

# ランジュバン方程式のスケール変換による ブラウン運動の一般化とその スペクトル構造\*

東北大学 小山 順二<sup>1</sup>・原 啓明<sup>2</sup>

(1992 年 3 月 受付)

## 1. はじめに

ブラウン運動は、統計力学だけではなく、物理学のいろいろな分野で重要である。ブラウン運動の理論には、力学方程式を確率過程の方程式へ発展させる特別な意味がある(久保(1972))。ランジュバン方程式はこのようなブラウン運動を現象論的な記述で表現している。ランジュバン方程式により、ブラウン運動の確率過程の性質を微視的な運動として物理的に理解することができる。

ブラウン運動をより一般的に拡張した fractional Brownian motion (fBm) の考えがある。ブラウン運動はガウス型のランダムノイズを、fBm はランダムノイズを時間の重みつきで移動平均したものを積分することで得られる。したがって、自分以外に相関を持たないガウス型のランダムノイズと強い相関を持つブラウン運動との中間的な運動が fBm である。このような性質により、fBm は工学的、統計学的な広い範囲の応用が期待されている。Mandelbrot and Van Ness (1968) は Weyl の非整数次の積分表現を用いて、fBm の自己相似性やスペクトル構造を明らかにした。Maccone (1981) は Riemann-Liouville の非整数次の積分表現を出発点として、fBm の直交性や固有関数を導いている。

ランジュバン方程式は、ブラウン粒子の微視的な運動を粒子速度に比例する抵抗力と周囲の媒質から働くゆらぎの力で記述している。しかし、上に述べた一般化したブラウン運動は数学的な(形式的な)拡張による表現であり、その背景にある物理モデルを直接読み取ることとはできない。fBm の非整数次元の物理的な意味や、自然現象ではその値がどのようにして決まっているのかは明らかではない。

Koyama and Hara (1991) はランダムな系の時間発展をランジュバン方程式で考えて、ランダムシステムが持つ複雑な性質を方程式系が持つ自己相似な性質で表現した。このような構造を持つランダムシステムは  $1/f^\alpha$  型のパワースペクトルになることを一般的に導いた。そして、パワースペクトルのべき係数  $\alpha$  とランダムシステムの構造との関係を示し、 $\alpha$  がどのような物理的制約で決まるのかを議論している。

ここでは基本的なランジュバン方程式に、ランダムシステムの自己相似な性質で決まるス

\* 本稿は、統計数理研究所 共同研究 (3-共会-8) における発表に基づくものである。

<sup>1</sup> 理学部：〒980 仙台市青葉区荒巻字青葉。

<sup>2</sup> 工学部：〒980 仙台市青葉区荒巻字青葉。

ケール則を考慮することで、微分方程式から出発して fBm の新たな表現式を導く。そして、fBm の直感的な理解を深め、その物理的な意味を議論する。

## 2. 非整数次のブラウン運動 (fractional Brownian motion : fBm)

ここでは確率過程の厳密な理論を進展させることやブラウン運動の数学的な定式化を目的としているのではなく、ブラウン運動の一般化が意味する物理モデルを考え、その性質を明らかにすることを第1義の目的としている。厳密な数学的表現は Levy (1953), Maccone (1981) や Mandelbrot (1983) に詳しく、またそれらが引用している参考文献に述べられてある。まず、ブラウン運動と非整数次のブラウン運動の性質を形式的な表現でまとめてみる。ブラウン運動  $B(t)$  は Gaussian random noise (Grn),  $G(t)$ , の積分で形式的に

$$(2.1) \quad B(t) = \int_{-\infty}^t G(s) ds$$

と表される。逆の表現では、ブラウン運動の微分形がガウスノイズ (Grn) になる。この意味は、まず、ブラウン運動の自己相関関数を考える：

$$(2.2) \quad R_{BB}(t_1, t_2) = \langle B(t_1)B(t_2) \rangle \\ = \sigma^2(t_1 \wedge t_2),$$

