確率過程の縮約

岡 崎 卓

1. はじめに

船体の不規則揺動など，理工学に見られる多くの不規則現象は，複数の自由度に関する確率過程の系として記述されることが多い．そのような場合，互いに関連する確率過程を，注目する変数に関する少数の確率過程にまとめられれば，複雑な系を幾つかの部分に分解して解析し，再び総合することができ，実用上の意義が大きい．以下では，主変数 U と，白色ガウス過程 $\nu(t)$ で駆動されるノイズ W の発展を記述する確率微分方程式

$$\begin{cases} \dot{U}=M(U)+\mu(U,\ W) \\ \dot{W}=N(W)+\nu(t) \end{cases}$$

を，同じく白色ガウス過程で駆動される１個の確率過程

$$\dot{U}=A(U)+B(U)\nu(t) \tag{1.1}$$

に縮約する問題を取り上げる（"˙"は時間による微分を表す）．

2. Fokker-Planck 方程式の一般化に基づく縮約法

ノイズ $\nu(t)$ の白色ガウス性により，確率微分方程式 (1.1) と，変数 U の確率密度 $f(u,t)$ を支配する Fokker-Planck (FP) 方程式とは等価である．従って，(1.1) を得るには，U と W の結合確率密度を支配する2変数の Fokker-Planck 方程式から，$f(u,t)$ を定める Generalized Fokker-Planck (GFP) 方程式を導き，近似変形して FP 方程式を求めればよい（GFP 方程式は，駆動ノイズが白色ガウス過程でなくとも厳密に成立する点で，FP 方程式の一般化に当たる）．

3. GFP 方程式の繰り込み近似

GFP 方程式は，U と W の任意位相関数を $\psi_u=\delta(U-u)$ の線形空間に写す射影子を用意すれば，統計力学の手法を用いて導くことが出来る．

しかしそのままでは，過去の履歴 $f(u,s)$；$0<s<t$ に関する積分を含み，求める FP 方程式の形を成さない．そこで，微小展開パラメータ ϵ によって，$\dot{U}=M_0+\epsilon M_1+\cdots+\epsilon\mu(U,\ W)$（但し，$M=M_0+M_1+\cdots$）と書替え，解の展開表示を求めて履歴積分を評価する．更に，求める方程式が拡散方程式の形式を採ることを保証するとともに，展開の高次項の情報を低次項に繰り入れるため，$\frac{\partial}{\partial t}f$ における ϵ^3 項＝0 とする繰り込み条件を設定する．この条件は未知関数 M_1 を定める次の微分方程式をもたらす（A_1, A_2 はノイズ項 $\mu(U,\ W)$ あるいは $\mu'(U,\ W)$ の W に関する２時刻相関，B_1, B_2 は３時刻相関に依存する U の関数）：

$$\frac{d}{dU}M_1(U)=\frac{1}{A_1}\left(\frac{B_1}{A_1}(M(U)+A_2)-B_2\right).$$

4. 縮約結果

この繰り込みにより，GFP 方程式は確率過程 (1.1) に対応する FP 方程式に移行する；

$$\frac{\partial}{\partial t}f(u,\ t)=-\frac{\partial}{\partial u}(M(u)+M_{mult}(u))f(u,\ t)+\frac{\partial}{\partial u}\lambda(u,\ t)\frac{\partial}{\partial u}f(u,\ t).$$

ここに拡散係数 λ と，ノイズ W の相乗的作用に起因する付加移流速度 M_{mult} は，非確率過程 $\boldsymbol{U}(t)$

$\left(\frac{d}{dt}\boldsymbol{U}(t)=M_0(\boldsymbol{U}(t)),\ \boldsymbol{U}(0)=U,\ M_0=M-M_1\right)$ および作用素 $\boldsymbol{W}(t)=e^{i\hat{L}_w t}We^{-i\hat{L}_w t}\left(i\hat{L}_W=N(W)\frac{\partial}{\partial W}+\frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{\partial}{\partial W}\right)^2\right)$ の関数として与えられる.

統計教育のためのコンピュータグラフィックス

鈴 木 義一郎

ほとんどの高校等に，コンピュータが搬入される時代になってきている．そもそも教育の現場では，まずは生徒が主体であり，次いで教師である．コンピュータはせいぜい教師の助手に過ぎない．そこでコンピュータの特質を生かした，統計教育のためのより「効果的」な教材を開発する必要がある．現場の教師が，手軽に，しかも積極的に使いたくなるような“補助教材”を作成する際の留意点について考えてみる．

① 統計教育を担当している現場教師の統計的センスを補強すること．
② コンピュータの扱いに不慣れなタイプでも気軽に利用できるよう，取扱いが，極力，単純化されていること．
③ 統計教育用の既成教材の問題点を検討するとともに，コンピュータを使うことの功罪についての問題点も議論しておくこと．
④ コンピュータの利用が直接目的ではないから，コンピュータを介在させる時間を余り長くとらなくても済むよう配慮されていること．
⑤ コンピュータ導入の範囲やタイミングなどを考えておくこと．
⑥ 場所の移動が容易なように，ハンディタイプのコンピュータでも利用できるようになっていること．
⑦ 生徒が興味を抱き，しかも教育用に適したデータ類を収集すること．
⑧ 教材のユーザーが利用しやすい「マニュアル」作りに重点を置くこと．

さらに，“コンピュータグラフィックス”等の作成にあたって，特に配慮すべき点を列挙してみると次のようになる．

① 少い予備知識だけで，フォローできるよう配慮されていること．
② 短時間でも終結するよう“ユニット化”されていること．
③ テキスト類と教材等との対応がついていること．
④ とにかく面白い話題であり，しかも考えさせるテーマであること．
⑤ コンピュータの特性を活かして，グラフ化の手法を多用すること．
⑥ カラフルで，しかも動きのある画面を提示できるよう努めること．
⑦ 昨今のコンピュータは演算速度が速いから，(人間のほうがついていける程度に）出力結果を“小出し”に見せるよう配慮すること．
⑧ 特にグラフィックを多用したソフトの開発には膨大な労力を伴うから，汎用的なものは共同で利用できるようにすべきである．