統計数理 (1992)
第 40 巻 第 2 号 185-193

ランジュバン方程式のスケール変換による複素ブラウン運動の一般化*

東北大学　小　山　順　二**

(1992 年 7 月　受付)

1. はじめに

ブラウン運動の考えは，単に小さな花粉のランダムな運動としてだけではなく，統計力学や物理学のいろいろな分野で重要である．古典的なブラウン運動はランジュバン方程式で表され，その性質は花粉粒子に働くランダム力とまわりからの摩擦力とで表現される．ランダム力にガウス型のランダムノイズを考えることで，ブラウン運動は多くの物理現象を理解するのに応用されている (Mandelbrot (1983))．

ブラウン運動をより一般的に拡張した fractional Brownian motion (fBm) の考えがある．ガウス型のランダムノイズと古典的なブラウン運動との中間的な性質を持つ運動が fBm である．Mandelbrot and Van Ness (1968) は fBm の自己相似性やスペクトル構造を明らかにした．Maccone (1981) は fBm の直交性や固有関数を導いている．

最近，Koyama and Hara (1992) は，不均質な断層破壊過程を決定論的なパラメータと確率論的なパラメータとで統一的に考えるために，ランダムシステムの時間発展をランジュバン方程式で表現した．さらに，ランダムシステムが持つ複雑な性質をランジュバン方程式系が持つ自己相似な性質で表現した．このような構造を持つランダムシステムは $1/f^{\alpha}$ 型のパワースペクトルになることを一般的に導いた．そして，べき係数 α とランダムシステムの構造との関係を示し，α がどのような物理的制約で決まるのかを議論している．また，小山・原 (1992) はランジュバン方程式のスケール変換により，fBm を含むブラウン運動が直交関数系として一般的に表現されることを明らかにした．

ここでは基本的なランジュバン方程式に，ランダムシステムの自己相似な性質で決まる複素パラメータのスケール変換を考える．複素スケーリングで導かれる複素ランジュバン方程式から出発して，複素ブラウン運動の新たな一般的表現式を導く．そして，複素ブラウン運動の基本的な性質を調べることにする．複素化したランジュバン方程式を考えることは，単に複素ブラウン運動の性質を明らかにするばかりではない．複素ランジュバン方程式が力学方程式や波動方程式と密接に結び付くことから，実際の物理現象への応用が非常に広い．また，複素化することで，フーリエ変換が自由に使えるから，複素ブラウン運動を考えるときに，数学的な汎関数表現が可能である．自己相関関数がエルミート関数であるから，時間反転が自然に定義される．さらに，複素ランダムノイズを入力として一般的に取り扱えることなど，実数表現のブラウン運動にはない特徴が数多く存在する．

---

* 本稿は，統計数理研究所 共同研究 (3-共会-8) における発表に基づくものである．

** 理学部：〒980 仙台市青葉区荒巻字青葉．

2. ランジュバン方程式の複素スケーリング

ここではランジュバン方程式を複素領域で一般化し，その解が意味する複素ブラウン運動の物理的性質を考えることが主な目的である．したがって，確率過程の理論を発展させることやブラウン運動の数学的な定式化を目的としているのではない．ブラウン運動の厳密な数学的表現は Levy (1953)，飛田 (1975)， Maccone (1981) や Mandelbrot (1983) に譲り，ここでは複素ブラウン運動の形式的な表現を物理的に考えることにする．

複雑な自然現象を数少ないパラメータで決定論的に記述することはできない．ここで考えるランダムシステムは，基本的な構成要素がランダムに励起される系である．ランダムな要素の内には同じ性質の応答を示す要素群があり，それらをまとめて一つのクラスターとする．したがって，クラスター内の各要素は，同一の方程式で表現され同一の時間発展をする．システム全体には様々な応答特性が存在し，数多くのクラスターが全体として複雑なランダムシステムを構成していると考える．それぞれのクラスターの応答を Koyama and Hara (1992) はランジュバン方程式で表現した：

$$\frac{dX(t)}{dt}+\gamma X(t)=G(t), \tag{2.1}$$

ただし，γ は注目するクラスター内の要素の応答を特徴づける実パラメータであり，$G(t)$ はガウス型ランダムノイズである．$G(t)$ はクラスター内の要素を時刻 t で活性化するかしないかを決めるのであるから，実関数である．いま，平均がゼロで分散が σ^2 とすれば，

$$\langle G(t)\rangle=0, \tag{2.2}$$

$$\langle G(t+\tau)G(t)\rangle=\sigma^2\delta(\tau) \tag{2.3}$$

である．ここで，$\langle\ \rangle$ は時間平均を，δ はデルタ関数を表す．(2.1) 式は Ornstein-Uhlenbeck 過程のブラウン運動を表現する微分方程式として古くから知られている．