ただし、 $\langle \rangle$  は時間平均を表し、 $\wedge$  は  $t_1$  と  $t_2$  の小さな値を取るものとする。これを、 $t_1$  と  $t_2$  で偏微分すれば、平均が 0、分散が  $\sigma^2$  の Grn の自己相関関数

$$(2.3) \quad R_{GG}(t_1, t_2) = \langle G(t_1)G(t_2) \rangle \\ = \sigma^2 \delta(t_1 - t_2)$$

に一致する。ただし、 $\delta$  はデルタ関数である。(2.3) は、 $t_1 = t_2$  のとき、つまり、Grn が自分自身にしか相関を持たないことを示している。しかし、(2.2) を見ればわかるように、ブラウン運動の自己相関は時間と共に発散する強い相関を示す。

Levy (1953) や Maccone (1981) は  $G(t)$  と  $B(t)$  の中間の性質を示す fractional Brownian motion (fBm),  $B_H(t)$  を

$$(2.4) \quad B_H(t) = \frac{1}{\Gamma(H+1/2)} \int_0^t (t-s)^{H-1/2} G(s) ds \quad (0 < H < 1)$$

で定義した。ここで、 $\Gamma$  はガンマ関数である。fBm の表現式には他に、Mandelbrot (1983) による

$$(2.5) \quad B_H(t) = \frac{1}{\Gamma(H+1/2)} \left[ \int_{-\infty}^t (t-s)^{H-1/2} G(s) ds - \int_t^{\infty} |t-s|^{H-1/2} G(s) ds \right]$$

などもある。これらの違いは、初期条件の仮定で生じるものであり、基本的な性質は同じである。

Grn がブラウン運動を励起するのに対し、fractional Gaussian noise (fGn),  $G_H(t)$ , が fBm を励起すると Mandelbrot and Wallis (1969) は考えた。彼らは fGn の一例として、

$$(2.6) \quad G_H(t) = (H-1/2) \sum_{s=t-M}^{t-1} (t-s)^{H-3/2} G(s) + Q_H G(t),$$

ただし、

$$Q_H = \begin{cases} 0 & \text{if } 1/2 < H < 1 \\ -(H-1/2) \sum_{s=1}^{\infty} s^{H-3/2} & \text{if } 0 < H < 1/2 \end{cases}$$

を考えている。ここで  $G(s)$  は Grn である。  $G_H(t)$  は時間の重み  $(t-s)^{H-3/2}$  で Grn を移動平均したもになっている。

$G_H(t)$  は Grn とは異なり、自分自身以外にも相関を示す。(2.6) 式の fGn の自己相関関数は (2.7)

$$R_{G_H G_H}(t_1, t_2) \simeq V_H |t_1 - t_2|^{2H-2}$$

で近似される (Mandelbrot and Van Ness (1968)). ただし、  $V_H$  は定数である。  $0 < H < 1$  であるから、時間差と共に  $2H-2$  のべき乗で相関は減少する。これは相関関数が  $\delta$  関数や指数関数で表現される場合に比べて、 long tail behavior の性質を示す相関である。 Fig. 1 に  $G(t)$  と  $G_H(t)$  を例示する。  $0 < H < 1/2$  のとき  $G_H(t)$  は Grn より短周期成分が卓越する。逆に、  $1/2 < H < 1$  では、周期の長い変動が卓越することが見て取れる。

Fig. 1 で見いだせる長周期成分は、(2.7) 式で、  $H \rightarrow 1$  のとき、 fBm が long tail behavior を顕著に示すことで理解される。この性質は、(2.4) 式の fBm 積分表示から導かれるものであり、ブラウン運動の形式的(数学的)な拡張から導かれた理論的な性質である。しかし、今まで述べてきたようにこのブラウン運動の一般化では、その背景にある物理モデルが古典的なブラウン運動のようには明確ではない。さらに、(2.6) 式の例に現れる確率変数 fGn が (2.7) 式のように相関を示す性質はどのように理解すればよいのだろうか。このガウスノイズが自分自身以外に

