統計数理 (1992)
第 40 巻 第 2 号 153-171

ある大学の学科所属方式における学生の申告の安定性について

東京工業大学　宮岸　宏明*・森　　雅夫*

(1992 年 2 月　受付)

1. はじめに

本論文は，ある大学（TK 大）で行われている学科所属について考察している．この大学では，1 年から 2 年に進む時に成績と学生の提出した希望という 2 種類のデータから，学生をいくつかの定員の決まっている学科に所属させている．また希望の申告を学生が行う前に予備調査が行われるので，ある程度は全体の動向を知った上で申告することができる．

いままでにこれに似た問題を扱った例として今野・朱 (1991) がある．これは，学生が所属したいクラスの志望と，その志望のクラスに所属できたときの満足度を申告し，それに基づいて全学生の満足度の総和が最大となるように学生を各クラスに割り当てようとしている．この問題は基本的にはクラスの志望という 1 つの尺度から最適なクラスの編成を図ろうとしている．

ところが，TK 大の学科所属の場合，前述の満足度のようなものが示されておらず，全学生の満足度の総和を最大とする，といった目標が数量的にはっきりと表わされていない．また，TK 大の場合，定員がある幅を持った範囲で示され，どの学科も所属する学生数がその範囲内でなければならないという特別な制約がある．これに対応した方法で学科所属を決めるが，その方法では，一度別の学科に所属が決まった学生を下限不足の学科へ移す，はぎとりと呼ばれる手続きが入り，多少複雑になる．

この場合，問題となる点が大学側，学生側双方に見られる．大学側としては，この学科所属方法はどのような方針をとっているかが不明確であることが問題となっている（小島 (1990)）．一方学生側としては，大学側によって決められた学科所属方法について，どのような申告をすれば自分にもっとも都合のいい結果が得られるかが重要な問題である．

この論文では，この 2 つの問題のうち，学生側の問題について考える．まず，予備調査から学生がお互いに他の学生の本当の志望や成績を知っているという仮定を置く．そのもとで，TK 大の学科所属の方法について，どの学生も納得できるような結果になり，各学生がこのように申告すると予想できる申告を安定な申告として定義し，その特徴を調べている．

2. 問題の設定

学生の集合を $N=\{1, \ldots, i, \ldots, n\}$，学科の集合を $M=\{1, \ldots, k, \ldots, m, m+1\}$ とする．ただし $m+1$ は自ら留年を希望する希望留年を表わすとする．このとき，学生がどのような申告をするかを考えるが，現実の問題をそのまま取り扱うのは複雑すぎるので，いくつかの仮定をおく．た

*工学部：〒152　目黒区大岡山 2-12-1.

だし，特に触れない限り希望留年の申告を認めない場合について考えているとする．

まず学生が得られる情報について次のような仮定を置く．

仮定1． 申告を決定するために必要な全ての情報を，全学生が等しく得ることができる．

このときに集まる情報として次のようなものが考えられる．

・学生数 n, 学科数 m
・学科 k の定員の下限 $a(k)$, 上限 $b(k)$
・配分方法 $F_i(X)$, 成績順位
・学生 i の第 h 番目の真の志望 R_{ih}

配分方法はアルゴリズムの形で，また成績順位については誰が何番ということがわかっているとしている．また，この論文では成績順位は学生につけられた番号と一致させる．つまり，学生 i は成績が全学生中 i 番目の学生を指しているとする．

次に学生が情報をどのように利用して申告を考えていくかについて仮定を置く．

仮定2． 各学生は真の志望を申告するとは限らず，できる限り高い志望の学科に所属できるように申告を行う．

これらの仮定のもとで，学生 i は次のように考える．

(1) 仮定1より全学生の正直な志望を知っているので，どの学生も正直に志望を申告したときの結果を考える．
(2) このとき学生のうち，申告を偽ることでより高い志望学科に入ることが可能な学生は仮定2より申告を変更する（変更する学生は i とは限らない）．
(3) 変更後の全学生の申告をもとに新たな結果を考え，再び(2)のように考える．
(4) 最終的に全ての学生が申告を変更しなくなるまで繰り返す．

ここでどの学生も同じように考えるとすると，最終的に学生が提出した申告の結果は，各学生が(4)で考えた通りの結果となる．つまり最終的に大学に提出される申告は，どの学生についても自分に最も有利な申告を考慮した上で達した結論という意味で全学生が合意しうる申告である．そこでこのような全学生の申告を安定な申告と呼ぶことにする．

成績が i 番目の学生 i の申告する第 j 志望の学科を x_{ij}, 学生 i の申告と全学生の申告をそれぞれ以下のように定める．$\boldsymbol{x}_i=(x_{i1}, \ldots, x_{im})$, $X=(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_i, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$.