複雑なランダムシステムの性質は，各クラスター間に存在する特徴的なスケーリング関係で考慮する．Koyama and Hara (1992) で考えたように，現象の継続時間がより短い事象はより数多く発生すると考える．この考えにより，実過程で導入したスケーリング関係を複素スケーリング係数となる場合に拡張することができる．(2.1) 式の解 $X(t)$ をクラスターの基本応答関数 $Z_0(t)$ と考え，そのランダムノイズ $G(t)$ を $R_0(t)$ とする．クラスター間のスケーリング関係を応答関数同士のスケール則で

$$f_Z:\ \sqrt{\frac{a}{\tilde{b}}}Z_j(\tilde{b}t)\rightarrow Z_{j+1}(t) \qquad (j=0,1,2,\dots) \tag{2.4}$$

と表す．ランダムノイズのスケール則は

$$f_R:\ \sqrt{a\tilde{b}}R_j(\tilde{b}t)\rightarrow R_{j+1}(t) \qquad (j=0,1,2,\dots) \tag{2.5}$$

である．ここで a は正の定数，$\tilde{b}$ は複素定数である．このスケール変換は，Z_j や R_j の統計的・物理的な性質を (2.4) や (2.5) で変換することを示している．スケール変換を等号で定義すれば，Z_j の総和で表されるシステムの応答は Weierstrass 関数の一表現となる（原・小山 (1992)）．このスケール変換で，各クラスターのインパルス応答は $\tilde{b}$ 倍の周波数特性に，そして，クラスター内の要素は a 倍の頻度でより数多く活性化されることになる．

この操作により，各クラスターのランジュバン方程式はそれぞれスケール変換され，複素領域でのランジュバン方程式となる：

$$\frac{dZ_j(t)}{dt}+\tilde{b}^j\gamma Z_j(t)=R_j(t). \tag{2.6}$$

また，複素領域でのランダムノイズ R_j は

$$\langle R_{j+1}(t+\tau)R^*_{j+1}(t)\rangle=a\langle R_j(t+\tau)R^*_j(t)\rangle \tag{2.7}$$

を満足する．R_j は，一般的には，複素関数である．R^*_j は対応する複素共役な関数である．しかし，(2.5) 式のスケール変換と Poisson 積分の公式（河田（1975））を用いれば，(2.7) のように実の相関関数となることが示される．

(2.6) 式で，複素ランジュバン方程式はスケーリング定数 $\tilde{b}$ で方程式の実数部と虚数部が結び付けられている．この実数部と虚数部のカップリングが，従来の複素ブラウン運動の理論（飛田(1975)）とここで考えている複素ブラウン運動とが大きく異なる点である．

3. 複素ランジュバン方程式の解

各クラスターの初期条件を $Z_j(0)=0$ と仮定する．したがって，ここで考えているランダムシステムはランダムなノイズによって励起されるシステムの応答だけであり，初期条件に依存しない．各クラスターの要素のインパルス応答 $\eta_j(t)$ は，(2.6) 式で $\tilde{b}^j\gamma$ の特性をもつから

$$\eta_j(t)=\exp(-\tilde{b}^j\gamma t)U(t) \tag{3.1}$$

と表せる．ただし，$U(t)$ は単位階段関数である．複素ランジュバン方程式 (2.6) の解は，各クラスターのインパルス応答 $\eta_j(t)$ とクラスター内の要素をランダムに活性化する $R_j(t)$ のたたみ込みで

$$Z_j(t)=\int_0^t R_j(s)\eta_j(t-s)ds \tag{3.2}$$

と表される．システム全体は，いろいろなクラスターの応答が重なりあい，複雑な性質を示す．したがって，システム全体の応答関数は上で考えた各クラスターの応答関数の和で表現されることになる：

$$Z(t)=\sum_{j=0}^{N}Z_j(t), \tag{3.3}$$

ただし，今考えているランダムシステムは $N+1$ 個のクラスター群から構成されているものとする．

j 番目と k 番目のクラスターの応答関数から相互相関関数を計算すれば，(3.2) 式より

$$\begin{aligned}C_{Z_jZ_k}(t_1,t_2)&=\langle Z_j(t_1)Z^*_k(t_2)\rangle\\&=\int_0^{t_2}\langle Z_j(t_1)R^*_k(s)\rangle\eta^*_k(t_2-s)ds\\&=\int_0^{t_1}du\int_0^{t_2}ds\langle R_j(u)R^*_k(s)\rangle\eta_j(t_1-u)\eta^*_k(t_2-s)\end{aligned} \tag{3.4}$$