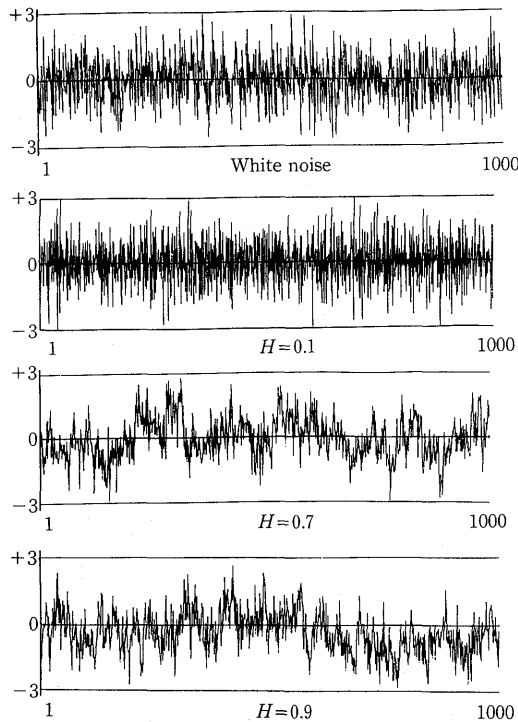


Fig. 1. White noise and fractional Gaussian noises by Mandelbrot and Van Ness (1968). Vertical axis is arbitrary corresponding to the variance of random noises. Horizontal axis is the time step upto 1000.

も相関を示すような性質は直感的な理解が難しい。また、べき係数  $H$  の物理的な意味づけやそれがどのようにして決まるのかもよくわからない点である。

### 3. ランジュバン方程式のスケール変換 (Scaled Langevin Equation : SLE)

複雑な自然現象を数少ないパラメータで一般的に記述することはできない。ここで考えるランダムシステムは、基本的な構成要素がランダムに励起される系である。要素の内には同じ性質の応答を示す要素群があり、それらをまとめてクラスターとする。数多くのクラスターが全体としてランダムシステムを構成していると考えられる。

それぞれのクラスターの応答を Koyama and Hara (1991) はランジュバン方程式で表現した：

$$(3.1) \quad \frac{dX(t)}{dt} + \gamma X(t) = G(t),$$

ただし、 $\gamma$  は注目するクラスター内の要素の応答を特徴づけるパラメータであり、 $G(t)$  が各要素を活性化する。

ここではさらに、各クラスターが自己相似な性質を示すと考えて、システム全体の複雑さをモデル化する。ここでは、(3.1) 式の解  $X(t)$  をクラスターの基本応答関数  $X_0(t)$  と考え、そのランダムノイズ  $G(t)$  を  $G_0(t)$  として、

$$(3.2) \quad X_i(t) = \sqrt{\frac{a}{b}} X_{i-1}(bt) \quad (i=1, 2, \dots)$$

$$(3.3) \quad G_i(t) = \sqrt{ab} G_{i-1}(bt) \quad (i=1, 2, \dots)$$

で各クラスターをスケール変換する。ここで  $a$  と  $b$  は正の実数とする。この操作により、ランジュバン方程式はクラスター毎にスケール変換され

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \frac{dX_1(t)}{dt} + b\gamma X_1(t) &= G_1(t) \\ \frac{dX_2(t)}{dt} + b^2\gamma X_2(t) &= G_2(t) \end{aligned}$$

そして、 $\text{Grn}$  は

$$(3.5) \quad \langle G_i(t+s)G_i(t) \rangle = a \langle G_{i-1}(t+s)G_{i-1}(t) \rangle$$

