統計数理 (1993)
第41巻 第1号 47-59

日本側から見たCraig・坂元の定理の発展の歴史

カルガリー大学名誉教授　小　川　潤次郎*

(1993年1月　受付)

は し が き

二つの総合報告が発表されて，Craig・坂元の定理の発展の歴史について述べている．先ず，Driscoll and Gundberg (1986) は次のような書出しで始まる．

"Craig's theorem on the independence of quadratic forms in normal variates is traced from its first form, for iid standard normal variates, to the form for variates following an arbitrary nonsingular joint normal distribution. This article gives the main thrust of the development and makes recommendations on coverage of the theorem in courses and textbooks. The history of Craig's theorem is not a happy one. The authors of the earlier articles in the literature tended to make errors of a linear algebraic nature. Authors of more recently published textbooks have given incorrect or misleadingly incomplete coverage of Craig's theorem and its proof."

Craig (1943) とは全く独立に坂元 (1944), Sakamoto (1949) が全く同じ定理を予想していたので "Craig・坂元の定理" と本稿では呼んでおくことにする．Driscoll and Gundberg (1986) は central case の初期の証明については Matusita (1949) と Ogasawara and Takahashi (1951) に全く言及していないのは fair でない．non-central case は central case に reduce されるが，それについて Laha (1956) の議論は不完全なので，Driscoll は Driscoll's Supplement (Driscoll and Gundberg (1986), Subsection 3.2) を加えた．

次の論文は Reid and Driscoll (1988) で，その Section 2, p. 140 に曰く

"We have since discovered that Laha's proof and Driscoll's supplement to it were both given by Ogawa (1950). Ogawa's article deserves to be better known than as it is, since he was apparently the first to give a correct and complete proof of the non-central case of Craig's theorem."

Reid and Driscoll は関数論的考察をさけた "An Accessible Proof" を与えている．これは美事である．

1992年6月に Mathai and Provost (1992) の *Quadratic Forms in Random Variable* という本が出版されたが，驚くべきことには，この本でも non-central case が central case に reduce される証明がない．著者達はこの点について重大な誤解をしているのではないかと疑われる．Driscoll and Gundberg が1986年に心配した状態は1992年に到るも直っていなかった訳である．

* 〒275　習志野市本大久保 3-18-5.

Craig・坂元の定理というのは実際統計で用いられるのは，充分条件として用いられる場合が多く，必要条件が証明されたとて，統計学の大勢には別に影響はないが，初等統計学における美しい定理の一つなので，その論理的完結が望ましい．この定理の証明に係わった一人として，その間の歴史を正しく——日本側から見て——記録しておきたい．色々な人達のやったことを次のようにシェーマにしてみた．

図　式

non-central case の独立性条件

$$\frac{|I-2\xi A||I-2\eta B|}{|I-2\xi A-2\eta B|} = \exp[\boldsymbol{\mu}'\{(I-2\xi A)^{-1}+(I-2\eta B)^{-1}-(I-2\xi A-2\eta B)^{-1}-I\}\boldsymbol{\mu}], \qquad \forall\xi,\ \eta \qquad \text{(NC)}$$

central case の独立性条件

$$|I-2\xi A-2\eta B|=|I-2\xi A||I-2\eta B|, \qquad \forall\xi,\ \eta \qquad \text{(C)}$$

$$|I-2\xi A\pm 2\xi B|=|I-2\xi A||I\pm 2\xi B|, \qquad \forall\xi \qquad \text{(C}^*\text{)}$$

$$|I-2\xi A-2\xi B|=|I-2\xi A||I-2\xi B|, \qquad \forall\xi \qquad \text{(C}^{**}\text{)}$$

$$AB=O \qquad \text{(O)}$$

$\theta_1=\boldsymbol{x}'A\boldsymbol{x}$, $\theta_2=\boldsymbol{x}'B\boldsymbol{x}$ として

$$\mathrm{cov}(\theta_1^i,\ \theta_2^j)=0, \qquad 2\le i+j\le 4. \qquad \text{(K)}$$

(i) (O)$\Longrightarrow$(NC) (Ogawa (1950))
(ii) (O)$\Longrightarrow$(C) (Craig (1943), 坂元 (1944), Sakamoto (1949))
(iii) (NC)$\Longrightarrow$(C) (Ogawa (1950), Laha (1956), Driscoll and Gundberg (1986), Reid and Driscoll (1988))

Incorrect or misleadingly imperfect proof: Carpenter (1950), Ogasawara and Takahashi (1951), Kendall and Stuart (1969), Johnson and Kotz (1970), Searle (1971), Mathai and Provost (1992)

(iv) (C^*)$\Longrightarrow$(O) (本稿)
(v) (C^{**})$\Longrightarrow$(O) (Ogawa (1949), 本稿)

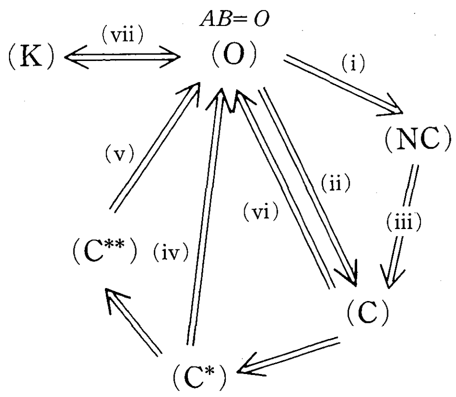
Incorrect reasoning: 小川 (1946), Zielinski (1985)

(vi) (C)$\Longrightarrow$(O) *Conjectured by* Craig (1943), 坂元 (1944), Sakamoto (1949).