と書き表される．* は対応する複素共役を示す．$R_j(u)$ と $R_k(s)$ はガウス型のランダムノイズである．(2.7) から，それらは互いに直交している：

$$\langle R_j(u)R^*_k(s)\rangle=\begin{cases}a^j\sigma^2\delta(u-s) & (j=k)\\0 & (j\neq k).\end{cases} \tag{3.5}$$

これにより，クラスターの複素応答関数 $Z_j(t)$ と $Z^*_k(t)$ は互いに直交している関数であること

がわかる．

この直交関係を用いれば，システム全体の自己相関関数は各クラスターの自己相関関数の和で表される．(3.4)式で時間差を τ とすれば，

$$(3.6)\qquad C_{ZZ}(\tau)=\langle\sum_j Z_j(t+\tau)\sum_k Z_k^*(t)\rangle = \sum_j\langle Z_j(t+\tau)Z_j^*(t)\rangle.$$

上式に (3.1) を代入すれば，〈 〉で表される時間平均が評価できる．複素スケーリング定数の実部が，$\Re\{\tilde{b}^j\}>0\quad(j=0,1,2,\ldots,N)$ である場合，

$$(3.7)\qquad C_{ZZ}(\tau)=\begin{cases}\dfrac{\sigma^2}{\gamma}\displaystyle\sum_{j=0}^{N}\frac{a^j}{\tilde{b}^j+\tilde{b}^{*j}}\exp(-\tilde{b}^j\gamma\tau) & (\tau>0)\\ \dfrac{\sigma^2}{\gamma}\displaystyle\sum_{j=0}^{N}\frac{a^j}{\tilde{b}^j+\tilde{b}^{*j}}\exp(\tilde{b}^{*j}\gamma\tau) & (\tau<0)\end{cases}$$

と表される．ランダムシステムを $t\geq 0$ で考えているにもかかわらず，自己相関関数 (3.7) は時間反転の対称性がよく，エルミート関数になっている．

Fig. 1 に複素スケール変換によるランジュバン方程式が描く複素ブラウン運動の例を示す．基本応答関数の $Z_0(t)$ はランダムパルスからなる時系列となっている．初期条件の影響はない．そのパルス幅は角周波数 γ で決まり，パルスの発生頻度（σ^2 に関係する）で特徴づけられている．以後，すべての周波数は角周波数のことである．スケール変換された応答関数 $Z_1(t)$ は，特徴的な周波数 $\tilde{b}\gamma$ と a 倍のパルス発生頻度で構成されている．同様に，$Z_2(t)$ は $\tilde{b}^2\gamma$ と a^2 で表現

