

1次元拡散過程に基づく $1/f$ ノイズ

東北大学* 滝本 昇・小田 重則・舟山 邦男

(1992年9月 受付)

1. 緒 言

Johnson (1925) がそれを発見して以来, $1/f$ ノイズの遍在性が明らかになるにつれて, 当然のことながら, この現象を統一的に解明しようとする動機が生じた. 実際, Hooge (1972) は, バルク電導体で観測された $1/f$ ノイズを一つの実験式で整理することを試みたが, これは無理だったようで, 全ての $1/f$ ノイズに共通の原因は存在しないことが今日の定説となっている. この経緯については, Dutter and Horn (1981), Hooge et al. (1981), 及び橋口 (1991) 等による解説が参考になる.

$1/f$ ノイズの特徴は, 他のノイズと同様にスペクトルのスケール不変性, すなわち, スペクトルが特徴的な振動数をもたないことにある. Wiener-Khinchine の定理によると, ある確率変数 $x(t)$ のスペクトル $P(\omega)$ と時間相関 $\phi(\tau) = \langle x(t)x(t+\tau) \rangle$ は互いのフーリエ変換であるから, $P(\omega)$ のスケール不変性は $\phi(\tau)$ のスケール不変性をも意味する. 言い換えると, $1/f$ ノイズに対応する緩和過程は, 有限個の時定数で記述される単純なものではなく, 時定数が連続分布する複雑なものと考えられる. 一つの時定数 T で記述される緩和過程 $\phi(\tau) \sim e^{-\tau/T}$ には, Lorentz スペクトル

$$P(\omega) \sim \frac{T}{1+(\omega T)^2}$$

が対応し, 一つの特徴的振動数 T^{-1} をもつ. T が広い範囲でべき乗則 $\phi(T) \sim T^{-\beta}$ で分布するとき, 時間相関やスペクトルも広い範囲でべき乗則

$$\phi(\tau) \sim \int_0^{\infty} e^{-\tau/T} \phi(T) dT \sim \tau^{1-\beta}, \quad P(\omega) \sim \int_{-\infty}^{\infty} \frac{T}{1+(\omega T)^2} \phi(T) dT \sim \omega^{-2}$$

に従う. この二つのべき乗則は互いのフーリエ変換であるから, 一方が他方を説明することには決してならない. にもかかわらず, $1/f^\alpha$ ノイズを $\phi(\tau) \sim \tau^{\alpha-1}$ とおくことによって導くことができる. と主張する循環論的説明が少なからず存在する.

Mandelbrot (1983) は, その Hausdorff 次元 D が位相次元 D_T より大きな形状をフラクタルと定義し, D をフラクタル次元とよんだ. Mandelbrot and Voss (1983) は, 上述の循環論を批判して, スケール不変性は自然の原理であり, 特に説明を要するものではないとささ述べている.

ノイズ, またはゆらぎ, の存在は確かに自然の原理であって, 改めて説明する必要はないが, そのスペクトルが単純な規則に従う場合, それが説明できれば多くの物理学者は満足するはずである. $1/f^0$ のスペクトルをもつ白色ノイズは良く知られていて, その特徴は十分説明するこ

* 工学部基礎工学教室: 〒980 仙台市青葉区荒巻字青葉.

とができる。実際、このノイズはデルタ型の時間相関 ($T \sim 0$) に対応し、そのスペクトルは広い範囲 $\omega \ll 1/T$ で ω に依存しない。

ある系が適当な伝達特性をもつとき、その系が白色ノイズの入力に対して $1/f$ ノイズを出力する事があり得る。このような系を $1/f$ フィルタとよぶことにしよう。Wiener (1950) は定常的ノイズを、白色ノイズに対するフィルタの応答として捕らえ、平滑化回路の一般論を展開した。元西・古賀 (1982) は、この立場に基づいて近似的な $1/f$ フィルタを RC 格子回路で構成し、可聴周波数帯域において $1/f$ ノイズを発生させることに成功した。また Hurukawa (1985) は、連続的な自己相似分岐が $1/f$ ノイズを導くことを示した。

この論文の目的は、1次元拡散方程式で記述できる自然現象の、 $1/f$ フィルタとしての有用性を一般的に示すことにある。第2章では、2枚の平行板を境界とする非圧縮性粘性流体の力学的伝達特性を計算し、それが $1/f$ フィルタとして適当な性質をもっていることを示す。続いて第3章では、半無限大媒質の境界面に白色ノイズ的な熱が入力するとき、媒質の表面の温度のゆらぎがある帯域で $1/f$ ノイズの成分を含むことを示す。さらに第4章では、抵抗素子中の温度のゆらぎに伴う電流または電圧のゆらぎを計算し、それが $1/f$ 的となる条件を見いだす。この章で予測できたことに対する実験的検証を第5章で行い、指定された条件の下で確かに $1/f$ ノイズが観測されたことを報告する。