Proved by: Matusita (1949), Ogasawara and Takahashi (1951), Lancaster (1954), Mathai and Provost (1992).

Incorrect proof: Craig (1943), Hotelling (1944), Aitken (1950)

(vii) (K)$\Longrightarrow$(O) (Kawada (1950))



1. Craig・坂元の定理

1944年の9月，統計数理研究所の講究録に坂元平八が“二つの統計量の独立性”（坂元(1944)）という論文を書いた．

$\boldsymbol{x}'=(x_1 \cdots x_n)$ を標準正規母集団からの無作為標本として，二つの実対称行 A, B で二次形式統計量

$$\theta_1=\boldsymbol{x}'A\boldsymbol{x}, \qquad \theta_2=\boldsymbol{x}'B\boldsymbol{x}$$

を作るとき，その統計的独立性は積率母関数 m.g.f. を用いると

$$|I-2\xi A-2\eta B|^{-1/2}=|I-2\xi A|^{-1/2}\cdot|I-2\eta B|^{-1/2}, \qquad \forall \xi, \eta$$

だから，これから Cochran (1934) の独立性条件

$$|I-2\xi A-2\eta B|=|I-2\xi A|\cdot|I-2\eta B|, \qquad \forall \xi, \eta \tag{C}$$

が出る．ところで直交条件

$$AB=O \tag{O}$$

があれば (C) は出る．

$$(\mathrm{O}) \Longrightarrow (\mathrm{C})$$

であるが逆に (C)$\Longrightarrow$(O) は証明出来ないが成立つだろうと予想した．小川 (1946) はこれを線形代数を用いて証明しようと試みたが正しくなかった．その内に E.W. Deming, H. Hotelling の好意によって Craig (1943) 及び Hotelling (1944) の論文を入手することが出来た．しかしこれ等は二つとも正しい証明ではなかった．

吾々の出発点は (C)$\Longrightarrow$(O) より少しきつい

$$(\mathrm{C}^{**}) \Longrightarrow (\mathrm{O})$$

であった．

2. 少し改良された (C**)$\Longrightarrow$(O) の Nabeya の証明

Driscoll and Gundberg (1986) に次のような文句がある．

“In 1949, Ogawa gave linear algebraic proof of the $N(0, 1)$ and $N(0, V)$ cases of Craig's theorem. Ogawa's proof of the $N(0, V)$ case was less direct than it could have been, but it also answered related questions about chi-squared distributions.”

$N(0, V)$ の場合の Ogawa の証明は廻りくどくて，もっと直接的なものがほしいというのである．

勿論吾々は (C)$\Longrightarrow$(O) を証明すれば良いのだが，少し窮屈な (C**)$\Longrightarrow$(O) を証明しようという訳である．

$$2\xi=2\eta=\frac{1}{x}$$

とおくと，(C**) は

$$x^n\cdot|xI-A-B|=|xI-A|\cdot|xI-B| \tag{2.1}$$

となって，$A+B$ の 0 でない固有値の集合は，A の 0 でない固有値の集合と B の 0 でない固有

値の集合の和集合である．

実数体 $\mathscr{R}$ 上の n 次元ベクトル空間 $\mathscr{L}$ とする．A, B, C を $\mathscr{L}$ の上の一次変換と考える．A の non-zero eigenvalues $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$, それに対応する eigenvectors $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r$ —— orthonormal system ; B の non-zero eigenvalues $\beta_1, \ldots, \beta_s$, それに対応する eigenvectors の orthonormal system を $\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_s$; C の non-zero eigenvalues を $\gamma_1, \ldots, \gamma_t$; 対応する eigenvectors の orthonormal system を $\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_t$ とする．

$$\{\gamma_1, \ldots, \gamma_t\} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\} \cup \{\beta_1, \ldots, \beta_s\} \tag{2.2}$$

だから

$$t = r + s. \tag{2.3}$$

A, B, C は symmetric だから

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_A + \mathscr{L}_A^{\perp}, \qquad \mathscr{L}_A^{\perp} = \mathscr{L}_A^0 \tag{2.4}$$

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_B + \mathscr{L}_B^{\perp}, \qquad \mathscr{L}_B^{\perp} = \mathscr{L}_B^0 \tag{2.5}$$

