2. 比較の規準

推定量 $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ の良さを計る規準としては通常残差平方和の平均が用いられる．分散の推定量 $\hat{\sigma}^2$ の規準としてはバイアス，Kullback-Leibler loss など通常の規準が考えられる．従来は別々に研究されてきた．

推定量の良さを調べるためには他にも規準があることが望ましい．先ず $\|\boldsymbol{\mu}\|^2$ の推定量の良さを調べることである．しかしこれは分散の推定量の評価をすれば良い．次に滑らかさ，例えば $\sum(\mu_i-2\mu_{i+1}+\mu_{i+2})^2$ の推定量を調べることが考えられる．ところが既存の文献ではこの量の推定量は明示的には与えられていない．

3. 比較のための条件設定

ここでは平滑化法として経験 Bayes 法，Wahba による GCV を用いる方法を比較した．

条件設定での困難は妥当な関数 $g(\cdot)$ を選択することである．ここでは Korn et al. (1991) に見える関数を中心にした．さらに計画のための規準を豊富にすることが望ましい．このために平均ピタゴラス関係を適用する．良い推定量であればこの関係が近似的に成り立つと期待される．そうすると前に述べた新しい評価規準が示唆される．

4. 結　　果

Simulation 研究で得られた知見は次の通りである．

a) 既存の方法では平滑化不足のことが多い．この対策としては Buckley et al. (1988) の分散推定量を用いることによって少し改善される．
b) GCV 法は経験 Bayes 法に比べて平滑化不足の傾向が強い．
c) 分散の推定のためには経験 Bayes 法では条件付推測の処理をした方が良い．それでも分散は負の bias をもつ傾向がある．
d) 平滑化法の性能はトレード・オフ母数と $g(\cdot)$ に依存する．Korn らの比較は σ^2 が小さいときに偏っている．

参 考 文 献

Buckley, M.J., Eagleson, G.K. and Silverman, B.W. (1988). The estimation of residual variance in nonparametric regression, *Biometrika*, **75**, 189-199.

Korn, R., Ansley, C.F. and Tharm, D. (1991). The performance of cross-validation and maximum likelihood estimators of spline smoothing parameters, *J. Amer. Statist. Assoc.*, **86**, 1042-1050.

じゃんけんモデルと非線型積分可能な力学系の確率モデル

伊　藤　栄　明

型 **1**, 型 **2**, 型 **3** という 3 つの型の粒子があり，**1** は紙，**2** ははさみ，**3** は石，というように巡回的な強弱関係があるものとする．それぞれに n_1, n_2, n_3 個の粒子がはいっていたとし，3 つの型の粒子の総数は n であり単位時間内にランダムに 2 つの粒子が衝突し弱いほうの粒子は強いほうの粒子に変化する．たとえば **1** の粒子と **2** の粒子は衝突により **2** の 2 粒子になるものとする．同じ型の 2 粒子の衝突では変化はおきないものとする．**1**, **2**, **3** の比率はそれぞれ確率変数 $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ であらわされる．そのとき時刻 t での積の値を $x_1(t)x_2(t)x_3(t)$ とした条件付き期待値について次の関係が成り立つ (Itoh (1973, 1979b)).

(1) $$E(x_1(t+1)x_2(t+1)x_3(t+1)\mid x_1(t)x_2(t)x_3(t))=\left(1-2\frac{{}_3C_2}{n(n-1)}\right)x_1(t)x_2(t)x_3(t)$$

この系は非線型積分可能系の確率モデルと考えられ，上の式は保存量が確率化されたものと考えられる．この系の連続時間モデルを考える．型 i の 1 粒子と型 j の 1 粒子が $(t, t+dt)$ に確率 kMx_ix_jdt で衝突し，強い方の型の 2 粒子となる．このような衝突の平均個数は kMx_ix_jdt となる．それぞれの型の粒子の個数は標準 Poisson 過程の時間変更をもちいてつぎのようにあらわされると考えられる (Itoh (1981))．すなわち $dN_{ij}\left(kM\int_0^t x_ix_jdt\right)\equiv N_{ij}\left(\int_0^{t+dt} x_ix_jdt\right)-N_{ij}\left(\int_0^t kMx_ix_jdt\right)$ とし，