2. 2枚の平行板を境界とする流体の振動

2枚の板が、それぞれ $x=0, \ell$ の位置にあり、その間を密度 ρ 、動粘性係数 ν の非圧縮性流体で満たす。一枚の板 ($x=0$) を面内方向 (y 方向) に $u_{\omega} e^{-i\omega t}$ の速度で振動させ、他の板を固定する。対称性により、流体の速度 v は y 成分だけをもち、 x, t のみに依存する。流体の運動は Navier-Stokes 方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} v(x, t) = \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} v(x, t)$$

で記述される。この式の導出については、Landau and Lifshitz (1963) を参考にされたい。定常解は

$$(2.1) \quad v = (A_{\omega} e^{ikx} + B_{\omega} e^{-ikx}) e^{-i\omega t}, \quad -i\omega = \nu k^2$$

で与えられ、境界条件 $v(0, t) = u_{\omega} e^{-i\omega t}$, $v(\ell, t) = 0$ から

$$A_{\omega} + B_{\omega} = u_{\omega}, \quad A_{\omega} e^{ik\ell} + B_{\omega} e^{-ik\ell} = 0$$

が導かれる。これを解いて次の式を得る：

$$(2.2) \quad v = \frac{e^{ikx} - e^{-ik(x-2\ell)}}{1 - e^{2ik\ell}} u_{\omega} e^{-i\omega t}.$$

水路に直角な断面を単位時間に通過する流量を $Q(t)$ とすると、

$$Q(t) = \rho \int_0^{\ell} v \, dx = \frac{-\rho(1 - e^{ik\ell})}{ik(1 + e^{ik\ell})} u_{\omega} e^{-i\omega t} \equiv Q_{\omega} e^{-i\omega t}.$$

流量のパワースペクトル $P_Q(\omega)$ は次のように書かれる：

$$P_Q(\omega) \equiv |Q_{\omega}|^2 = \frac{\rho^2 \nu}{\omega} \frac{\cosh(\sqrt{\omega/2\nu}\ell) - \cos(\sqrt{\omega/2\nu}\ell)}{\cosh(\sqrt{\omega/2\nu}\ell) + \cos(\sqrt{\omega/2\nu}\ell)} |u_{\omega}|^2.$$

白色入力 ($|u_{\omega}|^2 = \text{一定}$) に対し、 $\omega \gg 2\nu/\ell^2$ の帯域で $P_Q(\omega) \sim 1/\omega$ を得る。水の場合、室温付

近で $\nu \approx 0.01 \text{ cm}^2/\text{s}$ であるから, $\ell \sim 1 \text{ m}$ とするとこの条件は $\omega \gg 10^{-6}/\text{s}$ となる.

次に過渡現象について考察し, 時定数が $\ell^2/\pi^2\nu$ 程度であることを示す. v は $x \in [0, \ell]$ を定義域とするが, 奇関数として $[-\ell, 0]$ の領域に拡張し, フーリエ展開する. すなわち, $k_n = n\pi/\ell$ ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$) とおいて

$$v(x, t) = \frac{1}{2\ell} \sum_n V(k_n, t) e^{-ik_n x}, \quad V(k_n, t) = \int_{-\ell}^{\ell} v(x, t) e^{ik_n x} dx.$$

Navier-Stokes 方程式に $e^{ik_n x}$ を乗じ, x について $-\ell$ から ℓ まで積分する. 拡張によって v が $x=0$ で不連続となることに注意すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} V(k_n, t) &= -\nu k_n^2 V(k_n, t) + 2i\nu k_n u_\omega e^{-i\omega t} \\ \therefore V(k_n, t) &= V(k_n, 0) e^{-\nu k_n^2 t} + 2i\nu k_n u_\omega \int_0^t e^{-\nu k_n^2(t-t')} e^{-i\omega t'} dt'. \end{aligned}$$

$V(k_n, 0)$ は初期値 $v(x, 0)$ のフーリエ成分であるが, 簡単のため 0 とおく:

$$\begin{aligned} V(k_n, t) &= 2i\nu k_n u_\omega \frac{e^{-i\omega t} - e^{-\nu k_n^2 t}}{\nu k_n^2 - i\omega} \\ (2.3) \quad \therefore v(x, t) &= \frac{i}{\ell} \nu u_\omega \sum_n \frac{k_n e^{-ik_n x}}{\nu k_n^2 - i\omega} (e^{-i\omega t} - e^{-\nu k_n^2 t}). \end{aligned}$$

$e^{-i\omega t}$ を含む項は定常流を, また $e^{-\nu k_n^2 t}$ を含む項は過渡流を表す. 過渡流は $\nu k_n^2 t \gg 1$ に対して非常に小さくなる. k_n の最小値 π/ℓ を代入すると, この現象の時定数として

$$(2.4) \quad T = \frac{\ell^2}{\pi^2 \nu}$$

が得られる. ℓ と ν に対して上で引用した値を用いると, $T \sim 10^{-5} \text{ s}$ となる. 1/f ノイズ帯域の下限を小さくすると, 時定数がそれに反比例して大きくなることに注意しよう. なお式 (2.3) の定常解の和を計算することによって (2.2) が再現する.