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_C + \mathscr{L}_C^{\perp}, \qquad \mathscr{L}_C^{\perp} = \mathscr{L}_C^0 \tag{2.6}$$

但しここで $\mathscr{L}_A$ は A の range, $\mathscr{L}_A^{\perp}$ は $\mathscr{L}_A$ の orthocompliment, $\mathscr{L}_A^0$ は A の eigenvalue 0 の eigenspace である．B, C についても同様の記号を用いる．

$$\dim \mathscr{L}_A = r, \qquad \dim \mathscr{L}_B = s, \qquad \dim \mathscr{L}_C = r + s$$

で，$C = A + B$ であったから

$$\dim \mathscr{L}_C \leq \dim \mathscr{L}_{A \cup B} = \dim \mathscr{L}_A + \dim \mathscr{L}_B - \dim(\mathscr{L}_A \cap \mathscr{L}_B).$$

よって

$$\dim(\mathscr{L}_A \cap \mathscr{L}_B) = 0, \qquad \text{i.e. } \mathscr{L}_A \cap \mathscr{L}_B = 0. \tag{2.7}$$

$AB = O$ ということは

$$AB\mathfrak{x} = 0, \qquad \forall \mathfrak{x} \in \mathscr{L}$$

ということで，$B\mathfrak{x} \in \mathscr{L}_B$ であり，$d_{ij} = \mathfrak{a}_i' \mathfrak{b}_j$ として

$$A\mathfrak{b}_j = d_{1j}\alpha_1\mathfrak{a}_1 + \cdots + d_{rj}\alpha_r\mathfrak{a}_r, \qquad j = 1, \ldots, s \tag{2.8}$$

であるから

$$D = \begin{Vmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{r1} & \cdots & d_{rs} \end{Vmatrix} = O \tag{2.9}$$

ということである．$AB = O$ と $BA = O$ は equivalent であるから

$$\mathfrak{a}_i = d_{ij}\mathfrak{b}_1 + \cdots + d_{is}\mathfrak{b}_s + \mathfrak{f}_i, \qquad i = 1, \ldots, r, \qquad \mathfrak{f}_i \in \mathscr{L}_B^0 \tag{2.10}$$

とおくと，

$$\mathfrak{f}_i'\mathfrak{f}_{i'} = \delta_{ii'} - \sum_{k=1}^{s} d_{ik}d_{i'k}, \qquad \delta_{ii'} \text{ Kronecker delta}$$

だから $\{\mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_r\}$ の Gramian 行列は

$$I - DD' \tag{2.11}$$

となって，その行列式はHadamard不等式によって

$$|I-DD'|\leq\prod_{i=1}^{r}\left(1-\sum_{j=1}^{s}d_{ij}^{2}\right) \tag{2.12}$$

である．$|I-DD'|=1$ ならば

$$\sum_{j=1}^{s}d_{ij}^{2}=0, \qquad i=1, \dots, r$$

即ち

$$D=O. \tag{2.13}$$

C の $\mathscr{L}_C$ の基底 $\{\mathfrak{c}\}$ に関する表現を

$$\begin{Vmatrix} \Lambda_1 & O \\ O & \Lambda_2 \end{Vmatrix}, \qquad \Lambda_1=\begin{Vmatrix} \alpha_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \alpha_r \end{Vmatrix}, \qquad \Lambda_2=\begin{Vmatrix} \beta_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \beta_s \end{Vmatrix}$$

とする．即ち C を operator と考えて

$$C\,\|\mathfrak{c}_1\cdots\mathfrak{c}_{r+s}\|=\|\mathfrak{c}_1\cdots\mathfrak{c}_{r+s}\|\cdot\begin{Vmatrix} \Lambda_1 & O \\ O & \Lambda_2 \end{Vmatrix} \tag{2.14}$$

但し

$$C\,\|\mathfrak{c}_1\cdots\mathfrak{c}_{r+s}\|=\|C\mathfrak{c}_1\cdots C\mathfrak{c}_{r+s}\|.$$

$\mathscr{L}_C$ の基底 $\{\mathfrak{a}\ \mathfrak{b}\}$ を用いたときの $C=A+B$ の行列表現を R_C とすれば

$$\begin{aligned} &A\mathfrak{a}_i=\alpha_i\mathfrak{a}_i, && A\mathfrak{b}_j=\sum_{i=1}^{r}\alpha_i d_{ij}\mathfrak{a}_i \\ &B\mathfrak{a}_i=\sum_{j=1}^{s}\beta_j d_{ij}\mathfrak{b}_j, && B\mathfrak{b}_j=\beta_j\mathfrak{b}_j \end{aligned} \tag{2.15}$$