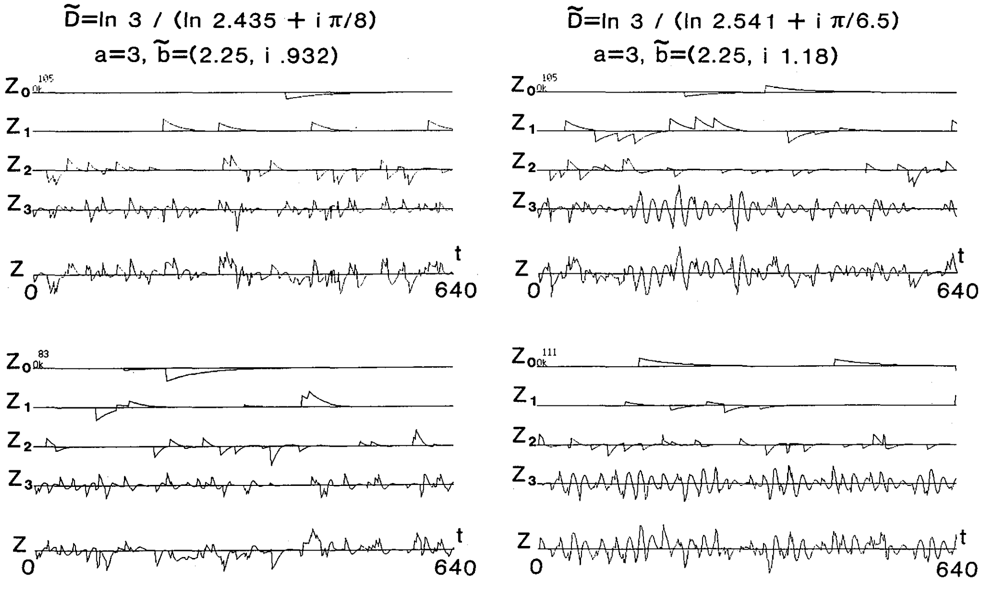

Fig. 1. Complex Brownian motion derived from the scaled Langevin equations by the complex scaling rule. Scaling parameters and complex fractal dimension from the scaling rule are indicated. Unit of vertical axis is arbitrary, depending on σ^2 in the text. Abscissa is the time axis of 640 steps for the full-length. The local states of the first four clusters and the total system response are shown for each example. Note that the oscillatory nature of the Brownian motion prevails as the scaling preceeds.

される．スケール変換が進むにつれて，個々のインパルス応答が単一のパルスではなく振動する成分が増えてくるのが見て取れる．この振動する振舞いが複素ブラウン運動の特徴である．

さらに複素スケーリングを繰り返すと，$\Re\{\tilde{b}^j\}>0 \quad (j=0,1,2,\dots,N-1)$, $\Re\{\tilde{b}^N\}=0$ となる場合が発生する．(3.7)式で全てのクラスターが安定であることを考慮すれば，この場合は N 番目のクラスターだけを考えればよい．N 番目のクラスターの自己相関関数は次のようになる：

$$\langle Z_N(t_1)Z_N^*(t_2)\rangle = t_1\wedge t_2 \exp(-ib_N^I\gamma\tau), \tag{3.8}$$

ただし，$\tau=t_1-t_2$ である．また，振動の周波数を決定する複素スケーリング定数の虚数部を

$$b_N^I=\Im\{\tilde{b}^N\} \tag{3.9}$$

と表した．さらに，$\wedge$ は t_1 と t_2 の小さな値を取るものとし，

$$t_1\wedge t_2=\begin{cases} t_1 & (t_1<t_2) \\ t_2 & (t_1>t_2) \end{cases} \tag{3.10}$$

である．(3.8)式の自己相関関数は時間差 τ だけでは決まらない．したがって，この場合はランダムシステムの応答が非定常になっている．

上の複素ランジュバン方程式から不安定化した複素ブラウン運動を計算し，Fig. 2 にシミュレーション例を示す．運動は b_N^I で決まる周波数の振動を続けることが見て取れる．このように振動する不安定な運動はブラウン運動のリミットサイクルの振舞い（Haken (1983)）と考えることができる．この振舞いは古典的なブラウン運動には見られない．これは，スケール変換により得られた複素ランジュバン方程式が表現する複素ブラウン運動の特徴である．