となる。また、このスケール変換はクラスター間の相似則をフラクタル次元  $D$ ,

$$(3.6) \quad D = \ln a / \ln b$$

で特徴づけている。Fig. 2 にここで考えているランジュバン方程式のスケール変換を模式的に示す。基本応答関数  $X_0(t)$  はパルス幅を決める  $\gamma$  とパルスの発生頻度で特徴づけられる。スケール変換された応答関数  $X_1(t)$  は  $b\gamma$  と  $a$  倍のパルス発生頻度で特徴づけられている。同様に、 $X_2(t)$  は  $b^2\gamma$  と  $a^2$  で表現される。したがって、もし、コントロール集合で特徴づけられるパルス群からなるランダムシステムの応答を考えるなら、 $a=2, b=3$  で (3.6) 式を評価すればよい。コッホ分布なら  $a=4, b=3$  に取ればよい。

各クラスターの初期条件を  $X_i(-\infty)=0$  と仮定する。各クラスターのインパルス応答関数  $h_i(t)$  は (3.4) 式の  $b^i\gamma$  で表される特性を持つから

$$(3.7) \quad h_i(t) = \exp(-b^i\gamma t)U(t)$$

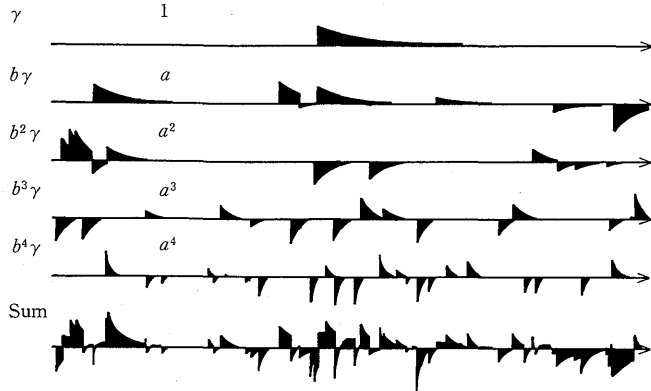


Fig. 2. Response of the complex system by random activation. Amplitude and unit in abscissa are arbitrary. Self-similar sets of clusters are illustrated in rows. Each cluster is composed of random-activated pulses. The same pulse width of  $\gamma$  and frequency multiplied by 1 are for the fundamental cluster and  $b\gamma, b^2\gamma, \dots$ , and  $a, a^2, \dots$  are for scaled clusters.

である。ただし、 $U(t)$ は単位階段関数である。各クラスターの応答関数は $h_i(t)$ とクラスター内の要素をランダムに活性化する $G_i(t)$ のたたみ込みで

$$(3.8) \quad X_i(t) = \int_{-\infty}^t G_i(s) h_i(t-s) ds$$

と表される。システム全体はいろいろなクラスターの応答が重なりあい、複雑な性質を示すと考えられる。したがって、システム全体の応答関数は上で考えた各クラスターの応答関数の和で表現される：

$$(3.9) \quad X(t) = \sum_{i=0}^N X_i(t),$$

ただし、システムは $N+1$ 個の有限個のクラスターから構成されているとする。

$i$ 番目と $j$ 番目のクラスターの応答関数から相互相関を計算すれば、(3.8)式より

$$(3.10) \quad \begin{aligned} R_{X_i X_j}(t_1, t_2) &= \langle X_i(t_1) X_j(t_2) \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{t_2} \langle X_i(t_1) G_j(s) \rangle h_j(t_2 - s) ds \\ &= \int_{-\infty}^{t_1} du \int_{-\infty}^{t_2} ds \langle G_i(u) G_j(s) \rangle h_i(t_1 - u) h_j(t_2 - s) \end{aligned}$$

と書き表される。 $G_i(u)$ と $G_j(s)$ は共に、Grnであるから、互いに直交している：

$$(3.11) \quad \langle G_i(u) G_j(s) \rangle = \begin{cases} a^i \sigma^2 \delta(u-s) & (i=j) \\ 0 & (i \neq j). \end{cases}$$