だから

$$C\,\|\mathfrak{a}_1\cdots\mathfrak{a}_r\mathfrak{b}_1\cdots\mathfrak{b}_s\|=\|\mathfrak{a}_1\cdots\mathfrak{a}_r\mathfrak{b}_1\cdots\mathfrak{b}_s\|\begin{Vmatrix} \Lambda_1 & \Lambda_1 D \\ \Lambda_2 D' & \Lambda_2 \end{Vmatrix}. \tag{2.16}$$

即ち

$$R_C=\begin{Vmatrix} \Lambda_1 & \Lambda_1 D \\ \Lambda_2 D' & \Lambda_2 \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} \Lambda_1 & O \\ O & \Lambda_2 \end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix} I & D \\ D' & I \end{Vmatrix}. \tag{2.17}$$

今二つの基底 $\{\mathfrak{a}\ \mathfrak{b}\}$, $\{\mathfrak{c}\}$ の間の変換行列を Q とする．

$$Q=\begin{Vmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{Vmatrix}, \qquad \|\mathfrak{a}\ \mathfrak{b}\|=\|\mathfrak{c}\|\,Q \tag{2.18}$$

とすれば

$$Q^{-1}\cdot R_C\cdot Q=\begin{Vmatrix} \Lambda_1 & O \\ O & \Lambda_2 \end{Vmatrix} \tag{2.19}$$

であるから，両辺の行列式をとると

$$\begin{vmatrix} I & D \\ D' & I \end{vmatrix}=1. \tag{2.20}$$

従って $|I-DD'|=1$ が出て，(O)$AB=O$ が結論される．

Zielinski (1985) は $\{\mathfrak{c}\}$ の Gramian と $\{\mathfrak{a}\ \mathfrak{b}\}$ の Gramian が一致すると言っているが，それは正しくない．なぜなら $\{\mathfrak{a}\ \mathfrak{b}\}$ の Gramian は

$$\begin{Vmatrix} \mathfrak{a}' \\ \mathfrak{b}' \end{Vmatrix} \| \mathfrak{a}\ \mathfrak{b} \| = Q'(\| \mathfrak{c}' \| \cdot \| \mathfrak{c} \|)Q = Q'Q$$

であって，これが I になるのは Q が直交行列のときに限る．

若し条件を少し緩めて (C*)$\Longrightarrow$(O) を証明しようというならば

$$Q\begin{Vmatrix} \Lambda_1 & O \\ O & \Lambda_2 \end{Vmatrix} Q^{-1} = \begin{Vmatrix} \Lambda_1 & \Lambda_1 D \\ \Lambda_2 D' & \Lambda_2 \end{Vmatrix} \tag{2.21}$$

と共に

$$Q\begin{Vmatrix} \Lambda_1 & O \\ O & -\Lambda_2 \end{Vmatrix} Q^{-1} = \begin{Vmatrix} \Lambda_1 & \Lambda_1 D \\ -\Lambda_2 D' & -\Lambda_2 \end{Vmatrix} \tag{2.22}$$

が成立つから

$$Q\begin{Vmatrix} \Lambda_1 & O \\ O & O \end{Vmatrix} Q^{-1} = \begin{Vmatrix} \Lambda_1 & \Lambda_1 D \\ O & O \end{Vmatrix} \tag{2.23}$$

$$Q\begin{Vmatrix} O & O \\ O & \Lambda_2 \end{Vmatrix} Q^{-1} = \begin{Vmatrix} O & O \\ \Lambda_2 D' & \Lambda_2 \end{Vmatrix} \tag{2.24}$$

が出る．これから

$$\begin{aligned} Q_{11}\Lambda_1 &= \Lambda_1 Q_{11}, & Q_{21} &= O \\ Q_{22}\Lambda_2 &= \Lambda_2 Q_{22}, & Q_{12} &= O \end{aligned}$$

が出て，Q は $\begin{Vmatrix} \Lambda_1 & O \\ O & \Lambda_2 \end{Vmatrix}$ と commutative なることが判り，(2.24) から $D=O$ が結論される．

さて (2.2) から

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(\xi A+\eta B)^m &= \xi^m \operatorname{tr}(A)^m + \eta^m \operatorname{tr}(B)^m \\ &= \xi^m \sum_{i=1}^{r} \alpha_i^m + \eta^m \sum_{j=1}^{s} \beta_j^m, \qquad m=1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{2.25}$$

である．$m=4$ として $\xi=\eta=1$, $\xi=-\eta=1$ の場合を考えると

$$\operatorname{tr}(A^2B^2) = \operatorname{tr}(AB \cdot BA) = 0. \tag{2.26}$$

よって $AB=O$ を得る．

3. (C)$\Longrightarrow$(O) の Matusita, Lancaster の証明と Ogasawara and Takahashi の証明

Matusita (1949) が取扱ったのは (C)$\Longrightarrow$(O) の場合で，今簡単の為に 2ξ, 2η をそれぞれ ξ, η とかくと

$$|I-\xi A-\eta B| = |I-\xi A| \cdot |I-\eta B|, \qquad \forall \xi, \eta \tag{3.1}$$

