参 考 文 献

Otaka, E., Hashimoto, T. and Mizuta, K. (1993). The ribosomal proteins: I. An introduction to a compilation of the protein species equivalents from various organisms by a universal code system, *Protein Sequences and Data Analysis* (in press).

Fokker-Planck 方程式の一般化と繰り込み

岡 崎　卓

1. はじめに

風波を受けつつ航行する船舶の傾角や，外乱の混入を避け難い電気回路の出力は不規則な変動を呈する．外乱の統計を知って変動の確率分布を予測することは，船体や電気回路を設計するうえで欠かすことができない．Fokker-Planck (FP) 方程式はこの確率密度を定める方程式として多用されているが，その厳密な成立は外乱が正規白色ノイズである場合に限られる．

従って，任意の外乱に対して正しく確率密度を定めるよう FP 方程式を一般化することが望ましい．以下では，互いに関連しつつ発展する複数の変動を対象に，Generalized Fokker-Planck (GFP) 方程式を導き，さらに簡約する方法のあらましを述べる．

2. GFP 方程式の導出

確率変数 $U=\{U_i, i=1, \ldots, n\}$ と正規白色ノイズ $\nu(t), \langle\nu(t)\nu(s)\rangle=\delta(t-s)$ で駆動される外乱 W の時間発展を記述する確率微分方程式

$$\frac{d}{dt}U_i=M_i(U)+\mu_i(U, W), \qquad i=1, \ldots, n$$

$$\frac{d}{dt}W=N(W)+\sigma^2\nu(t)$$

が与えられれば，U と W の結合確率密度 $\rho(U, W, t)$ を決定する方程式は $n+1$ 箇の変数に関する FP 方程式として容易に得られる．この方程式から外乱 W を除いた主変数 U のみの確率密度 $f(u, t)$ を求めることが FP 方程式の一般化にほかならない．

さて，(U, W) の任意の位相関数 $X(U, W)$ を $\prod_{i=1}^{n}\delta(U_i-u_i)$ の線形空間に写す射影子を外乱 W の密度関数を介して組み立てれば，統計力学の手法を用いて，$f(u, t)$ を定める f のみを含む GFP 方程式を形式的に書き下すことができる．

3. GFP 方程式の簡約

上記 GFP 方程式は，作用素で形式的に表現され具体的には計算不可能な係数を含み，そのままでは実用性に乏しい．そこで微少展開パラメータ ε により $\frac{d}{dt}U=M(U)+\varepsilon\mu(U, W)$ と書替え，f および拡散係数を ε で摂動展開する．各次数毎に f の形式解を求めた後，再び総合して $\frac{\partial}{\partial t}f$ を復元すると，GFP 方程式はもはや計算困難な項を含まない．

こうして得られる簡約 GFP 方程式は拡散方程式に類似の構造をもち，その拡散係数は例えば

$$\lambda_{ij}(u)=\int_0^t dsB_{il}(u, s)\cdot R_{lj}(u, -s)$$

$$B_{il}(u, s)=\langle\mu_i(\boldsymbol{U}(-s), W)|_{U=u}\,\mu_l(u, W(s))\rangle$$

のように，外乱の相関関数 $\langle\mu(u, W)\mu(v, W(t))\rangle$ と原確率微分方程式の補助過程

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{U}(t)=M(\boldsymbol{U}(t)), \qquad \boldsymbol{U}(0)=U,$$

$$R(U, t)=e^{-\int_0^t dsS(\boldsymbol{U}(s))}, \qquad S_{ij}(U)=\frac{\partial}{\partial U_i}M_j(U)$$

に関する知識から計算される．これに対し通常の FP 方程式の拡散係数は単に相関関数の積分値 $\int_0^t ds\langle\mu(u, W)\mu(u, W(s))\rangle$ で与えられる．従って，簡約 GFP 方程式は補助過程を介して外乱の詳細な情報を取り入れていると言えよう．

4. 不規則振動の例

有色正規過程 W で駆動される不規則振動

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}X=Y \\ \dfrac{d}{dt}Y=-\alpha Y-\omega^2 X+W \\ \dfrac{d}{dt}W=-\beta W+\sigma\nu(t) \end{cases}$$

の場合，簡約 GFP 方程式は次の形をもつ：

$$\frac{\partial}{\partial t}f(x, y, t)=-\frac{\partial}{\partial x}yf-\frac{\partial}{\partial y}(-\alpha y-\omega^2 x)f+\lambda_{21}(u)\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}f+\lambda_{22}(u)\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f.$$

この解は真の確率密度 $f(u, t)$ に一致する．一方，通常の FP 方程式を用いれば，$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}f$ の項が欠落し，正しい確率密度が得られない．

尚，正規過程に従わない外乱に対しては，2 次のみならず高次の相関関数の情報を選択的に取り入れることが必要となる．そのためには未知関数 $M_0(U)$ を導入したうえで，展開 $M=M_0+\varepsilon M_1+\varepsilon^2 M_2+\cdots$ を行い，高次相関の情報を M_0 に繰り込めばよい．

調査実験解析研究系

ジーニ統計学方法論の解析的展開について

田　口　時　夫

平均差に代表されるジーニ統計学における代表値・散布度及び線形相関・回帰等に関する記述統計量は，「外積モメント系」を設定する事によって，ピアソン統計学と同様に，統一的な表現体系を与える事が出来る．その表現形式は一定の条件を加える事によって局所的な記述体系に制限する事も出来る．他方上記の外積モメントを平均値 μ_x の倍数で除去した相対的外積モメントで置換するならば，ジーニ係数やエンゲル弾力性係数に代表されるような非線形記述システムを形成する事が出来る．以上の研究結果は，Tokio Taguchi, A Characterization of Gini's Statistics —— On a System of Vector Analysis of Distribution に纏められた論文として，Roma 大学統計学研究所機関誌 *Metron* に受理された．一方，パレート型所得分布をその本質的特性に基づいて拡張した形式は，Tokio Taguchi, A Concentration Analysis of Income Distribution Model and Consumption Pattern —— Introduction of Logarithmic Gamma Distribution and Statistical Analysis of Engel Elasticity に纏められた論文として Bologna 大