3. 半無限大媒質中の熱伝導

領域 $x \geq 0$ を占める媒質の表面に, 単位面積, 単位時間当り

$$Q(t) = \sum_\omega Q_\omega e^{-i\omega t}$$

の割合で熱が入力する場合を考える. 熱の一部は媒質中に伝わり, 一部は大気中に放射される. 対称性から媒質中の温度 T を x, t だけの関数と見なし, 熱伝導方程式

$$(3.1) \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad x \geq 0$$

で記述することができる. χ は熱伝達係数である.

境界条件は次のようにして導かれる. 媒質の熱伝導度を κ とすると, 媒質中に伝わる熱束は $-\kappa(\partial T/\partial x)_{x=0}$ に等しい. χ と κ の間には $\chi = \kappa/\rho c_p$ の関係がある. ここで ρ, c_p は媒質の密度, 定圧比熱である. また熱放射の割合は媒質の表面と大気との温度の差に比例すると仮定し, 比例定数を α とおく. 大気のを T の原点にとると, 媒質表面における熱流のつり合いの条件は

$$(3.2) \quad \left(-x \frac{\partial T}{\partial x} + \alpha T\right)_{x=0} = Q(t)$$

と書ける。温度変化が十分小さければ、 x や χ を一定と見なすことができる。
式 (3.1) の定常解を

$$T(x, t) = \sum_{\omega} T_{\omega}(x) e^{-i\omega t}$$

とおくと

$$-i\omega T_{\omega}(x) = \chi \frac{\partial^2}{\partial x^2} T_{\omega}(x).$$

一般解は

$$T_{\omega}(x) = T_{\omega}(0) e^{\sqrt{-i\omega/\chi} x}, \quad \operatorname{Re} \sqrt{\frac{-i\omega}{\chi}} < 0$$

で与えられる。境界条件 (3.2) に代入して

$$T_{\omega}(0) = \frac{Q_{\omega}}{\alpha - \chi \sqrt{-i\omega/\chi}}$$

を得る。従って表面における温度のゆらぎのパワースペクトルは

$$(3.3) \quad P_T(\omega) \equiv |T_{\omega}(0)|^2 = \frac{|Q_{\omega}|^2}{\alpha^2 + \chi^2 \omega/\chi}$$

となって、白色入力に対し、 $\omega \gg \chi(\alpha/\chi)^2$ の領域で $1/f$ 的となる。
この現象の時定数を評価するため、式 (3.1) を単色光的入力

$$Q(t) = Q_{\omega} e^{-i\omega t}, \quad t \geq 0$$

に対し、初期条件 $T(x, 0) = 0$ の下で解くことにする。はじめに $T(x, t)$ から定常解を分離する：

$$T(x, t) \equiv \frac{Q_{\omega}}{\alpha - \chi \sqrt{-i\omega/\chi}} \exp\left(\sqrt{\frac{-i\omega}{\chi}} x - i\omega t\right) + T'(x, t).$$

$T'(x, t)$ は (3.1) と同じ微分方程式

$$(3.4) \quad \frac{\partial T'}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 T'}{\partial x^2}$$

を満たし、境界条件と初期条件はそれぞれ

$$\left(-x \frac{\partial T'}{\partial x} + \alpha T'\right)_{x=0} = 0, \quad T'(x, 0) = \frac{-Q_{\omega} e^{\sqrt{-i\omega/\chi} x}}{\alpha - \chi \sqrt{-i\omega/\chi}}$$

となる。簡単のため、境界条件を

$$\left(\frac{\partial T'}{\partial x}\right)_{x=0} = 0$$

で近似する。このことは、過渡現象に対しては表面からの熱放射を無視することを意味するが、それが時定数の評価に著しい支障をもたらすものではない。この条件によって $T'(x, t)$ は連続する滑らかな偶関数として、 $x < 0$ の領域に拡張され、フーリエ変換

$$T'_q(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} T'(x, t) e^{iqx} dx, \quad T'(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} T'_q(t) e^{-iqx} dq$$

が導かれる。式 (3.4) はフーリエ変換されて

$$\dot{T}'_q(t) = -\chi q^2 T'_q(t)$$

となり、解

$$\begin{aligned} T'_q(t) &= e^{-\chi q^2 t} T'_q(0) \\ &= e^{-\chi q^2 t} \frac{Q_\omega}{\alpha - \chi \sqrt{-i\omega/\chi}} \left\{ \frac{1}{-iq + \sqrt{-i\omega/\chi}} + \frac{1}{iq + \sqrt{-i\omega/\chi}} \right\}. \end{aligned}$$

$T'_q(0)$ は偶関数として拡張された初期値 $T'(x, 0)$ のフーリエ変換を表す。逆変換により

$$T'(x, t) = \frac{Q_\omega}{\alpha - \chi \sqrt{-i\omega/\chi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\chi q^2 t - iqx} \frac{2\sqrt{-i\omega/\chi}}{q^2 - i\omega/\chi} dq.$$