から (O) $AB=O$ を言おうとする．A の non-zero eigenvalues を $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ として，直交行列 P で A を対角化して

$$(3.2)\qquad A^*=P'AP=\left\|\begin{matrix}\alpha_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \alpha_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0\end{matrix}\right\|,\qquad B^*=P'BP=\left\|\begin{matrix}B_{11}^* & B_{12}^* \\ B_{21}^* & B_{22}^*\end{matrix}\right\|$$

とすれば，(3.1) は

$$(3.3)\qquad \left|\begin{matrix}I-\xi A_1-\eta B_{11}^* & -\eta B_{12}^* \\ -\eta B_{21}^* & I-\eta B_{22}^*\end{matrix}\right| = \prod_{\xi=1}^{r}(1-\xi\alpha_i)\cdot|I-\eta B|$$

となる．両辺の ξ の最高次の項を比較して

$$(3.4)\qquad |I-\eta B_{22}^*|=|I-\eta B|.$$

よって，B の non-zero eigenvalues と B_{22}^* の non-zero eigenvalues は一致するから

$$(3.5)\qquad \begin{aligned}&\mathrm{tr}B_{22}^{*2}=\mathrm{tr}B^2\\ &\bar{B}_1^*=\left\|\begin{matrix}B_{11}^* & B_{12}^* \\ B_{21}^* & O\end{matrix}\right\|,\qquad \bar{B}_{22}^*=\left\|\begin{matrix}O & O \\ O & B_{22}^*\end{matrix}\right\|\\ &B^*=\bar{B}_1^*+\bar{B}_{22}^*\end{aligned}$$

とおくと，(3.5) から

$$(3.6)\qquad \mathrm{tr}\bar{B}_1^{*\prime}\bar{B}_1^*+\mathrm{tr}\bar{B}_1^{*\prime}\bar{B}_{22}^*+\mathrm{tr}\bar{B}_{22}^{*\prime}\bar{B}_1^*=0$$

$$(3.7)\qquad \mathrm{tr}\bar{B}_1^{*\prime}\bar{B}_1^*=0$$

$$(3.8)\qquad \bar{B}_1^*=O.$$

よって

$$A^*B^*=P'ABP=O,\qquad \text{i.e. } AB=O$$

が出る．

Lancaster (1954) は条件 (C) の自然対数をとって，cumulants で

$$(3.9)\qquad \varkappa_m(\xi\theta_1)+\varkappa_m(\eta\theta_2)=\varkappa_m(\xi\theta_1+\eta\theta_2),\qquad \forall\xi,\ \eta,\qquad m=1,2,\ldots$$

と書換えたが，これは前章の (2.25) と同じである．Lancaster は Aitken (1950) の証明を直したと言っているが，彼の証明は前述した Matusita (1949) の証明そのものである．不思議なことには，Lancaster は Ogawa (1949) には refer しているが，*Ann. Inst. Statist. Math.* の同じ issue で Ogawa の直前に出ている Matusita (1949) には refer していない．これは unfair と言わねばならぬ．ちなみに Aitken (1950) の (C)⟶(O) の証明は混乱を極めたものである．Hogg and Craig (1978) の教科書などによって，Lancaster が最初に正しい証明を与えたという通説が定着することに抗議する．

序に記しておくが，Johnson and Kotz (1970) は Craig の定理について述べているが，日本人の貢献を全く無視しているので，1980 年頃その旨を述べて日本人の論文に fair に refer して改訂してほしいと要求したが，未だ実現していない．

Ogasawara and Takahashi (1951) は

$$\log|I-\xi A|=\sum_{i=1}^{r}\log(1-\xi\alpha_i)$$
$$=-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\xi^m}{m}\sum_{i=1}^{r}\alpha_i^m=-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\xi^m}{m}\mathrm{tr}(A^m),$$

なることと，

$$K=I-\xi A$$

とすれば形式的に

$$K^{-1}=I+\xi A+\xi^2A^2+\xi^3A^3+\cdots$$

となることを用いる．(C) の条件 (3.1) は

(3.10) $$|I-\eta BK^{-1}|=|I-\eta B|,\qquad \forall\xi,\ \eta.$$

両辺の対数をとって

(3.11) $$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\eta^m}{m}\mathrm{tr}(BK^{-1})^m=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\eta^m}{m}\mathrm{tr}(B^m),\qquad \forall\xi,\ \eta.$$

両辺の $\xi^2\eta^2$ の係数を比較して

(3.12) $$\mathrm{tr}(B^2A^2)+\mathrm{tr}(BA^2B)+\mathrm{tr}(BA)^2=0.$$

ここで

$$\mathrm{tr}(BA^2B)=\mathrm{tr}(B^2A^2)=\mathrm{tr}((BA)'BA)\geq 0.$$

よって

(3.13) $$\mathrm{tr}(AB+BA)^2+2\mathrm{tr}(A^2B^2)=0$$

から $AB=O$ が出る．この方法は Mathai and Provost (1992) にも踏襲されているが，(3.1) の両辺の対数をとって

(3.14) $$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\mathrm{tr}(\xi A+\eta B)^m}{m}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\{\xi^m\mathrm{tr}(A^m)+\eta^m\mathrm{tr}(B^m)\}$$