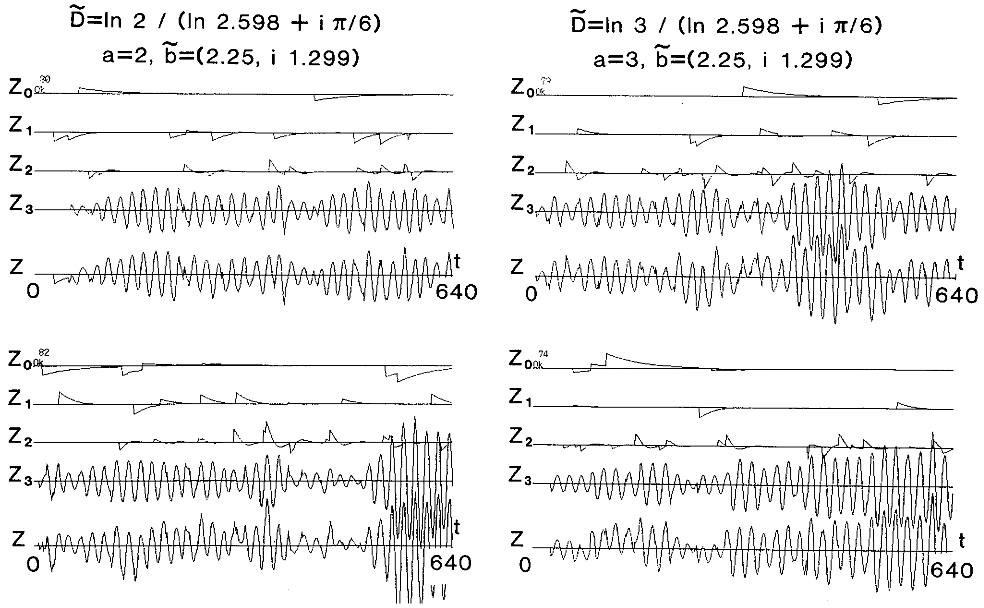

Fig. 2. The complex Brownian motion in the limit cycle derived from the Langevin equations by the complex scaling rule. Scaling parameters and complex fractal dimension are indicated. Note that the instability is enhanced by the parameter a. Others are the same as those in Fig. 1.

さらに複素スケーリングを繰り返すと，$\Re\{\tilde{b}^N\}<0$ となる．この場合は，(3.1)式から明らかなようにランダムシステムが線形安定性を失う．ランダムシステムが不安定な状態に陥る．これはブラウン運動自体に質的な変化がおこり，相転移 (Haken (1983)) に対応する振舞いを示すことになる．(3.1)式を実数部と虚数部に書き直すと

$$\frac{dX_j(t)}{dt}+b_j^R\gamma X_j(t)-b_j^I\gamma Y_j(t)=R_j(t) \tag{3.11}$$

$$\frac{dY_j(t)}{dt}+b_j^I\gamma X_j(t)+b_j^R\gamma Y_j(t)=0 \tag{3.12}$$

となる．ただし，X_j と Y_j は Z_j の実部と虚部を示し，b_j^R と b_j^I は $\tilde{b}^j$ のそれである．(3.11)式はランダムシステムの現象として観測される応答を示し，(3.12)式はそのバックグラウンドの過程を示している (Montroll and Shlesinger (1984))．複素ブラウン運動では，ランダム力とまわりからの摩擦力の他に，Y_j に代表されるバックグラウンドからのフィードバック効果がつけ加わっていることになる．したがって，この不安定性は，ランダムシステムの実過程とそのバックグラウンドとのカップリングから生じていることが理解される．ランジュバン方程式の複素スケール変換によって，ランダムシステムの不安定化が生じることが示された．

ここで考えているランダムシステムはクラスター間の相似則で特徴づけられている．以後の議論に必要な複素フラクタル次元 $\tilde{D}$ を導入し，複素スケーリング定数で次のように定義する：

$$\tilde{D}=\ln a/\ln\tilde{b}. \tag{3.13}$$

Fig. 2 の例や (3.1)式からわかるように，複素フラクタル次元の実部はランダムパルスのパルス幅に，虚部はパルスの中での振動の周波数に関係している．このように考えれば，複素フラクタル次元が力学系の運動を一般的に特徴づけることが理解される．

4. 複素ブラウン運動のパワースペクトル

複素ブラウン運動の自己相関関数はエルミート関数となっているから，そのフーリエ変換は実関数である．したがって，複素ブラウン運動は実パワースペクトルを与える．(3.7)をフーリエ変換して，

$$\begin{aligned}P_{CBM}(\omega)&=\int_{-\infty}^{\infty}C_{ZZ}(\tau)\exp(-i\omega\tau)d\tau\\&=\frac{\sigma^2}{\gamma}\sum_{j=0}^{N}\frac{a^j}{\tilde{b}^j+\tilde{b}^{*j}}\left\{\frac{1}{\gamma\tilde{b}^j+i\omega}+\frac{1}{\gamma\tilde{b}^{*j}-i\omega}\right\}\end{aligned} \tag{4.1}$$

を得る．ただし，ω は周波数で，$\tilde{b}^*$ は複素定数 $\tilde{b}$ の共役複素数である．(4.1)式では $\Re\{\tilde{b}^j\}>0$ $(j=0,1,2,\ldots,N)$ の場合を考えている．小山・原 (1992) が考えたパワースペクトルのスケール関係をこの場合に拡張してみよう．(4.1)式に $\omega\to\omega/\tilde{b}$ と $\omega\to\omega/\tilde{b}^*$ をそれぞれ代入すると，$|\Im\{\tilde{b}\}|<\tilde{b}\tilde{b}^*$, $a<\tilde{b}\tilde{b}^*$ のとき，

$$P_{CBM}^S(\omega)\simeq\tilde{\beta}_{\tilde{D}}\omega^{\tilde{D}-1-\ln\tilde{b}^*/\ln\tilde{b}}+\text{c.c.} \tag{4.2}$$