この結果が指定された境界条件と初期条件を満たすことは容易に示される。特に

$$T'(0, t) = \frac{Q_\omega}{\alpha - \chi \sqrt{-i\omega/\chi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\chi q^2 t} \frac{2\sqrt{-i\omega/\chi}}{q^2 - i\omega/\chi} dq.$$

十分大きな t に対しては鞍点近似が使用できて、スケール不変な近似式

$$(3.5) \quad T'(0, t) \simeq \frac{Q_\omega}{\alpha - \chi \sqrt{-i\omega/\chi}} \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{-i\omega t}}$$

を得る。これが定常解に比べて無視できるためには

$$(3.6) \quad t \gg \omega^{-1}$$

が要求される。減衰が指数関数的でなく、べき乗的であるから、いわゆる時定数は定義されない。不等式 (3.6) は低周波での1/fノイズの観測に対して厳しい条件を課することになる。

4. 温度のゆらぎに伴う電流、電圧のゆらぎ

長さ l 、断面積 S の細長い直円柱状の抵抗体試料の一つの底面に温度のゆらぎを与えると、抵抗の温度係数が0でない限り、電流、電圧のゆらぎが発生する。試料の温度は、熱伝導方程式

$$(4.1) \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \chi \nabla^2 T$$

で記述される。側面からの熱放射を無視し、 T が円柱の軸に沿った座標 x と時間 t だけの関数と仮定する。試料の端面 $x=0$ に於ける温度を $T_0 + \Delta T_\omega e^{-i\omega t}$ 、 $x=l$ に於ける温度を T_0 (室温) とすると、(4.1) の定常解は

$$T = T_0 + \{A_\omega e^{ikx} + B_\omega e^{-ikx}\} e^{-i\omega t}, \quad k^2 = \frac{-i\omega}{\chi}$$

で与えられ、境界条件から次の関係が導かれる：

$$A_\omega + B_\omega = \Delta T_\omega, \quad A_\omega e^{ikl} + B_\omega e^{-ikl} = 0.$$

これを解いて

$$(4.2) \quad T = T_0 + \frac{e^{ikx} - e^{-ik(x-2\ell)}}{1 - e^{2ik\ell}} \Delta T_\omega e^{-i\omega t}.$$

試料の比抵抗を $r(T)$ とすると、定電流 I の入力に対して、試料の端面間の電位差 V は、 ΔT_ω に関する最低近似で次のように書かれる：

$$(4.3) \quad V = \frac{I\ell}{S} r(T_0) + \frac{I}{S} \left(\frac{\partial r}{\partial T} \right)_0 \int_0^\ell \frac{e^{ikx} - e^{-ik(x-2\ell)}}{1 - e^{2ik\ell}} dx \Delta T_\omega e^{-i\omega t}.$$

比抵抗が温度を介して x に依存することに注意すると、端子間抵抗は、積分 $\int r(T) dx/S$ で表わされる。これをゆらぎについて展開して (4.3) を得る。右辺第2項を $\Delta V_\omega e^{-i\omega t}$ とおくと、積分を実行して

$$(4.4) \quad \Delta V_\omega = \frac{I}{S} \left(\frac{\partial r}{\partial T} \right)_0 \frac{i(e^{ik\ell} - 1)}{k(e^{ik\ell} + 1)} \Delta T_\omega$$

$$\therefore |\Delta V_\omega|^2 = \left\{ \frac{I}{S} \left(\frac{\partial r}{\partial T} \right)_0 \right\}^2 \frac{\chi}{\omega} \frac{\cosh(\sqrt{\omega/2\chi}\ell) - \cos(\sqrt{\omega/2\chi}\ell)}{\cosh(\sqrt{\omega/2\chi}\ell) + \cos(\sqrt{\omega/2\chi}\ell)} |\Delta T_\omega|^2.$$

極限 $\omega \ll 2\chi/\ell^2$ で電圧のゆらぎは白色的であるが、逆の極限

$$(4.5) \quad \omega \gg \frac{2\chi}{\ell^2}$$

では $1/f$ 的となる：

$$|\Delta V_\omega|^2 \sim \frac{|\Delta T_\omega|^2}{\omega}.$$

長さ 1 m の純銅に対して不等式 (4.5) の右辺は $2.4 \times 10^{-4}/s$ 、また鋼鉄に対しては $2.6 \times 10^{-5}/s$ 程度となる。またこの現象の時定数は $\ell^2/\pi^2\chi$ 程度である。

試料の端子間に定電圧を加えた場合、(4.3) を I に対して解く必要がある。 I が $1/f$ 的ノイズ成分を含むことは明らかである。一般に試料にこのような温度分布を与えたとき、温度係数が 0 でない全てのバルク物性に $1/f$ ゆらぎが発生する。例えば、磁性体の帯磁率を $\chi(T)$ とすると、印加磁界 H に対する磁化 M は $M = \chi(T)H$ となる。従って (4.2) のような温度ゆらぎを与えると、 $\chi'(T)$ が 0 でない限り、磁化に (4.4) のような $1/f$ ゆらぎが発生する。