また，全学生の申告が X のときに，TK大の配分方法により学生 i が所属する学科を $F_i(X)$ とする．さらに学科所属を行った結果，真の志望 $\boldsymbol{R}_i=(R_{i1}, \ldots, R_{im})$ を持つ学生 i の所属学科が真の志望のうち何番目であるかを求める関数を $G_i(F_i(X), \boldsymbol{R}_i)$ とすると，安定な申告は次のように定義される．

定義． 申告 $X^*=(\boldsymbol{x}_1^*, \ldots, \boldsymbol{x}_i^*, \ldots, \boldsymbol{x}_n^*)$ が次の性質をみたすとき，安定な申告という．

$$\forall i, \quad \forall \boldsymbol{x}_i, \quad G_i(F_i(\boldsymbol{x}_1^*, \ldots, \boldsymbol{x}_i^*, \ldots, \boldsymbol{x}_n^*), \boldsymbol{R}_i) \leq G_i(F_i(\boldsymbol{x}_1^*, \ldots, \boldsymbol{x}_i, \ldots, \boldsymbol{x}_n^*), \boldsymbol{R}_i)$$

3. TK 大の配分方法

これまで，学生がどのような情報を得て，どのような申告をしようと考えているかについてはっきりさせてきた．ここでは安定な申告の求め方を決め，その性質を調べるために，TK 大が行っている配分方法 F がどのようなものかを明確にする．

まず全ての学生の申告が第 m 希望まで書いてあるか，途中で留年を希望することが書いてあるとする．

1. 最初の配分

まず各学生の第 1 希望について成績が 1 番の学生 1 から順に学生 n まで調べ，学生の希望学科が上限の定員に達しない限り，その学生を第 1 希望の学科に所属させる．

次に所属ができなかった学生は，第 2 希望について再び成績順に調べ，上限に達していない学科については希望どおりに所属させる．以下同様に全ての学生の所属が決まるまで続ける．ただしこれは第 m 希望までで終了する．

2. 下限チェック

各学科の所属人数と定員の下限を比較し，下限に達していない人数の合計を求める（これを下限不足数と呼ぶ）．

もし下限不足数が 0 ならば配分終了．

3. はぎとり

第 m 希望について成績が最も悪い学生 n から学生 1 まで順に調べる．このとき学生 i が第 m 希望の学科に所属していて，下限不足数が 0 でないならば，学生 i は所属を取り消される．そして，この学生の所属していた学科が，下限を越えていたならば下限不足数を 1 減らす．ただし留年が決まっている学生は所属取り消しを行わない．

第 m 希望を調べ終わったら，第 $m-1$ 希望，...，第 1 希望について同様のことを下限不足数が 0 になるか，全学生の所属を取り消してしまうまで繰り返す．

4. 再配分

再び第 1 希望について成績が 1 番の学生 1 から順に学生 n まで調べ，所属の決まっていない学生の希望が下限に達していない学科であるなら，その学科に所属させていく．

第 1 希望を終えたら，順に第 2 希望，...，第 m 希望と同様のことを繰り返す．

全員の所属が決まった場合，もし下限不足数が 0 となることではぎとりが終了したのならば再び 2 を行う．そうでないときはこの配分方法を終了する．

この配分方法は必ず終了するのだろうか．下限不足数が減少するのは，下限の条件を満たした学科に所属していた学生をはぎとる場合であり，そのような学生は必ず下限の条件を満たしていない学科に所属させられる．したがってはぎとられた学生が留年と決まらない限り，一回のはぎとりでこの配分方法は終了する．

もし留年となる学生がいる場合，留年の学生を除いて再びはぎとりを行う．すると次第にはぎとりの及ぶ範囲が成績の良い学生にも及ぶ．そして万一はぎとりが成績 1 番の学生に及ぶならば，残っている下限不足は調整の仕様がないので，そのまま終了とした．

例 3.1. TK 大の配分方法の実例：これ以降の例については，学生数 8 人，5 学科，定員の上限 2 人，下限 1 人として考える．表 1〜3 で○は TK 大の配分方法において各学生が所属する学科であり，‘キ’は希望留年を申告していることを示す．

表1. 最初の配分.