となる．ただし，$\tilde{\beta}_{\tilde{D}}$ は複素フラクタル次元 $\tilde{D}$ できまる定数，c.c. は対応する複素共役を示す．複素ブラウン運動のパワースペクトルは周波数 ω のべき乗で表されることがわかる．そのべき係数は複素フラクタル次元 $\tilde{D}$ で決まっている．$\Im\{\tilde{b}\}\to 0$ のとき，(4.2)式は小山・原 (1992) が示した fBm のパワースペクトルに一致する．

スケーリング定数が $a>\tilde{b}\tilde{b}^*$ を満たし，$|\tilde{b}^*-\tilde{b}|\ll\tilde{b}\tilde{b}^*$ のとき，(4.1)式のパワースペクトルは

次のような漸近形になる：

$$(4.3)\qquad P^{A}_{CBM}(\omega)\simeq\sigma^2\frac{a^N}{(\gamma\tilde{b}^N+i\omega)(\gamma\tilde{b}^{*N}-i\omega)}\ .$$

このスペクトルは，$\Im\{\tilde{b}\}\to 0$ のとき，小山・原 (1992) が示したfBmのローレンツ型のスペクトルに一致する．

リミットサイクルの振舞いをする複素ブラウン運動は，時間差 τ だけでその性質が決まる定常な過程ではない．非定常な自己相関関数である (3.8) 式からパワースペクトルを考えてみる：先ず，時刻 $t=0$ から $t=T$ までランダムノイズが発生し，それが複雑なシステムを励起すると考える．システムの応答は対応する複素ブラウン運動である．$t=0$ から $t=T$ までのシステム応答の平均エネルギースペクトルは，入力ランダムノイズの平均エネルギースペクトルとシステムのインパルス応答のスペクトルを2乗したものとの積で与えられる (Koyama and Zheng (1985), Papoulis (1984))．一般にパワースペクトルは単位時間当りのエネルギースペクトルで定義されるのであるから，複素ブラウン運動のパワースペクトルの推定値は平均エネルギースペクトルから

$$(4.4)\qquad \bar{P}_{CBM}(\omega)\simeq a^N\sigma^2\{\delta(\omega+\gamma b^I_N)+\delta(\omega-\gamma b^I_N)\}$$

で表される．ただし，δ はデルタ関数，b^I_N は (3.9) 式にある複素スケーリング定数の虚数部である．これは，パワースペクトルが b^I_N で決まる周波数の単振動のスペクトルであることを示している．

5. 結　　論

ランダムシステムの複雑な振舞いをランダムノイズが励起するシステム構成要素の応答で考えた．システムの複雑さを応答関数のスケール変換で定式化し，基本となる微分方程式系（ランジュバン方程式）に取り込んだ．ランジュバン方程式に実定数のスケール変換を考えれば，ブラウン運動を一般的に拡張したfractional Brownian motion (fBm) が得られる（小山・原 (1992)）．また，複素定数でスケール変換を考えれば，複素ブラウン運動が得られることを示した．

このようなランジュバン方程式系は自己相似なランダムノイズで励起される運動方程式を特徴づけ，微分方程式系の階層構造を作り出している．スケール変換されたランジュバン方程式の解は，直交関数系をなしていることが示された．この直交関係により系全体の自己相関関数やパワースペクトルの表現が簡単に求められる．

ここで得られた複素ブラウン運動に特徴的なことは，観測可能な運動と観測されないバックグラウンドの影響とがカップルしていることである．その結果，fBmでは見られないブラウン運動の性質として，運動が振動する成分を持つこと，ブラウン運動のリミットサイクルが現れること，スケール変換によりブラウン運動が不安定化することなどが明らかになった．これらの諸性質はランジュバン方程式を複素スケール変換することで得られた結果であり，従来の複素ブラウン運動の考えとは大きく異なる点である．

ここで述べたブラウン運動の一般化は，Koyama and Hara (1992) が導いたパワースペクトルが周波数のべき乗となるようなランダムシステムに応用されるばかりではない．実数領域のfBmでも複素ブラウン運動でも，その関数系が直交関数系をなしていることから，この結果は微細構造を持つランダムな確率過程の振舞いを一般的に表現できる．これが，従来のブラウン