これにより、クラスターの応答関数 $X_i(t)$ と $X_j(t)$ は互いに直交していることが示される。

この直交関係を用いれば、システム全体の自己相関関数は各クラスターの自己相関関数の和で表される：

$$\begin{aligned}
 (3.12) \quad R_{xx}(s) &= \langle \sum_i X_i(t+s) \sum_j X_j(t) \rangle \\
 &= \frac{\sigma^2}{2\gamma} \sum_{i=0}^N \left(\frac{a}{b}\right)^i \exp(-b^i \gamma |s|).
 \end{aligned}$$

$B(t)$  や  $B_H(t)$  で表したブラウン運動はその軌跡 (変位) を示している (Wiener 過程). (3.1) 式のランジュバン方程式の解  $X(t)$  はブラウン運動の速度を与える (Ornstein-Uhlenbeck 過程). したがって, ブラウン粒子の位置 (変位) はここで考えている  $X(t)$  を形式的に時間で1階積分した物理量になっていると考えられる.

#### 4. Long tail behavior

原・小山 (1991) は最急降下法の近似で, Koyama and Hara (1992) は分岐点積分で (3.12) 式の漸近表現を得た. ここでは, より一般的に, (3.12) で  $s \rightarrow bs$  のスケール変換を考える.  $|s| \gg 1$  のとき

$$(4.1) \quad R_{xx}(s) \simeq \frac{a}{b} R_{xx}(bs)$$

のスケーリング関係が導ける. この関係を用いれば, システム全体の自己相関関数は,

$$(4.2) \quad R_{xx}(s) = \alpha_D |s|^{1-D} \quad (D > 0)$$

と表される. ただし,  $\alpha_D$  は  $D$  によって決まる定数である.

ブラウン運動の軌跡は  $B(t)$  で, ランジュバン方程式の解  $X(t)$  はブラウン運動の速度を形

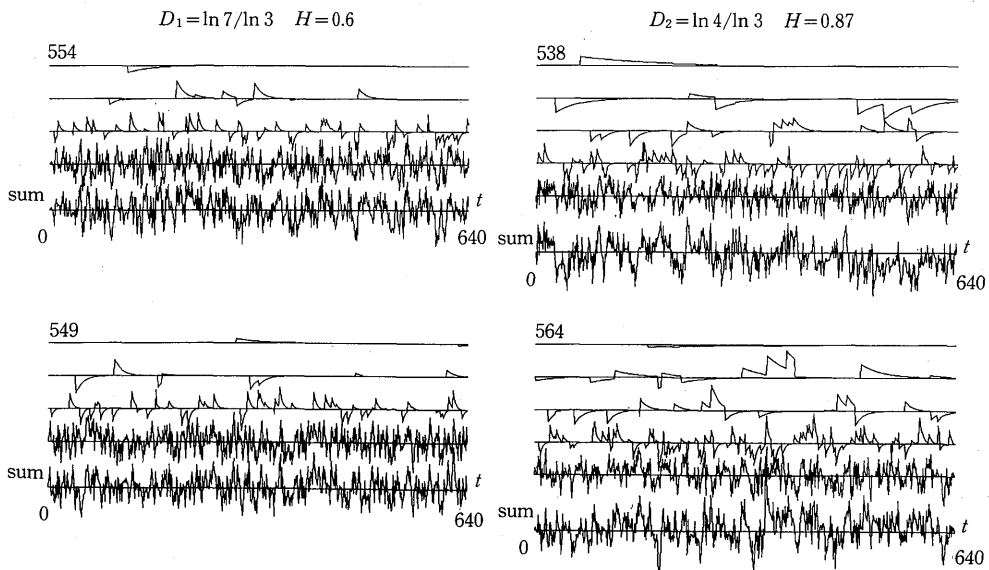


Fig. 3. Fractional Brownian motion derived from the scaled Langevin equation. Fractal dimension of the scaling rule is  $D$ , which relates to the Hurst exponent as  $D=3-2H$ . Two examples of each value of  $D_1=\ln 7/\ln 3$  and  $D_2=\ln 4/\ln 3$  are plotted. Unit of the vertical axis is arbitrary depending on  $\sigma^2$ . Unit in abscissa is a discrete time of 640 steps. The response functions of the first five clusters and the total response function are shown for each example.