5. 実験的検証

$1/f$ フィルタの例を三つ示したが、実験的検証が最も簡単なのは第三の例である。以下これについて詳述する。幾つかの試行錯誤の結果考え付いた実験装置の概念図を図 1 に示す。直径 1.0 cm、長さ 20 cm のベークライトを芯として、その側面にピッチ 0.5 mm のらせん状の溝をつけ、それに沿って直径 0.3 mm のピアノ線（炭素鋼）を巻き付ける。ピアノ線を選んだ最大の理由は、比抵抗の温度係数が比較的大きいこと ($(\partial r/\partial T)/r \sim 3 \times 10^{-3}/K$) にある。巻線の中央にある幅 1.3 cm の部分の両端に電圧を加えてこの部分を加熱する。白色ノイズ的な熱入力、直流電源を適当にオン・オフすることで発生させる。この操作はパーソナル・コンピュータで制御するが、詳しいことは後で説明する。電圧の入力を開始してから十分時間が経過する（約 1 時間）と、中央部の温度のゆらぎは定常状態に達する。このとき、この部分を含む十分長いピアノ線の電気抵抗を測定する。

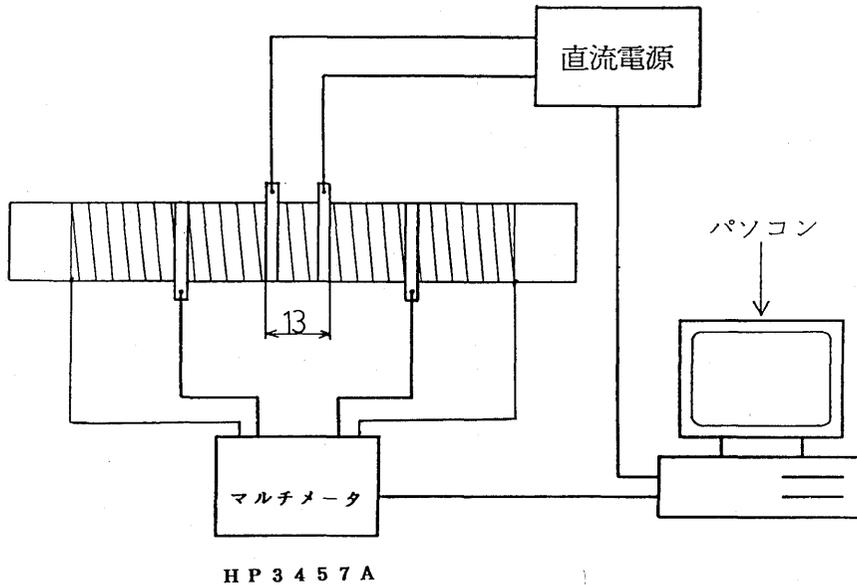


図1. 実験装置の概念図.

5.1 白色ノイズ的電圧の発生

実数領域 $[0, 1]$ 内の無相関な一様乱数を、合同乗算法で予め作製する。時刻 $t=0$ に電源をオフ状態 ($V=0$ ボルト) に設定し、乱数を1個呼び出す。それが0.5より大きいとき、電源をオンの状態 ($V=2$ ボルト) に切り換え、この状態を2秒間保持する。またそれが0.5以下のとき、オフ状態のままそれを2秒間保持する。次に2番目の乱数を呼び出して同じ操作を繰り返す。但し試料の抵抗を測定する時点では、誘導電流を避けるため、0.2秒間だけオフ状態を保つ。この0.2秒という数値も試行錯誤の結果、選ばれたものである。というのは、直流電源の状態を切り換えるとき、立ち上がり、または立ち下がりに0.1秒の端数程度の時間を必要とするからである。抵抗の測定は10秒間隔で行う。このようにして得られた電圧の波形とスペクトルを図2に示す。スペクトルの計算にはFFTを用いたが、その際のサンプリング時間は0.2秒、入力デー

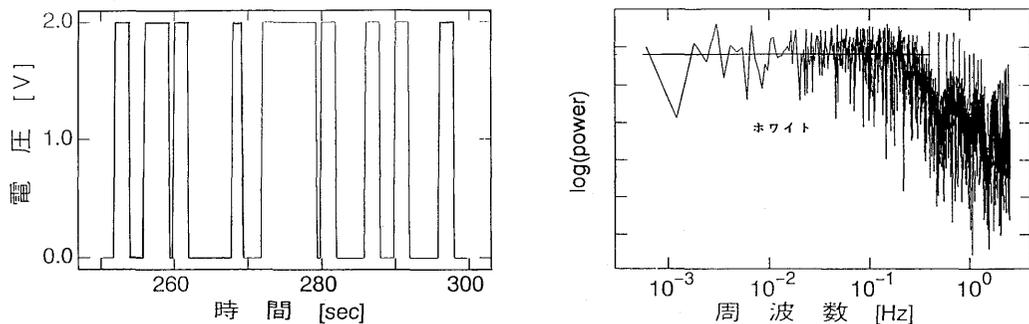


図2. 一様乱数による白色電圧ノイズの波形とスペクトル。スペクトルの縦軸の1目盛りは10 dBに相当する。

タ数は 2^{13} 個である。従ってスペクトルの周波数帯域は、2.5 Hz から 3.05×10^{-4} Hz までであるが、電圧制御を2秒間隔で行っているため、Nyquist 周波数 0.25 Hz より高周波側は白色的になっていない。