として，$\xi^2\eta^2$ の係数を比較すれば (3.13) を得ることを注意しておく．

Kawada (1950) は $\boldsymbol{x}\sim N(0,1)$ のとき

$$\theta_1=\boldsymbol{x}'A\boldsymbol{x},\qquad \theta_2=\boldsymbol{x}'B\boldsymbol{x}$$

が互に独立ということより遙かに弱い条件

(3.15) $$F_{ij}=\mathrm{cov}(\theta_1^i,\ \theta_2^j)=0,\qquad 2\leq i+j\leq 4 \qquad\qquad (\mathrm{K})$$

から (O) を証明した．即ち

(3.16) $$(\mathrm{K})\Longrightarrow(\mathrm{O})\Longrightarrow\theta_1,\ \theta_2\ \text{は互に独立}\Longrightarrow F_{ij}=0,\ i+j\geq 2\Longrightarrow(\mathrm{K})$$

である．

$$F_{11}=2\mathrm{tr}(AB)=0$$
$$F_{12}=8\mathrm{tr}(AB^2)+4\mathrm{tr}(AB)\cdot\mathrm{tr}B=0,\qquad F_{21}=8\mathrm{tr}(A^2B)+4\mathrm{tr}(AB)\mathrm{tr}A=0$$
$$F_{22}=32\mathrm{tr}(A^2B^2)+16\mathrm{tr}(ABAB)+16\mathrm{tr}(AB^2)\mathrm{tr}A+16\mathrm{tr}(A^2B)\mathrm{tr}B$$
$$+8\mathrm{tr}(AB)\cdot\mathrm{tr}A\cdot\mathrm{tr}B+8\mathrm{tr}^2(AB)=0$$

なら結局

(3.17) $$2\mathrm{tr}(A^2B^2)+\mathrm{tr}(ABAB)=0.$$

$AB=L$ とおくと

(3.18) $$\mathrm{tr}LL'+\mathrm{tr}L^2+\mathrm{tr}L'L=\sum_{i,j}(l_{ij}^2+l_{ij}l_{ji}+l_{ji}^2)=\sum_{i,j}\left\{\left(l_{ij}+\frac{1}{2}l_{ji}\right)^2+\frac{3}{4}l_{ji}^2\right\}=0.$$

よって

$$l_{ij}=0, \qquad \forall i,\ j \qquad \text{i.e. } L=AB=O$$

が結論される．上に見たように

(3.19) (K) と (O) とは代数的に equivalent.

よって，2, 3 章で論じた 5 条件

<u>(C), (C*), (C**), (O), (K) は代数的に equivalent</u>

ということになる．

4. Non-Central Case $N(\boldsymbol{\mu}, I)$ のとき(NC)⟹(O)⟹(NC) の証明

$\boldsymbol{x}\sim N(\boldsymbol{\mu}, I)$ の場合の $\theta_1=\boldsymbol{x}'A\boldsymbol{x}$, $\theta_2=\boldsymbol{x}'B\boldsymbol{x}$,（$A$, B は対称行列）の独立性条件は

(4.1) $$\frac{|I-2\xi A|\cdot|I-2\eta B|}{|I-2\xi A-2\eta B|}=\exp[\boldsymbol{\mu}'\{(I-2\xi A)^{-1}+(I-2\eta B)^{-1}-(I-2\xi A-2\eta B)^{-1}-I\}\boldsymbol{\mu}], \qquad \forall \xi,\ \eta \qquad \text{(NC)}$$

となる．これがすべての ξ, η について成立つ為には両辺が定数でなければならないことが関数論的な考察で判るので，$\xi=\eta=0$ として右辺は 1 になるので

$$|I-2\xi A-2\eta B|=|I-2\xi A|\cdot|I-2\eta B|, \qquad \forall \xi,\ \eta \qquad \text{(C)}$$

が導かれ，これから

$$AB=O \qquad \text{(O)}$$

が出る．

Carpenter (1950), Ogasawara and Takahashi (1951) も non-central case を扱っているが，この論点を捉えていなかった．Laha (1956) はこの論点を Lemma の形で指摘したが証明は与えなかった．Johnson and Kotz (1970) や Searle (1971) の証明は完全な誤りである (Driscoll and Gundberg (1986) 参照).

Mathai and Provost (1992) では Chapter 5. Chi-squaredness and Independence, Section 5.1 の p. 190 で全く証明なしに Laha の Lemma をかかげている．

"In the proofs of various theorems to follow, we need a property which will be stated as a lemma, see also Laha (1956) and Driscoll and Gundberg (1986).

