事象，E_1 を長さ k の“1”の連の起こる事象とする．このとき E_0, E_1 のいずれかが最初に起こるまでのwaiting timeの分布のgpgf, 条件 $X_0=0$ と $X_0=1$ がそれぞれ与えられたときの条件付きwaiting time分布のgpgf, この3つを陽の形で与えた．また長さ k の“1”の連が起こるまでのwaiting timeの分布のpgfとpfを陽の形で与えた．

更に，E_0 と E_1 の両方が起こるまでのwaiting timeの分布のgpgfを陽の形で与えた．

最後に，条件 $X_0=0$ が与えられたときと，条件 $X_0=1$ が与えられたとき，n 回の試行で E_1 が起こる回数の条件付き確率分布の条件付きpgfをそれぞれ陽の形で与えた．

参 考 文 献

Aki, S. and Hirano, K. (1991). Discrete distributions related to succession events in a two-state Markov chain, Research Memo. No. 419, The Institute of Statistical Mathematics, Tokyo.

Hirano, K. and Aki, S. (1992). On number of occurrences of success runs of length k in a two-state Markov chain, Research Memo. No. 432, The Institute of Statistical Mathematics, Tokyo.

ブートストラップと予測の誤差推定

小 西 貞 則

Efron (1979) によって紹介されたブートストラップ法は，統計解析に於ける様々の問題に適用され興味ある結果を生み出しつつある．予測の誤差を確率分布に基づきグローバルな観点から捉えた情報量規準AICに於ける，対数尤度のバイアス補正の研究もその一つである．

未知の確率分布関数 $G(x)$ からの大きさ n の無作為標本を $\boldsymbol{X}_n$ とする．分布関数 $G(x)$ の密度関数を $g(x)$ とし，これに対して想定したモデルの密度関数を $f(x\mid\boldsymbol{\theta})$ とする．情報量規準に於ける推定量のバイアス補正とは，推定されたモデルの平均対数尤度を対数尤度で推定したときのバイアス

$$b(G)=E_G\left[\frac{1}{n}\sum_{\alpha=1}^{n}\log f(X_\alpha\mid\hat{\boldsymbol{\theta}})-\int g(z)\log f(z\mid\hat{\boldsymbol{\theta}})dz\right]$$

の補正である．

Ishiguro and Sakamoto (1991) は，モデルに含まれるパラメータの推定を，最尤法に限定せずに推定した場合の情報量規準の導出を目的として，バイアス $b(G)$ の推定をブートストラップ法により数値的に行う方法を提案した．さらに北川 (1991) は，このブートストラップバイアス推定の変動を減少させるための一方法を提案した．

ここでは，未知のパラメータベクトル $\boldsymbol{\theta}$ を統計的汎関数で定義される推定量に基づいて推定したとき，ある正則条件のもとで漸近的なバイアスは

$$b(G)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p}\int T_i^{(1)}(z\,;\,G)\frac{\partial\log f(z\mid\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_i}dG(z)+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

となることを示し，ブートストラップ法との関係を検討した．ただし，$T_i^{(1)}(z\,;\,G)$ は，推定量 $\hat{\theta}_i$ の影響関数とする．漸近的バイアスは，例えば未知の確率分布 G を経験分布関数 $\hat{G}$ で置き換えた

$$b_K^{(1)}(\hat{G})=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{p}\sum_{\alpha=1}^{n}T_i^{(1)}(X_\alpha\,;\,\hat{G})\left.\frac{\partial\log f(X_\alpha\mid\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_i}\right|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}}$$

で推定する．

ブートストラップ法を適用した数値的アプローチは，極めて緩やかな仮定のもとで適用できる．しかし，バイアス推定の確率的変動の大きさには，本研究の解析的アプローチと同様に十分注意を払う必要がある．この点に関しては今後の研究課題である．

参考文献

Akaike, H. (1973). Information theory and an extention of the maximum likelihood principle, *Proceedings of 2nd International Symposium on Information Theory* (eds. B.N. Petrov and F. Csâki), 267-281, Akademiai Kiâdo, Budapest.

Efron, B. (1979). Bootstrap methods: another look at the jackknife, *Ann. Statist.*, **7**, 1-26.

Ishiguro, M. and Sakamoto, Y. (1991). WIC: an estimator-free information criterion, Research Memo., No. 410, The Institute of Statistical Mathematics, Tokyo.

北川源四郎 (1991). 対数尤度のブートストラップについて, 時系列に関する推測の理論と応用, 統計数理研究所共同研究レポート, No. 31, 175-179.

Wiener Space 上の小さな攪乱のある系に対する漸近展開

吉田朋広

Wiener space 上に構成された小さな攪乱のあるモデルの未知パラメータの最尤推定量の分布の漸近展開を, Malliavin 解析によって導いた.

参考文献

Yoshida, N. (1990). Asymptotic expansion for small diffusion. An application of the theory of Malliavin-Watanabe: general case and second order efficiency, Research Memo., No. 392, The Institute of Statistical Mathematics, Tokyo (to appear in *Probab. Theory Related Fields*).

Yoshida, N. (1991). Asymptotic expansions for small noise systems on Wiener space I: maximum likelihood estimators, Research Memo., No. 422, The Institute of Statistical Mathematics, Tokyo.

逆ガウス分布の特徴付け

松縄　規

逆ガウス分布及びガンマ分布, 対数正規分布, 片側安定分布, ランダムウォーク分布, 曲線逆ガウス分布などについて, 一般化算術平均値に関係付けられた, 条件付き最尤法による密度関数の誘導をおこない, 修正化された指数分布族を得るとともに, これらの分布の特徴付けを行った.

誘導された密度関数型:

(1) $$f_{\mathrm{IG}}(x\,;\,\mu,\lambda)=\sqrt{\frac{\lambda}{2\pi x^3}}\cdot\exp\left\{-\frac{\lambda(x-\mu)^2}{2\mu^2 x}\right\},\qquad (x,\mu,\lambda>0),$$

(2) $$f_{\Gamma}(x\,;\,\theta)=\frac{\tau^\tau}{\Gamma(\tau)}\cdot\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\tau-1}\cdot\frac{1}{\theta}\cdot\exp\left\{-\tau\left(\frac{x}{\theta}\right)\right\},\qquad (x,\theta,\tau>0),$$

(3) $$f_{\mathrm{LN}}(x\,;\,\mu,c)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,c}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2c^2}\cdot\left(\ln\frac{x}{\mu}\right)^2\right\}\cdot\frac{1}{x},\qquad (x,\mu,c>0),$$

(4) $$f_{\mathrm{OS}}(x\,;\,\theta)=\sqrt{\frac{\theta}{2\pi x^3}}\cdot\exp\left(-\frac{\theta}{2x}\right),\qquad (x,\theta>0),$$

(5) $$f_{\mathrm{RW}}(x\,;\,\mu,\lambda)=\sqrt{\frac{\lambda}{2\pi x}}\cdot\exp\left\{-\frac{\lambda(x-1/\mu)^2}{2x}\right\},\qquad (x,\mu,\lambda>0),$$

(6) $$f^*_{\mathrm{IG}}(x\,;\,\mu\,\|\,c)=\sqrt{\frac{\mu}{2\pi c^2x^3}}\cdot\exp\left[-\frac{1}{2c^2}\cdot\left(\sqrt{\frac{x}{\mu}}-\sqrt{\frac{\mu}{x}}\right)^2\right],\qquad \left(x,\mu,c>0\,;\,c=\frac{\mu}{\lambda}\text{ in (1)}\right).$$