5.2 加熱部の温度測定

白色電圧を印加した後、十分時間が経過すれば、加熱部の温度のゆらぎは定常状態に達する。サーミスタを用いてこの部分の温度を測定したところ、図3に示す波形とスペクトルを得た。温度の平均値が 60°C の近傍に落ち着いていることから、ゆらぎは定常状態に達したと考えてよい。波形がもつ緩やかなうねりは室温の変化による。温度の測定間隔を10秒にとり、 2^{11} 個の測定データをFFTのプログラムに入力した。従ってスペクトルの周波数帯域は $2.4 \times 10^{-5} - 5 \times 10^{-2}$ Hz である。 10^{-4} Hz 以下のスペクトルが白色的でないのは室温のゆらぎによる。また 10^{-2} Hz 以上のスペクトルは明白に $1/f^2$ 的 (ブラウンノイズ) である。それが試料付近に発生した対流によるものなのか、あるいは他の外的原因によるものなのかは定かではない。しかし、サーミスタの特性によるものでない事だけは確認した。

5.3 抵抗の測定

ホワイト電圧を試料の中心部に印加し、この部分を含む十分に長いピアノ線 (幅 10 cm) の抵抗を四端子法により測定した。端子間電圧の測定値を入力電流で割れば端子間抵抗が求まる。