LEMMA 5.1.1. *Let*

$$\phi_1(t_1,\ t_2)/\phi_2(t_1,\ t_2)=\exp\{\phi_3(t_1,\ t_2)/\phi_4(t_1,\ t_2)\}$$

for all real t_1 *and* t_2 *where* ϕ_i, $i=1, 2, 3, 4$ *are real polynomials of* t_1 *and* t_2. *Then* ϕ_1/ϕ_2 *and* ϕ_3/ϕ_4 *are constants*."

さてそれで，この Lemma を本質的に必要とする p. 209 は次のようになっている．

"CRAIG'S THEOREM (1943). *Let* $X \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$, $\Sigma > 0$, $A = A'$ *and* $B = B'$. *Then* $X'AX$, $X'BX$ *are independently distributed iff* $A\Sigma B = O$ *or equivalently* $B\Sigma A = O$, *where* O *denotes the null matrix.*

Craig's theorem can be stated without any loss of generality as follows: Let $X \sim N_p(\mathbf{0}, I)$, $A = A'$ and $B = B'$ then $X'AX$ and $X'BX$ are independently distributed iff $AB = O$ or equivalently $BA = O$."

Craig (1943), 坂元 (1944) が予想したのは後段の central case であって，著者の謂う non-central case は Ogawa (1950) が初めて証明したものである (Reid and Driscoll (1988) 参照). 著者達は Driscoll and Gundberg (1986) に refer しているが，その内容をよく読んでいないようで，その怠慢は責められねばならない.

Reid and Driscoll (1988) は Ogawa (1950) を発掘してくれたが，non-central の独立性条件を cumulants を用いて表わし，関数論的考察を避けて，対称行列のスペクトル分解を用いて

$$\{\gamma_1 \cdots \gamma_{r+s}\} = \{\alpha_1 \cdots \alpha_r\} \cup \{\beta_1 \cdots \beta_s\}$$

を導き，それから $AB = O$ を出しているところは美事である (Reid and Driscoll (1988), Section 3.1).

最後に Driscoll and Gundberg (1986) の p. 66 左段下から 3 行目から Subsection 2.1 の終り迄の所論は Ogawa (1949) の pp. 95-96 に関係するので，筆者の立場から説明する.

"Hotelling's proof contains not a falsity, but a subtle gap."

で始まる.

Hotelling の証明というのは Ogawa (1949) の記号を用いると，適当な直交変換 P で A を対角化して

$$PAP' = \begin{Vmatrix} D & O \\ O & O \end{Vmatrix}, \qquad PBP' = \begin{Vmatrix} F & G \\ G' & O \end{Vmatrix}$$

$$\boldsymbol{z}' = (z_1 \cdots z_n) = (x_1 \cdots x_n)P'$$

$$\theta_1 = \boldsymbol{x}'A\boldsymbol{x} = \alpha_1 z_1^2 + \cdots + \alpha_r z_r^2$$

$$\theta_2 = \boldsymbol{x}'B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{z}'PBP'\boldsymbol{z} = \theta_2' + \theta_2''$$

$$\theta_2' = \boldsymbol{z}'M_1\boldsymbol{z}, \qquad \theta_2'' = \boldsymbol{z}'M_2\boldsymbol{z}$$

$$M_1 = \begin{Vmatrix} F & G \\ G' & O \end{Vmatrix}, \qquad M_2 = \begin{Vmatrix} O & O \\ O & H \end{Vmatrix}$$

θ_1 と $\theta_2 = \theta_1' + \theta_2''$ は互に独立の仮定. θ_1 と θ_2'' とは明らかに互に独立だから，<u>θ_1 と $\theta_2 - \theta_2'' = \theta_2'$ は互に独立</u>であるとして，Hotelling は条件

$$\begin{vmatrix} 1-2\xi\alpha_1-2\eta f_{11}-2\eta f_{12}-\cdots-2\eta f_{1r} & & & -2\eta g_{11} & \cdots & -2\eta g_{1s} \\ & \ddots & & & & \\ -2\eta f_{11} & \cdots & 1-2\xi\alpha_r-2\eta f_{rr} & -2\eta g_{r1} & \cdots & -2\eta g_{rs} \\ -2\eta g_{11} & \cdots & -2\eta g_{1r} & 1 & & 0 \\ & & & & \ddots & \\ -2\eta g_{s1} & \cdots & -2\eta g_{sr} & 0 & & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{i=1}^{r}(1-2\xi\alpha_i) \cdot |I - 2\eta M_1|, \qquad \forall \xi, \eta$$

から

$$|I-2\eta M_1|=1,$$

よって M_1 の eigenvalue はすべて 0. 従って $\mathrm{tr}M_1'M_1=0$, i.e $M_1=O$, よって

$$PAP' \cdot PBP'=O, \qquad AB=O$$

としている.