式的に与えている。したがって、(4.2)式と直接比較すべき相関関数は(2.7)式である。すなわち、(2.7)と(4.2)式より

$$(4.3) \quad 1 - D = 2H - 2$$

の関係が導かれる。ここに現れる  $D$  はスケール変換のフラクタル次元であり、Fig. 2 や (3.6) 式で物理的に定義されているパラメータである。したがって、fGn の相関を規定するパラメータ  $H$  の意味がこの関係から理解される。本来ランダムであるべき確率変数が示す見かけ上の相関が、物理的には、確率変数のスケール変換によって生じるものであることがわかる。Fig. 3 に  $D_1 = \ln 7 / \ln 3$  と  $D_2 = \ln 4 / \ln 3$  をパラメータとする応答関数の例を示す。  $D_1$  より  $D_2$  の例が周期の長い成分が卓越している。Fig. 1 に示した fGn の特徴が SLE で再現されていることがこの図から理解される。

今  $D > 0$  で (4.3) 式の関係調べる。古典的なブラウン運動は  $H = 1/2$  で与えられる。このとき  $D = 2$  となる。これはブラウン運動が2次元平面を埋めつくすことを示している。また、 $1/2 < H < 1$  の範囲では、フラクタル次元は  $1 < D < 2$  となるのだから、fBm は一度通った点の近傍を再び通ることはなく、自己回避性の運動となる。さらに、 $0 < H < 1/2$  の範囲では、 $2 < D < 3$  であり、平面上の同じ点を無限回通る運動になっていることが理解される。

ここに述べたスケール変換によるブラウン運動の表現では、 $0 < D < 1$  の次元を持つ運動も定義される。この場合は、ブラウン粒子の連続した軌跡はもはや存在せず、至るところで途切れた軌跡となっている。この場合、 $1 < H < 3/2$  となり、(2.4) 式で与えた fBm の定義域を越えている。連続でないブラウン運動も次元の理解の自然な拡張として許すなら、ここに述べたスケール変換によるブラウン運動の表現が従来のブラウン運動の制約を取りはらい、より広い範囲の現象を表現することが可能であり、より広い範囲の応用が期待される。

ここでは直接導くことはしなかったが、fBm の軌跡の性質も同様に考えることができる。その long tail behavior の性質は (4.3) 式から空間的・時間的なスケール変換のフラクタル次元として、ランダムシステムの構造から決まるパラメータで理解することができる。

### 5. パワースペクトル

Grn のパワースペクトルは白色である。fGn のスペクトルは (2.7) 式をフーリエ変換して、

$$(5.1) \quad P_{fGn}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} V_H |\tau|^{2H-2} \exp(-i2\pi f\tau) d\tau \propto 1/f^{2H-1}$$

であることが知られている (Mandelbrot and Van Ness (1968))。ここで  $f$  は周波数である。この結果を用いれば、ブラウン運動や fBm の軌跡のパワースペクトルが (2.1) や (2.4) 式から各々  $1/f^2$  や  $1/f^{2H+1}$  となることが理解される。

SLE によるブラウン運動のスペクトルは (4.2) 式をフーリエ変換して、

$$(5.2) \quad P_{SLE}(f) \simeq \beta_D \Gamma(2-D) |f|^{D-2} \quad (D > 0, D-2 \neq \text{integer}),$$

