップ幅 2/3 が，定理 6.2，6.4 が成立するという条件の下で最大のものであること，そしてもう少し強く，“主変数，双対推定が一点に収束する” という条件(これは，主変

数，双対推定が大域的収束性を持つための十分条件であることが知られている)の下で最大のものであることが，各々 Tsuchiya and Muramatsu (1992) の改訂版，Hall and Vanderbei (1993) において，例を作ることによって示されている．そして，Tsuchiya and Monteiro(1992) では，なぜ 2/3 が上限として現れるかについて，直観的で明確な幾何学的説明を与え，その応用として，最適解の近くでステップ幅をうまく調整することによって 2 ステップ超一次収束を実現できることを証明している．このアイデアをさらに発展させて，Saigal (1993) では，3 ステップ 2 次収束を実現できることが示されている．定理 6.1 に関連して，最近，$\lambda=0.999$ とすると主変数が最適解でない点に収束してしまうような線形計画問題の例が構成された (Mascarenhas (1993))．これもきわめて興味深い結果であるといえよう．

謝　　辞

本原稿を読んで改善すべき点などを指摘してくれた村松正和氏（総合研究大学院大学院生・現 上智大学機械工学科助手）に感謝いたします．なお，本研究の一部は文部省科学研究費奨励研究 (A) 05740151 によるものである．

参 考 文 献

Adler, I., Resende, M., Veiga, G. and Karmarkar, N. (1989a). An implementation of Karmarkar's algorithm for linear programming, *Math. Programming*, **44**, 297-335.

Adler, I., Karmarkar, N., Resende, M. and Veiga, G. (1989b). Data structures and programming techniques for the implementation of Karmarkar's algorithm, *ORSA Journal on Computing*, **1**(2), 84-106.

Barnes, E.R. (1986). A variation on Karmarkar's algorithm for solving linear programming problems, *Math. Programming*, **36**, 174-182.

Bayer, D.A. and Lagarias, J.C. (1989). The nonlinear geometry of linear programming : I. Affine and projective scaling trajectories, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **314**, 499-526.

Dikin, I.I. (1967). Iterative solution of problems of linear and quadratic programming, *Soviet Math. Dokl.*, 8, 674-675.

Dikin, I.I. (1991). The convergence of dual variables, Tech. Report, Siberian Energy Institute, Irkutsk, Russia.

Dikin, I.I. (1992). Determination of the interior point of one system of linear inequalities (in Russian), *Kibernetica and System Analysis*, Vol. 1. (An improved English translation is available.)

Hall, L.A. and Vanderbei, R.J. (1993). Two-thirds is sharp for affine scaling, *Oper. Res. Lett.*, **13**, 197-201.

Karmarkar, N. (1984). A new polynomial-time algorithm for linear programming, *Combinatorica*, **4**, 373-395.

Kojima, M., Mizuno, S. and Yoshise, A. (1989a). A primal-dual interior point algorithm for linear programming, *Progress in Mathematical Programming* : *Interior-point and Related Methods* (ed. N. Megiddo), 29-47, Springer, New York.

Kojima, M., Mizuno, S. and Yoshise, A. (1989b). A polynomial-time algorithm for a class of linear complementary problems, *Math. Programming*, **44**, 1-26.

Kojima, M., Mizuno, S. and Yoshise, A. (1991). An $O(\sqrt{n}L)$ iteration potential reduction algorithm for linear complementarity problems, *Math. Programming*, **50**, 331-342.

Mascarenhas, W.F. (1993). The affine scaling algorithm fails for $\lambda=0.999$, Tech. Report, Universidade Estadual de Campinas, Campinas S.P., Brazil.

McShane, K.A., Monma, C.L. and Shanno, D.F. (1989). An implementation of a primal-dual interior point method for linear programming, *ORSA Journal on Computing*, **1**, 70-83.

Monma, C.L. and Morton, A.J. (1987). Computational experience with a dual affine variant of

Karmarkar's method for linear programming, *Oper. Res. Lett.*, **6**, 261-267.

Monteiro, R.D.C., Tsuchiya, T. and Wang, Y. (1993). A simplified global convergence proof of the affine scaling algorithm, *Ann. Oper. Res.*, **47**, 443-482.

Renegar, J. (1988). A polynomial-time algorithm, based on Newton's method, for linear programming, *Math. Programming,* **40**, 59-93.

Resende, M. and Veiga, G. (1992). An efficient implementation of a network interior point method, Manuscript, AT&T Bell Laboratories, Murray Hill, New Jersey.

Saigal, R. (1992). A simple proof of primal affine scaling method, Tech. Report, Department of Industrial and Operations Engineering, University of Michigan, Ann Arbor, Michigan.

Saigal, R. (1993). A three step quadratically convergent implementation of the primal affine scaling method, Tech. Report, No. 92-60, Department of Industrial and Operations Engineering, University of Michigan, Ann Arbor, Michigan.

Tanabe, K. (1987). Center flattening transformation and a centered Newton method for linear programming, 日本OR学会数理計画研究部会予稿 (1987年7月11日，統計数理研究所).

Tseng, P. and Luo, Z.Q. (1992). On the convergence of the affine-scaling algorithm, *Math. Programming*, **56**, 301-319.

Tsuchiya, T. (1991). Global convergence of the affine scaling methods for degenerate linear programming problems, *Math. Programming,* **56**, 377-404.

Tsuchiya, T. (1992). Global convergence property of the affine scaling method for primal degenerate linear programming problems, *Math. Oper. Res.*, **17**, 527-557.

Tsuchiya, T. and Monteiro, R.D.C. (1992). Superlinear convergence of the affine scaling algorithm, Tech. Report, Center of Research on Parallel Computation, Rice University, Houston, Texas.

Tsuchiya, T. and Muramatsu, M. (1992). Global convergence of a long-step affine scaling algorithm for degenerate linear programming problems, Research Memo., No. 423, The Institute of Statistical Mathematics, Tokyo (to appear in *SIAM Journal on Optimization*, **5**(2), 1995).

Vanderbei, R.J., Meketon, M.S. and Freedman, B.A. (1986). A modification of Karmarkar's linear programming algorithm, *Algorithmica,* **1**, 395-407.

Ye, Y. (1991). An $O(n^3L)$ potential reduction algorithm for linear programming, *Math. Programming,* **50**, 239-258.

Theoretical Analysis of the Affine Scaling Algorithm

Takashi Tsuchiya

(The Institute of Statistical Mathematics)

This paper presents a simplified and self-contained convergence analysis of a long-step affine scaling algorithm for linear programming problems where we move with a fraction up to 2/3 of the way to the boundary of the feasible region at each iteration. Global convergence of dual estimates is shown as well as global convergence of primal iterates. The analysis may be regarded as a novel way to introduce the interior point method and the duality theory for linear programming simultaneously to those who are familiar with linear algebra and elementary analysis but not with the theory of mathematical programming.

Key words: Linear programming, interior point methods, affine scaling algorithm, duality theory, global convergence.