正規分布の二次形式統計量 $\theta_1=\boldsymbol{x}'A\boldsymbol{x}$, $\theta_2=\boldsymbol{x}'B\boldsymbol{x}$ の場合には独立性と係数行列の直交性 $AB=O$ は equivalent なのだから, Hotelling は嘘は言ってはいないのだが, その equivalence を証明しようとしているときにかかる論法をとると, あたかも次の命題が正しいものとしているようである.

"三つの確率変数 X, Y, Z があって, X と Y は互に独立, 又 X と Z も互に独立なら, X と $Y-Z$ は互に独立である."

この命題には反例がある (Kolmogoroff (1933), Section 5. Unabhängigkeit, pp. 8–11 の特に p. 10 の脚註 3 の Bernstein の例参照).

Hotelling の証明で θ_1 と θ_2' が互に独立などと言わずに θ_1 と θ_2 の独立性条件を書下して進めば Matusita の証明であった.

謝　辞

原稿にコメントを頂いた鍋谷清治氏及びレフリーに感謝する.

参 考 文 献

Aitken, A.C. (1950). On the statistical independence of quadratic forms in normal variates, *Biometrika*, **37**, 93-96.

Carpenter, A. (1950). Note on the extension of Craig's theorem to non-central variates, *Ann. Math. Statist.*, **21**, 455-457.

Cochran, W.G. (1934). The distribution of quadratic forms in a normal system, with applications to the analysis of covariance, *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **30**, 178-191.

Craig, A.T. (1943). Note on the independence of certain quadratic forms, *Ann. Math. Statist.*, **14**, 195-197.

Driscoll, Michael F. and Gundberg, William R., Jr. (1986). A history of the development of Craig's theorem, *Amer. Statist.*, **42**, 139-142.

Hogg, Robert V. and Craig, A.T. (1978). *Introduction to Mathematical Statistics*, 4th ed., Macmillan, New York.

Hotelling, H. (1944). A note on a matric theorem of A.T. Craig, *Ann. Math. Statist.*, **15**, 427-429.

Johnson, N.L. and Kotz, S. (1970). *Distributions in Statistics*: *Continuous Univariate Distributions —— 2*, Wiley, New York.

Kawada, Y. (1950). Independence of quadratic forms in normally correlated variables, *Ann. Math. Statist.*, **21**, 614-615.

Kendall, Maurice G. and Stuart, Alan (1969). *The Advanced Theory of Statistics, Vol. 1, Distribution Theory*, 3rd ed., Hafner, New York.

Kolmogoroff, A. (1933). *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Springer, Berlin.

Laha, R.G. (1956). On the stochastic independence of two second degree polynomial statistics in normally distributed variates, *Ann. Math. Statist.*, **27**, 790-796.

Lancaster, H.O. (1954). Traces and cumulants of quadratic forms in normal variables, *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B*, **16**, 247-254.

Mathai, M.A. and Provost, Serge B. (1992). *Quadratic Forms in Random Variables. Theory and Applications*, Marcell Dekker, New York.

Matusita, K. (1949). Note on the independence of certain statistics, *Ann. Inst. Statist. Math.*, **1**, 78-82.

Ogasawara, T. and Takahashi, M. (1951). Independence of quadratic quantities in a normal system, *Journal of the Hiroshima University Ser. A*, **15**, 1-9.

小川潤次郎 (1946). 二次形式統計量の独立性に就て，統計数理研究所講究録，**2**, 98-111.

Ogawa, J. (1949). On the independence of bilinear and quadratic forms of a random sample from a normal population, *Ann. Inst. Statist. Math.*, **1**, 83-108.

Ogawa, J. (1950). On the independence of quadratic forms in a non-central normal system, *Osaka Mathematical Journal*, **2**, 151-159.

Reid, John G. and Driscoll, Michael F. (1988). An accessible proof of Craig's theorem in the non-central case, *Amer. Statist.*, **42**, 139-142.

坂元平八 (1944). 二つの統計量の独立性，統計数理研究所講究録，**1**(9), 1-25.

Sakamoto, H. (1949). On the criteria of the independence and the degree of freedom of statistics and their applications to the analysis of variance, *Ann. Inst. Statist. Math.*, **1**, 109-122.

Searle, S.R. (1971). *Linear Models*, Wiley, New York.

Zielinski, A. (1985). A note on Nabeya's proof of the Sakamoto-Craig lemma, *Statist. Decisions*, Supplement **2**, 299-300.

Proceedings of the Institute of Statistical Mathematics Vol. 41, No. 1, 47-59 (1993)

A History of the Development of Craig-Sakamoto's Theorem Viewed from Japanese Standpoint

Junjiro Ogawa

(Professor Emeritus of Statistics of the University of Calgary, Canada)

A fair description of the development of Craig-Sakamoto's theorem is presented giving due credits to Japanese authors who have been neglected by Western authors of papers and textbooks.

The author wants to put the record of the history in the right perspective and expel the still persistent misconceptions around the Craig-Sakamoto theorem.

Key words: Cumulants, independence, moment-generating function, normal variates, quadratic forms.