ただし、 $\beta_D$  は  $D$  で決まる定数である。パワースペクトルがシステムのフラクタル次元を係数とする周波数のべき乗で表される。ここで注意しなければならないのは、 $\Gamma$  がガンマ関数であるから、 $D > 2$  ではパワースペクトルが負の値を取る。したがって、 $D > 2$  では (5.2) 式の表現は現実的ではない。 $D > 2$  の条件は  $a > b^2$  と等価である。

(3.12) 式に立ち戻り各クラスターの応答関数をフーリエ変換して、システム全体のパワースペクトルを各クラスターのパワースペクトルの和で表すと、

$$(5.3) \quad P(\omega) = \sum_{i=0}^N \left(\frac{a}{b}\right)^i \frac{2b^i}{b^{2i} + \omega^2}$$

となる。ここでは、一般性を失うことなく、 $\gamma=1$ と $\sigma^2=2$ を仮定してある。また $\omega$ は角周波数 $2\pi f$ である。各クラスターは特徴的な角周波数 $b^i$ を持つスペクトルで表現されていることがわかる。この角周波数より低い周波数帯では、 $2(a/b^2)^i$ の白色スペクトルになり、高い周波数帯では $2a^i/\omega^2$ のローレンツ型のスペクトルになっている。システム全体では $\gamma$ で規格化された角周波数 $\omega$ が1から $b^N$ の周波数帯でスケール変換されていることになる。この周波数帯をスケールリング領域と呼ぶことにする。

(5.3) 式のパワースペクトル表現で $\omega \rightarrow \omega/b$ のスケール変換を考えると、

$$(5.4) \quad P(\omega/b) = \frac{b^2}{a} \left\{ P(\omega) - \frac{2}{1+\omega^2} + \frac{2a^{N+1}}{b^{2(N+1)} + \omega^2} \right\}$$

と書き表される。このスケールリング関係は複雑であるが、 $P(\omega)$ の漸近的な性質を次のように求めることができる： $1 \ll \omega \ll b^{N+1}$ のスケールリング領域内では、 $a < b^2$ のとき

$$(5.5) \quad P(\omega) \simeq \frac{a}{b^2} P(\omega/b).$$

また、 $a > b^2$ のときは、(5.4) 式のスケールリングを繰り返すことで、中括弧内の第1項と第2項が第3項に比べて小さくなるから、

$$(5.6) \quad P(\omega) \simeq \frac{2a^N}{b^{2N} + \omega^2}$$

が導かれる。

(5.5) 式は(5.2) 式と同じパワースペクトルを与える。それはシステムのフラクタル次元を係数とする周波数のべき乗のスペクトルである。(5.6) 式は(5.2) 式の欠点を取り除いた表現になっていて、特徴的な角周波数 $b^N$ を持つローレンツ型のパワースペクトルを示す。これは、 $a > b^2$ の場合、システム全体の特性が最後にスケール変換したクラスターの性質で決まることを示している。この場合システムはスケールリング領域の高周波数帯域(短周期帯域)での性質が卓越することになる。

## 6. 結 論

Koyama and Hara (1992) は、ランダムシステムの運動エネルギーがスケールリング領域内で極小となる条件を考えた。そのシステムはポテンシャルエネルギーが最小であり定常状態にある。このような定常状態のランダムシステムは $D \simeq 0.47$ 、 $D=1$ 、および $D=2$ の3つのモードだけが存在することを示した。先に導いたfBmの次元 $H$ はシステムのフラクタル次元 $D$ と $D=3-2H$ の関係を示す。この関係を用いれば、連続するブラウン運動では $H=1/2$ と $H=1$ となる運動が安定な定常運動として期待される。

