

Ward-Takahashi の恒等式の破れについて*

—— 一般的配位空間上での量子化の問題として ——

防衛大学校 尾 高 一 彦**

(1992 年 9 月 受付)

1. 序 論

素粒子物理はもとより統計物理やその他多くの分野で Ward-Takahashi の恒等式は非常によく利用され、有用な結果を与えている。Ward-Takahashi の恒等式とは、物理系の連続変換に関する Noether カレントの連続の方程式を量子論的に取り扱うことにより得られる関係式である。しかし、Noether カレントを量子論的に取り扱うと古典的連続の方程式が破れることもある。この現象は素粒子物理学の発展に於てしばしば重要な役割を果たしてきた。本稿に於てはこの現象 (Anomalies) を、我々の仕事 Iso and Odaka (1985), Odaka and Itoh (1988), Odaka (1988), Itoh and Odaka (1991) を含め、簡単な模型を用い、破れの原因が明確になるよう心がけレビューを行った。

2. 古典的対称性と Ward-Takahashi の恒等式

$d(d \geq 0)$ 次元空間上に場 $\phi^a(\mathbf{x}, t)$ が存在し、その場にある連続的な変換を行う。特に、 $d=0$ は質点系の力学で、 $\phi^a(t)$ は位置ベクトルの各成分である。この変換に対し任意の時空領域で作用積分が不変であれば、Noether の定理により次のような連続の方程式を得る。

$$(2.1) \quad \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} J_i(\mathbf{x}, t) - \frac{\partial}{\partial t} J_0(\mathbf{x}, t) = 0$$

ただし、 J_i, J_0 は変換によって生成されるカレント

$$(2.2) \quad J_i(\mathbf{x}, t) \equiv - \sum_{\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_i \phi^{\alpha}} \delta \phi^{\alpha}, \quad J_0(\mathbf{x}, t) \equiv \sum_{\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^{\alpha}} \delta \phi^{\alpha}$$

である。表面積分からの寄与はないとすれば、次の量

$$(2.3) \quad G \equiv \int d\mathbf{x} J_0(\mathbf{x}, t)$$

が保存し、この保存量は変換のジェネレーターになっている。

形式的ではあるが、カレントの連続の方程式を量子論的に扱ってみよう。まずは、場の量に対し正準交換関係を設定し、そして適切な Hilbert 空間上に表現する。Hilbert 空間内の最もエネルギーの低い状態 (真空) を $|0\rangle$ とする。量子論的に扱うことによりカレントに発散が現れるなら、正規積を取りカレントを定義しなおす。次にいくつかの場の演算子とカレントとの時

* 本稿は、統計数理研究所 共同研究 (3-共会-4) における発表に基づくものである。

** 数学物理学科：〒 239 横須賀市走水 1-10-20。

間順序積 (T 積) に対し真空期待値を取る. この期待値をカレントの時空点に関し微分する.

$$(2.4) \quad \partial^\mu \langle 0 | T(J_\mu(\mathbf{x}, t), \phi^a(\mathbf{x}_1, t_1) \cdots \phi^{a'}(\mathbf{x}_n, t_n)) | 0 \rangle$$

T 積を取っていること, 連続の方程式は成立していることに注意して計算すると次の関係式を得る.

$$(2.5) \quad \partial^\mu \langle 0 | T(J_\mu(\mathbf{x}, t), \dots) | 0 \rangle = \langle 0 | [J_0(\mathbf{x}, t), \phi^a(\mathbf{x}_1, t_1)] \cdots | 0 \rangle \delta(t - t_1)$$

これが Ward-Takahashi の恒等式である. この関係式は素粒子論では理論の繰り込み可能性の証明に必要な重要な式である. 統計物理や物性論での有用性については豊田正氏の研究会報告を参照されたい.

3. 量子論への移行手続における問題点

この章では量子力学系への移行について反省してみよう. 第2章でも触れたように, 古典系から量子系に移るには普通には次の様な手続を踏む. 古典系で定義した正準量 $\phi^a(\mathbf{x}, t)$ と正準共役量 $\Pi^a(\mathbf{x}, t)$ に対し正準交換関係を設定する.

$$(3.1) \quad [\phi^a(\mathbf{x}, t), \Pi^b(\mathbf{y}, t)] = i\delta^{ab}\delta^d(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \dots$$

この代数を適当な Hilbert 空間上に表現することによって量子論は完成する. しかし, 量子論はこの様な手続きによって一意的に決まるとは限らない. 最も有名な例は, 質点を極座標を用いて記述した系の量子論である. 動径方向の正準交換関係に関する関数空間上の表現にはユニタリー同値でないものが存在する.

$$(3.2) \quad (A) \quad P_r \Rightarrow -i \frac{\partial}{\partial r}, \quad (B) \quad P_r \Rightarrow -i \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right)$$

この二つの内, (A) はエルミート演算子であるが (B) はそうではない. 水素原子を扱う時は (B) を用いる. (B) はカルテシアン座標から出発し, 正準交換関係を関数空間に表現した後に変数変換し求めたものである.