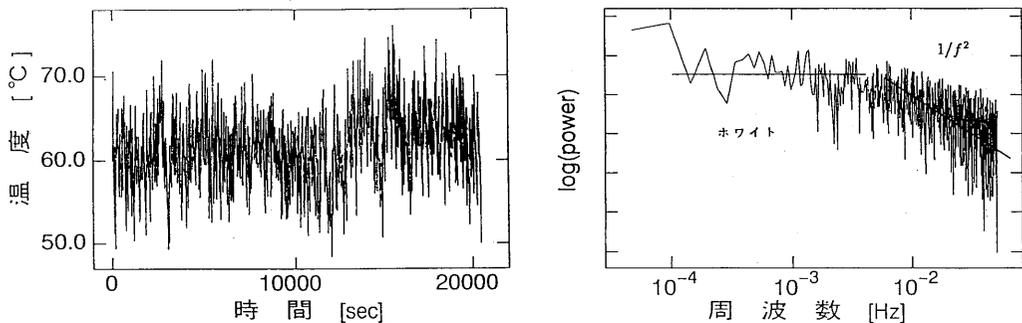


図3. 加熱領域の温度とそのスペクトル。スペクトルの1目盛りは10 dBに相当する。

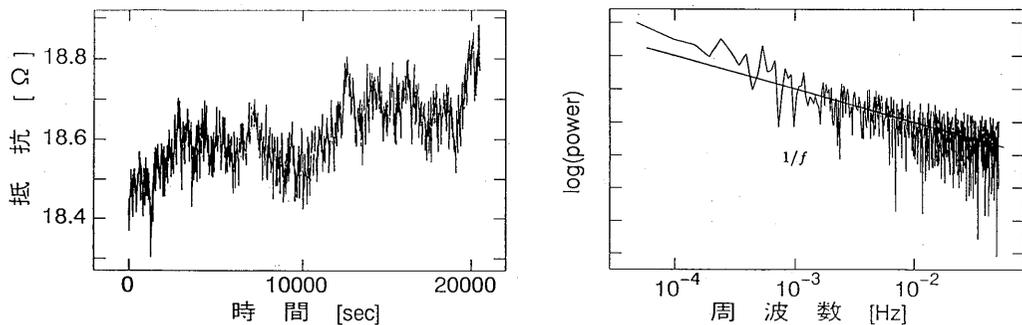


図4. 端子間距離 10 cm の場合の抵抗値とそのスペクトル。スペクトルの1目盛りは10 dBに相当する。

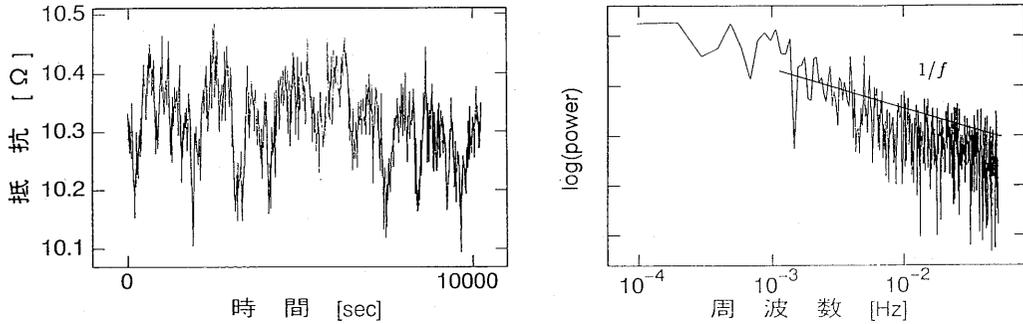


図5. 端子間距離 5 cm の場合の抵抗値とそのスペクトル. スペクトルの 1 目盛りは 10 dB に相当する.

室温は測定日によって多少異なるが、 20°C 前後である。得られた波形とスペクトルを図4に示す。測定間隔とデータ数、及びスペクトルの周波数帯域は5.2節の場合と同じである。図から明らかのように、この帯域の抵抗のゆらぎは綺麗に $1/f$ 的である。

続いて加熱部を含むピアノ線の幅 5 cm の部分の両端に端子を付けて、この間の抵抗のゆらぎを測定し、図5の波形とスペクトルを得た。 10^{-3} Hz 以上のスペクトルを $1/f$ 的と解釈する。 $1/f$ ノイズの帯域が幅 20 cm の場合より下限で狭くなっていることに注意しよう。

二つの測定結果の違いを、第4章の解析に基づいて説明することができる。ベークライトの軸に沿った座標を x 、ピアノ線の長さ方向の座標を y とすると、ピアノ線に沿った熱伝導方程式は

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

と書ける。ベークライトの半径を a 、溝のピッチを d として変数変換 $y = (2\pi a/d)x$ を施すと、ベークライトの軸に沿った熱伝導方程式

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\chi}{n^2} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad n = \frac{2\pi a}{d}$$

を得る。 x 方向の有効熱伝達係数を $\chi' = \chi/n^2$ で定義すると

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi' \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

この χ' を用いて、スペクトルが $1/f$ 的となる条件 (4.3) を吟味する。厳密に言うとその条件は

$$(5.1) \quad \cosh\left(\sqrt{\frac{\omega}{2\chi'}}\ell\right) \gg \left|\cos\left(\sqrt{\frac{\omega}{2\chi'}}\ell\right)\right|$$

と書かなければならない (式 (4.4) 参照)。実験で使用した値 $a = 0.5$ cm, $d = 0.05$ cm を用い、 χ として鋼鉄の値 0.133 cm^2/s を代入すると、 $\chi' = 3.37 \times 10^{-5}$ cm^2/s を得る。最初の測定で、 ℓ は端子間距離 10 cm の $1/2$ 倍から加熱部の幅 1.3 cm の $1/2$ 倍を引いたものに等しい： $\ell = 4.35$ cm。これらの数値と、スペクトル周波数帯域の下限 $\omega = 3.14 \times 10^{-4}/\text{s}$ (5×10^{-5} Hz) を (5.1) に代入すると $6.0 \times 10^3 \gg 1$ が導かれ、 $1/f$ ノイズのための条件は完全に満たされていることが分かる。続いての測定では $\ell = 1.85$ cm であるから、同じ ω の値に対して式 (5.1) は $27 \gg 0.66$

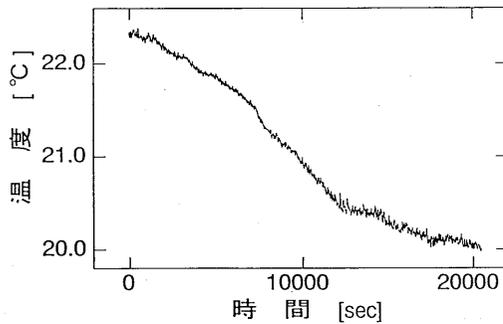


図6. 端子のすぐ外側の試料温度: $l=4.35$ cm.

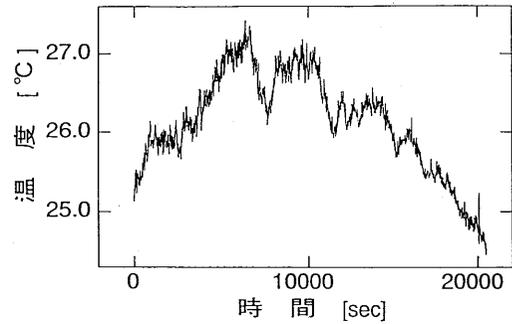


図7. 端子のすぐ外側の試料温度: $l=1.85$ cm.