(2) $$\begin{aligned}dx_1(t)&=\frac{1}{M}dN_{13}\left(kM\int_0^t x_1x_3dt\right)-\frac{1}{M}dN_{12}\left(kM\int_0^t x_1x_2dt\right)\\dx_2(t)&=\frac{1}{M}dN_{21}\left(kM\int_0^t x_2x_1dt\right)-\frac{1}{M}dN_{23}\left(kM\int_0^t x_2x_3dt\right)\\dx_3(t)&=\frac{1}{M}dN_{32}\left(kM\int_0^t x_3x_2dt\right)-\frac{1}{M}dN_{31}\left(kM\int_0^t x_3x_1dt\right),\end{aligned}$$

ここで $N_{ij}(t)\equiv N_{ji}(t)$ とし，$N_{ij}(t)$ $(i>j)$ はたがいに独立な標準 Poisson 過程であるとする．上記の系を近似するものとしてつぎの確率微分方程式が考えられる (Itoh (1979a, 1993))．

(3) $$\begin{aligned}dx_1(t)&=c_1x_1(t)(-x_2(t)+x_3(t))dt\\&\quad+\sqrt{c_2x_1(t)x_2(t)}\,db_{12}(t)+\sqrt{c_2x_1(t)x_3(t)}\,db_{13}(t)\\dx_2(t)&=c_1x_2(t)(x_1(t)-x_3(t))dt\\&\quad+\sqrt{c_2x_2(t)x_1(t)}\,db_{21}(t)+\sqrt{c_2x_2(t)x_3(t)}\,db_{23}(t)\\dx_3(t)&=c_1x_3(t)(-x_1(t)+x_2(t))dt\\&\quad+\sqrt{c_2x_3(t)x_1(t)}\,db_{31}(t)+\sqrt{c_2x_3(t)x_2(t)}\,db_{32}(t),\end{aligned}$$

ここで $b_{ij}(t)(\cdot)$ $(i>j)$ はたがいに独立な標準 Brown 運動とし，$b_{ij}(t)+b_{ji}(t)=0$ が成り立つものとする．式 (1) と同様な結果が Ito の公式を適用すれば導かれる．上記のことは直観的には自然なことであるが，数学的には基礎が必要であり，今後の重要な課題である．

つぎの剛体回転についての Euler 方程式は非線型積分可能系の典型的な例のひとつである．これは剛体の慣性系に対する角速度の慣性主軸方向の成分がどのように変わるかを調べる式である．ここで I_1, I_2, I_3 は主慣性モーメントである．

(4) $$\begin{aligned}\frac{d\omega_1(t)}{dt}&=\left(\frac{I_2}{I_1}-\frac{I_3}{I_1}\right)\omega_2(t)\omega_3(t)\\\frac{d\omega_2(t)}{dt}&=\left(\frac{I_3}{I_2}-\frac{I_1}{I_2}\right)\omega_3(t)\omega_1(t)\\\frac{d\omega_3(t)}{dt}&=\left(\frac{I_1}{I_3}-\frac{I_2}{I_3}\right)\omega_1(t)\omega_1(t)\end{aligned}$$

これについての自然な確率モデルを考えることは前年度からの課題である．

参 考 文 献

Itoh, Y. (1973). On a ruin problem with interaction, *Ann. Inst. Statist. Math.*, **25**, 635-641.

Itoh, Y. (1979a). Random collision models in oriented graphs, *J. Appl. Probab.*, **16**, 36-44.

Itoh, Y. (1979b). Random collision process on oriented graph, Research Memo., No. 154, The Institute of Statistical Mathematics.

Itoh, Y. (1981). Representation of Wright model in population genetics, Research Memo., No. 201, The Institute of Statistical Mathematics.

Itoh, Y. (1993). Stochastic model of an integrable nonlinear system, *J. Phys. Soc. Japan*, **62**, 1826-1828.