正準交換関係を基礎にした量子論では, 配位空間の位相が \mathbb{R}^n と同相なら正準交換関係の Hilbert 空間上の表現はユニタリー同値のものを除き一意的であるという von Neumann の一意性定理がある. 上記の例では, 動径方向の変数は正の値しか取らない為 \mathbb{R} とは同相でなく, 量子論への移行は一意的でない. しかし, この例は, もととの空間が \mathbb{R}^3 であるため $r=0$ 点のような特殊な点を有する座標系から出発しなければよだけのことである.

配位空間が \mathbb{R}^n と同相でなく大局的カルテシアン座標が取れない場合は問題が深刻である. 質点系の量子力学を扱う限り, この問題が物理的な意味を持ち我々を悩ますことはあまりない. しかし, 場の量子論になると話は別である. ラグランジアン

$$(3.3) \quad \mathcal{L} = \frac{1}{4} \text{Tr}(\partial_\mu g(\mathbf{x}, t) \partial^\mu g^{-1}(\mathbf{x}, t)), \quad g(\mathbf{x}, t) \in G$$

で与えられるような非線形 σ 模型の配位空間は, 例えば G としてコンパクトな Lie 群をとるといったように制限を受け, その為大局的カルテシアン座標が取れない. このような制限を受けた配位空間上での量子化は, Dirac によって一応の処方箋は与えられているが, この処方箋では矛盾が生じることはすでに Faddeev (1984) によって指摘されている. この矛盾は Ward-Takahashi の恒等式の破れと密接に関係している. そこで, 大局的カルテシアン座標が取れない配位空間の量子化について Isham (1984) に従い, 今少し一般的に考察してみる. このような

系では正準交換関係を設定するべき座標系すらわからない。

まず、正準交換関係に対応する代数やその表現を決めるのに、観測量と直接結びつく演算子すなわちエルミート演算子のみを扱うことを方針とする群論的アプローチによることにする。配位空間上の任意の点を他の任意の点に移し、なお群をなす変換を考える。配位空間上の複素数値関数からなる Hilbert 空間上に、この変換群のユニタリー表現を取る。ユニタリー表現を取ったためこの変換群のジェネレーターは必ずエルミート演算子になる。これで、配位空間上の点を表す演算子と変換群のジェネレーターとを用いることにより量子論が作れる。勿論、このアプローチにおいても \mathbb{R}^n 上では通常の量子力学になり、von Neumann の一意性定理は成立している。しかし、一般の場合には変換群のユニタリー表現は一意とは限らず、そのため量子化には任意性が残る。またより一般的に、配位空間上の複素数値関数の成分を増やしたり、あるいは複素数ではなく四元数や八元数にする事も可能ではあるが、ここでは触れない。

自明でない具体例として球面上 (S^2) の質点を考えよう。この例での変換群は回転群 ($SO(3)$) であり、これを S^2 上の複素関数に表現する事を考える。 S^2 は $SO(3)/SO(2)$ であるので、回転群の表現は一意的でなく $SO(2)$ の $U(1)$ 表現により分類される。これにより S^2 上の量子力学も一意的でなく、いろいろの可能性がでてくる。この量子化の任意性を具体的に示すため径路積分を定式化しよう。

ハミルトニアンとしては、位置のずらしに対する不変性を考慮すると、二次のカシミア演算子を取るのが最も簡単で自然である。

$$(3.4) \quad H = \frac{1}{2} \mathbf{L}^2$$

ここで \mathbf{L} は回転群のジェネレーターである。球 (半径 1) 上の位置を表す演算子は \mathbf{n} で、 \mathbf{n} を z 方向とし、極座標で (θ, ϕ) だけずらした位置は、

$$(3.5) \quad \mathbf{n}' = e^{iL_z\phi} e^{iLy\theta} e^{-iL_z\phi} \mathbf{n} e^{iL_z\phi} e^{-iLy\theta} e^{-iL_z\phi}$$