$H=1/2$ は古典的なブラウン運動を示し、そのパワースペクトルは $1/f^2$ である。 $H=1$ の場合は、 $1/f$ のパワースペクトルで特徴づけられる運動を示す。定常状態での連続するブラウン運動ではこの2つのモードが期待される。 $D \simeq 0.47$ となるモードは、 $1/f^{1.53}$ 型のパワースペクトルとなるランダムシステムである。乱流状態の粒子速度の空間分布(Champagne (1978))とか半導体素子のノイズ(e.g., De Muracia et al. (1991))などがこのモードに当たると考えられる。実際、これらの現象は時間的・空間的に連続しているのではなく、Sporadicな現象である。



複雑なシステムのダイナミックスをランダムシステムの活性化として捕らえ、ランダムな活性化をランジュバン方程式で、システムの複雑さを微分方程式系のスケール変換で表現した。基本的な微分方程式系から出発したことにより、fBm の物理的なモデルをランジュバン方程式のスケール変換によって、またそのパワースペクトルや long tail behavior の一般的な性質を見通しよく表現することができたと考える。

## 参 考 文 献

- Champagne, F.H. (1978). The fine-scale structure of the turbulent velocity field, *J. Fluid Mech.*, **86**, 67-108.
- De Muracia, M., Pascal, F., Gasquet, D., Lecoy, G. and Vanbremeresh, J. (1991). Experimental results on low frequency noise in GaAs TLM test structure, *Noise in Physical Systems and 1/f Fluctuations* (eds. T. Musha, S. Sato and M. Yamamoto), 199-202, Ohmsha, Tokyo.
- 原 啓明・小山順二 (1991). ランダム・システムの活性化とべき分布, *統計数理*, **39**, 73-83.
- Koyama, J. and Hara, H. (1991).  $1/f$  and  $1/f^\alpha$  spectra from activation of random system by scaling Langevin equation, *Noise in Physical Systems and 1/f Fluctuations* (eds. T. Musha, S. Sato and M. Yamamoto), 549-553, Ohmsha, Tokyo.
- Koyama, J. and Hara, H. (1992). Scaled Langevin equation to describe  $1/f^\alpha$  spectrum, *Phys. Rev. A*, **46**, 1844-1849.
- 久保亮五 (1972). 『統計物理学：岩波講座現代物理学の基礎 6』, 177-275, 岩波書店, 東京.
- Levy, P. (1953). Random functions: general theory with special reference to Laplacian random functions, *University of California Publications in Statistics*, **1**, 331-390.
- Maccone, C. (1981). Eigenfunction expansion for fractional Brownian motions, *Il Nuovo Cimento*, **61B**, 229-248.
- Mandelbrot, B.B. (1983). *The Fractional Geometry of Nature*, Freeman, New York.
- Mandelbrot, B.B. and Van Ness, J.W. (1968). Fractional Brownian motions, fractional noises and applications, *SIAM Rev.*, **10**, 422-437.
- Mandelbrot, B.B. and Wallis, J.R. (1969). Computer experiments with fractional Gaussian noises, Part 1, average and variances, *Water Resources Research*, **5**, 228-241.

## Scaled Langevin Equation to Generalize the Brownian Motion and Its Power Spectrum

Junji Koyama

(Faculty of Science, Tohoku University)

Hiroaki Hara

(Faculty of Engineering, Tohoku University)

A complex system is considered to simulate the dynamical process of random activations. The system is composed of a set of clusters. Time evolution of each cluster is described by the Langevin equation, which characterizes a family of the Brownian motion. Then a scaling rule is introduced to the Langevin equation in order to model the complexity of the whole system. It is found that the complex system leads us to the generalization of Brownian motion and fractional Brownian motion. Fractal dimension  $D$  defined from the scaling rule relates to the Hurst exponent  $H$  of fractional Brownian motion as

$$1-D=2H-2 \quad (D>0).$$

This would give a physical basis of the Hurst exponent, which is originally proposed to specify "the span of interdependence of Brownian motion". Orthogonality, long tail behavior, and spectral scaling of fractional Brownian motion by the scaled Langevin equation are also discussed.