となり、やはり条件はほぼ完全に満たされている。にも拘らず二つの測定の間にはスペクトルの違いがあるのは、ベークライトによる熱伝導を無視したことによると思われる。化学辞典によると、ベークライトの密度を 1.3 g/cm^3 とし、その熱伝達係数は $\chi'' = 6.15 \times 10^{-4} \text{ cm}^2/\text{s}$ である。これは χ' より1桁以上大きい。ピアノ線のピッチが小さいため、 $\chi \gg \chi''$ ではあるが、熱はベークライトに沿った方が速く伝わるのである。 χ'' を用いて関係 (5.1) の両辺を計算し直すと、 $l=4.35$ cm, 1.85 cm に対して、それぞれ $4.6 \gg 0.59$, $1.5 \gg 0.59$ が導かれる。第2の不等式は明らかに成立しない。 ω として $2\pi \times 10^{-3} \text{ s}/(10^{-3} \text{ Hz})$ を代入すると、第2の不等式は $33 \gg 0.64$ に置き換わる。これは $l=1.85$ cm の場合、 10^{-3} Hz 以上で抵抗のゆらぎが $1/f$ 的となることを意味するもので、実験結果と符合するものである。

図4と図5の間のスペクトルの違いを、測定によって裏付けることができる。式 (4.4) が成り立つためには、測定端子の位置におけるピアノ線の温度が、ほぼ室温 T_0 に等しくなければならない (式 (4.2) 参照)。抵抗のゆらぎを測定する状態で、端子のすぐ外側の温度をサーミスタで測定したところ、 $l=4.35$ cm, 1.85 cm に対して、それぞれ図6, 図7を得た。図6の場合、平均温度は室温と一致する。室温が下降しているのは、測定が真夜中から早朝にかけて行われたためである。これに対し、図7の場合、サーミスタの表示は、常に室温より 3°C 以上高い。

6. 結 論

1次元拡散方程式で記述される系が、 $1/f$ フィルタとして有用であることを一般的に示した。得られた結論は、準1次元系、すなわち、一つの方向の長さが他の方向の長さに比べて十分大きな系にも適用される。

第2章の例で見ると、 $1/f$ ノイズの下限周波数 f_L がいくらかでも小さくなる場合がある。このとき、現象の時定数は f_L に逆比例して大きくなる。このような場合、定常的 $1/f$ ノイズの周波数帯域の下限を確認することは事実上不可能である。

$1/f$ フィルタは高周波を通さないという意味では低域フィルタであるが、明確な切断周波数をもたない。実際、その周波数特性は自己相似的である。言い換えると、 $1/f$ フィルタはフラクタルな低域フィルタである。

参 考 文 献

- Dutter, P. and Horn, P.M. (1981). Low-frequency fluctuations in solids: $1/f$ noise, *Rev. Modern Phys.*, **53**, 497-516.
- 橋口住久 (1991). 『低周波ノイズ』, 先端技術シリーズ B5, 朝倉書店, 東京.
- Hooge, F.N. (1972). Discussion on recent experiments on $1/f$ noise, *Physica*, **60**, 130-145.
- Hooge, F.N., Kleinpenning, T.G.M. and Vandamme, L.K.J. (1981). Experimental studies on $1/f$ noise, *Rep. Progr. Phys.*, **44**, 478-532.
- Hurukawa, H. (1985). $1/f$ noise spectrum on self-similar cascade of bifurcation processes, *Phys. Lett. A*, **110**, 316-318.
- Johnson, J. (1925). The Schottky effect in low frequency circuits, *Phys. Rev.*, **26**, 71-85.
- Landau, L.D. and Lifshitz, E.M. (1963). *Fluid Mechanics*, Section 24, Pergamon, London.
- Mandelbrot, B.B. (1983). *The Fractal Geometry of Nature*, Freeman, New York.
- Mandelbrot, B.B. and Voss, R.F. (1983). Why is nature fractal and when should noise be scaling?, *Proceedings of the 7-th International Conference on Noise in Physical Systems* (eds. M. Savelly, G. Lecoy and J.P. Neugier), North Holland, Amsterdam.
- 元西 浩二, 古賀 利朗 (1982). $1/f$ 揺らぎの回路的シミュレーション, 電気通信学会論文誌, **J65**, 237-244.
- Wiener, N. (1950). *Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series*, MIT Technology Press, Wiley, New York.

$1/f$ Noise on One-dimensional Diffusion Processes

Noboru Takimoto, Shigenori Oda and Kunio Funayama

(Department of Engineering Science, Tohoku University)

A system which outputs $1/f$ noise as a response to white noise may be referred to as $1/f$ filter. Theoretical and experimental studies are given on the $1/f$ filter. It is generally shown that a natural phenomenon described by one-dimensional diffusion equation has a transfer characteristic which can be served as the $1/f$ filter. Three specific examples are considered. (1) An incompressible and viscous fluid bounded by two parallel planes has a dynamics appropriate to the $1/f$ filter. (2) A white noise of heat input on the boundary of a semi-infinite medium generates temperature noise with a $1/f$ spectrum at the boundary. (3) A white noise of temperature in a resistor generates, under proper conditions, current or voltage noise with a $1/f$ spectrum. An experimental study is given on the third example, and the $1/f$ noise is observed under specified conditions.