である。メジャーとして Haar メジャー

$$d\mu = \sin \theta d\theta d\phi$$

を取る。位置の演算子 \mathbf{n} の固有ベクトルを

$$(3.6) \quad |n; n\rangle = e^{iL_z\phi} e^{iLy\theta} e^{-iL_z\phi} |\theta=0, \phi=0\rangle; |n\rangle = e^{iL_z\phi} e^{iLy\theta} |\theta=0, \phi=0\rangle; |n\rangle e^{-in\phi}$$

と導入する。ここで特に注意をしておきたいのは状態ベクトルの位相 (phase) である。回転群を表現するには、 $S^2 \simeq SO(3)/SO(2)$ であるため、球上の実数関数では不十分で複素数関数が必要とし、その位相が意味を持つ。

径路積分を定式化するのには、無限小時間間隔 τ での Green 関数

$$(3.7) \quad K^n(\mathbf{n}', \mathbf{n}; \tau) = \langle n; \mathbf{n}' | e^{-i\tau H} | \mathbf{n}, n \rangle$$

を計算する必要がある。回転群の表現ベクトル $|l, m\rangle$ ($l(l+1)$ は \mathbf{L}^2 , m は L_z の固有値) を導入すると、

$$(3.8) \quad K^n(\mathbf{n}', \mathbf{n}; \tau) = \sum_{l=0}^{\infty} e^{-\frac{i}{2}\tau l(l+1)} \frac{2l+1}{4\pi} \left(\sum_{m=-l}^l e^{-i(m-n)(\phi'-\phi)} d_{nm}^l(\theta') d_{nm}^l(\theta) \right),$$

$$d_{nm}^l(\theta) \equiv \langle l n | e^{-iLy\theta} | l m \rangle$$

となる。 $d_{nm}^l(\theta)$ は Gauss の超幾何関数によって与えられる。和や積分を実行する時の収束性を明確にしておくため τ を $-i\epsilon$ ($\epsilon > 0$) と解析接続しておき、超幾何関数の和則を用い計算を実

行する。結果は

$$(3.9) \quad K^n(\mathbf{n}', \mathbf{n}; \varepsilon) \sim \frac{1}{2\pi\varepsilon} e^{-in\Delta\phi(\cos\theta-1)} e^{-\frac{4}{\varepsilon}(1-\cos(\frac{\Theta}{2}))} e^{-\varepsilon(\frac{n^2}{2}-\frac{1}{4})}$$

$$\Delta\phi = \phi' - \phi, \quad \cos(\Theta) = \mathbf{n}' \cdot \mathbf{n}$$

となる。この Green 関数を用い遷移振幅の径路積分表示を書き下すと、

$$(3.10) \quad \langle \mathbf{n}_f t_f | \mathbf{n}_i t_i \rangle = \int d\mu \phi_{f(n_f)}^* e^{iS} \phi_{i(n_i)}$$

となり、ここでの量子論的有効作用積分は、

$$(3.11) \quad S = \frac{1}{2} \int dt \left(\frac{d\mathbf{n}}{dt} \right)^2 + n \int dt \frac{d\phi}{dt} (1 - \cos\theta) + \int dt \left(\frac{1}{4} - \frac{n^2}{2} \right)$$

である。ただし、時間を実数にもどした。第一項は通常のもので、 $d=0$ の非線形 σ 模型の作用積分である。第三項は定数であるから物理的にはさしたる意味はない。問題は第二項であり、 n は $SO(2)$ の $U(1)$ 表現を取っていることを反映し整数である。この項は量子化の任意性を示しており、 $n=0$ とする必然性はない。

第二項は外積を用いると次のように書き換えることができる。

$$(3.12) \quad \frac{1}{2} n \iint_{S^2} d\theta \wedge d\phi \sin\theta$$

Witten (1983) のやったアナロジー (このアナロジーは我々の立場からすれば問題がない訳でもないが) に従い、配位空間を $SU(2) (\simeq S^3)$ に拡張してみる。

$$(3.13) \quad \frac{n}{\pi} \iiint_{S^3} d\phi \wedge d\theta \wedge d\psi \sin^2\psi \sin\phi$$

$d=1$ の場合には n を整数として、

$$(3.14) \quad \frac{n}{\pi} \iint dx dt \phi(x, t) \sin^2\psi(x, t) \sin\theta(x, t) \varepsilon^{\mu\nu} \partial_\mu \psi(x, t) \partial_\nu \theta(x, t)$$

$$= \frac{n}{24\pi} \iiint d^2 y \varepsilon^{ijk} \text{Tr} (g^{-1} \partial_i g g^{-1} \partial_j g g^{-1} \partial_k g), \quad g \in SU(2)$$