運動の考えよりもより広い範囲の物理現象に応用できるだろうと考える理由である．ブラウン運動のリミットサイクルの振舞いや，不安定化の振舞いについて具体的な研究はまだ始まったばかりである．しかし，このような考え方は，複雑なランダムシステムの振舞いばかりではなく，被害地震の不均質な断層破壊過程の研究や高層建築構造物の振動破壊の研究に役立てられる（Koyama and Izutani (1990)）．

さらに，微分方程式をスケール変換する考え方は基本的な考え方であり，実数・複素定数のスケール変換はいろいろな方程式系に適用できる．基本となる微分方程式だけからは知ることのできない複雑な力学系の新たな振舞いが，ここで述べた方法により明らかにされるであろう．我々はこのスケール変換の考え方を複数のスケーリングパラメータがある場合に拡張し，結果的に非線形のスケール変換に発展する場合について考察している（Hara and Koyama (1992)）．

謝　　辞

この研究は東北大学 原 啓明先生と考えた問題をより一般的に拡張したものであります．いつも丁寧に議論をまとめてくださった原先生と東北学院大学 関口 健先生に感謝致します．

参 考 文 献

Haken, H. (1983). *Advanced Synergetics*, Springer, Berlin.

Hara, H. and Koyama, J. (1992). Scaled Langevin equation for complex system: nonlinear scaling rule for weight function (submitted to *Physica*).

原　啓明，小山順二 (1992). 複雑な系の活性化と相関関数，統計数理，**40**, 217-226.

飛田武幸 (1975).『ブラウン運動』，岩波書店，東京.

河田龍夫 (1975).『Fourier 解析』，81-272，産業図書，東京.

小山順二，原　啓明 (1992). ランジュバン方程式のスケール変換によるブラウン運動の一般化とそのスペクトル構造，統計数理，**40**, 17-26.

Koyama, J. and Hara, H. (1992). Scaled Langevin equation to describe $1/f^{a}$ spectrum, *Phys. Rev. A*, **46**, 1844-1849.

Koyama, J. and Izutani, Y. (1990). Seismic excitation and directivity of short-period body waves from a stochastic fault model, *Tectonophysics,* **175**, 67-79.

Koyama, J. and Zheng, S.H. (1985). Excitation of short-period body-waves by great earthquakes, *Physics of the Earth and Planetary Interiors,* **37**, 108-123.

Levy, P. (1953). Random functions: general theory with special reference to Laplacian random functions, *University of California Publications in Statistics,* **1**, 331-390.

Maccone, C. (1981). Eigenfunction expansion for fractional Brownian motions, *Il Nuovo Cimento,* **61B**, 229-248.

Mandelbrot, B.B. (1983). *The Fractional Geometry of Nature*, Freeman, New York.

Mandelbrot, B.B. and Van Ness, J.W. (1968). Fractional Brownian motions, fractional noises and applications, *SIAM Rev.,* **10**, 422-437.

Montroll, E.W. and Shlesinger, M.F. (1984). On the wonderful world of random walks, *Nonequilibrium Phenomena II from Stochastics to Hydrodynamics* (eds. J.L. Lebowiz and E.W. Montroll), 1-121, Elsevier, Amsterdam.

Papoulis, A. (1984). *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*, 263-499, McGraw Hill, New York.

Scaled Langevin Equation to Generalize the Complex Brownian Motion

Junji Koyama

(Faculty of Science, Tohoku University)

A complex system is considered to simulate the dynamical process of random activations. The system is composed of a set of clusters. Time evolution of each cluster is described by the Langevin equation. And a scaling rule is introduced to the set of the Langevin equations in order to model the complexity of the whole system. The scaling rule is described by complex parameters in this study, thus the complex Langevin equations being obtained. It is found that the present complex system leads to the generalization of the complex Brownian motion. The complex Brownian motion thus obtained is characterized by a complex fractal dimension defined by the scaling parameters. Orthogonality, autocorrelation function and power spectrum of the complex Brownian motion are derived. The complex system shows the coupling between the interesting physical process and its background process. The limit-cycle behavior of the Brownian motion and the instability of the Brownian motion are derived by the complex scaling of the Langevin equations.

Key words: Langevin equation, Brownian motion, complex Brownian motion, complex fractal dimension.