と書け、これは Wess-Zumino-Witten 項と呼ばれ、Ward-Takahashi の恒等式の破れ (Anomalies) を議論する時しばしば登場する。 $d=3$ での Wess-Zumino-Witten 項付きの非線形 σ 模型は

$$(3.15) \quad S = \frac{1}{4} \int d^3 x dt \text{Tr} (\partial_\mu g \partial^\mu g^{-1})$$

$$+ n \frac{1}{60\pi^2} \iiint d^5 y \varepsilon^{ijklm} (g^{-1} \partial_i g g^{-1} \partial_j g g^{-1} \partial_k g g^{-1} \partial_l g g^{-1} \partial_m g)$$

である。

4. 量子化の任意性と Ward-Takahashi の恒等式の破れ

量子化の任意性のため付いた Wess-Zumino-Witten 項と連続の方程式の破れとの関係を、見やすくするため、 $d=2$, $G=SU(2)$ において示しておく。(3.3) で与えたラグランジアンに無限小変換

$$(4.1) \quad g \rightarrow g + \delta g \in SU(2)$$

をほどこす。これに対し作用積分は不変であるから、

$$(4.2) \quad \partial^\mu J_\mu(x, t) = 0, \quad J_\mu(x, t) = g^{-1}(x, t) \partial_\mu g(x, t)$$

という連続の方程式を得る。一方量子論的に扱って得られた量子論的作用積分に対し同様の無限小変換を行うと、連続の方程式は次のように変形される。

$$(4.3) \quad \partial^\mu J_\mu(x, t) = \frac{n}{8\pi} \varepsilon^{\mu\nu} \partial_\mu (g^{-1} \partial_\nu g)$$

これから判るように古典的連続の方程式は量子化の仕方に依っては破れることがあり、Ward-Takahashi の恒等式もそれに伴い成立しなくなる。逆に言えば、Ward-Takahashi の恒等式を成立させる量子化の方法が有るということでもある。この言い方は、理論の繰り込み可能性等とも絡み、場の量子論においては重要なことかも知れない。\$d=0\$ に関しても同様の議論はできるが、一見カレントの再定義により保存するかのように見える。しかしこれは局所的な話で、大局的にはこの再定義はできない。

フェルミオンが理論に入った場合やゲージ理論における Ward-Takahashi の恒等式の破れ、及びこれらの第3章での議論との関係は、参考文献 Itoh and Odaka (1991) を参照されたい。

最後に、第3章でも触れたように、Witten のアナロジーが群論的アプローチを基にした我々の議論においてはたして成立するののかという問題がある。このアナロジーがアナロジーでなく正当化できるのかどうか今のところはっきりしていない。今後調べていかねばならない問題である。

参 考 文 献

- Faddeev, L.D. (1984). Operator anomaly for the Gauss law, *Phys. Lett. B*, **148**, 81-84.
- Isham, C.J. (1984). Topological and global aspects of quantum theory, *Relativity, Groups and Topology II* (eds. B.S. de Witt and R. Stora), 1056-1290, North-Holland, Amsterdam.
- Iso, H. and Odaka, K. (1985). Path integral on the sphere based on vector bundle representation and particle picture of massless fermion (unpublished).
- Itoh, T. and Odaka, K. (1991). A particle-picture approach to anomalies in chiral gauge theories, *Fortschr. Phys.*, **39**, 557-620 (この文献は Anomalies に関する詳細な解説が付いている).
- Odaka, K. (1988). Anomaly-free formulation based on the particle pictures in external fields, *素粒子論研究*, **78**, 10-26.
- Odaka, K. and Itoh, T. (1988). Particle picture in external fields, quantum holonomy, and gauge anomaly, *Lett. Math. Phys.*, **15**, 297-303.
- Witten, E. (1983). Global aspects of current algebra, *Nuclear Phys. B*, **223**, 422-432.

On Breaking of the Ward-Takahashi Identities :
Problem of Quantization on General
Configuration Space

Kazuhiko Odaka

(Department of Mathematics and Physics, National Defence Academy)

We review the breaking of the Ward-Takahashi identities (anomaly). In our approach the origin of this breaking can be regarded as the ambiguity of quantization in the compact configuration space. We would like to stress this point by using some simple models.