		1	2	3	4	5	6	7	8
希	1	ⓐ	ⓑ	ⓒ	ⓒ	ⓐ	c	ⓑ	ⓔ
望	2	c	キ	a	d	d	b	c	b
	3	b		b	b	e	㋖	キ	c
順	4	e		e	キ	b			a
位	5	d		d		c			d

(成績順に並んだ学生)

↓
学科 d が1人下限不足

表2. はぎとり・再配分1回目(学生7をはぎとりストップ).

		1	2	3	4	5	6	7	8
希	1	ⓐ	ⓑ	ⓒ	ⓒ	ⓐ	c	b	ⓔ
望	2	c	キ	a	d	d	b	c	b
	3	b		b	b	e	㋖	㋖	c
順	4	e		e	キ	b			a
位	5	d		d		c			d

↓
学科 d が1人下限不足

表3. はぎとり・再配分2回目(学生5をはぎとりストップ).

		1	2	3	4	5	6	7	8
希	1	ⓐ	ⓑ	ⓒ	ⓒ	a	c	b	ⓔ
望	2	c	キ	a	d	ⓓ	b	c	b
	3	b		b	b	e	㋖	㋖	c
順	4	e		e	キ	b			a
位	5	d		d		c			d

↓
下限不足なし，配分終了

この配分方法は次のような性質を持つ．これらの性質は，この後安定な申告をどのように求めるかを考える際に重要になる．

性質1. 申告 X について，上記の配分方法で $F_i(X)$ よりも学生 i にとって好ましい学科を k_i とすると，学生 i および学科 k_i は次のどちらかの条件をみたす．

1) 学科 k_i は学生 i が k_i に所属できるかどうかを決定する前に上限に達した．
2) 学生 i は少なくとも1回，はぎとりにあった．

希望留年の申告を認めるときも性質1は成り立つ

証明. 1), 2) とも満たしていないとすると，学生 i，学科 k_i は以下の条件を同時に満たす．

・学科 k_i は学生 i が k_i に所属できるかどうかを決定するとき，まだ上限に達していない．
・さらに学生 i は1回もはぎとりにあっていない．

配分方法を見ていくとわかるようにこのような条件を満たしていれば，学生 i は学科 k_i に所属できることになり，仮定に反する．□

補題1. 希望留年の申告を認めない場合，はぎとりは1回の配分実行中に1回しか起こらない(証明は付録に).

性質 1 と補題 1 を利用して次の性質 2 を導く．

性質 2. 希望留年を認めない場合，第 1 希望の学科に所属した学生 i_f と i_f より成績の劣る学生 i について，学生 i がどんなに申告を変更しても学生 i_f の所属結果をかえることができない（証明は付録に）．

さらに性質 2 から TK 大の配分方法について次のような性質をもっている．

性質 3. 希望留年を認めないとき，各学生の真の志望順位 $(\boldsymbol{R}_1, ..., \boldsymbol{R}_n)$ を与えたとき，安定な申告 X^* の所属結果 $F_i(X^*)$ は唯一である．

証明. 希望留年を認めないとき，$(\boldsymbol{R}_1, ..., \boldsymbol{R}_n)$ における安定な申告 X^* に対し，

$$\exists i, \quad F_i(X^*) \neq F_i(\tilde{X}^*) \tag{3.1}$$

となる別の安定な申告 $\tilde{X}^*$ $(\neq X^*)$ が存在しないことを背理法で証明する．

(3.1) をみたす $\tilde{X}^*$ $(\neq X^*)$ が存在すると仮定する．ところが，各学生の真の志望順位は唯一であり，任意の学科 k に対し，下限 $a(k)>0$ という条件もあるため，少なくとも成績が 1 番の学生は X^*, $\tilde{X}^*$ のどちらの申告でも結果として，学科 R_{11} に所属することになる．よって $F_i(X^*)$ と $F_i(\tilde{X}^*)$ は全ての学生について所属結果が異なっているわけではない．

そこで $F_i(X^*)$ と $F_i(\tilde{X}^*)$ で結果が異なる学生のうち，成績が一番高い学生を i_d とする．このときの $\tilde{X}^*$ に対する i_d の所属結果 $F_{i_d}(\tilde{X}^*)$ を求める．

このとき i_d より成績の良い学生は $F_i(X^*)$ でも $F_i(\tilde{X}^*)$ でも結果が同じである．また，性質 2 より i_d より成績の低い学生は配分結果について i_d に影響を与えることができない．

このようなとき，i_d が所属できる一番好ましい学科は，X^* における $F_{i_d}(X^*)$ である．なぜならば，それよりも好ましい学科は i_d より成績の高い学生によって所属できなくなっているからである．したがって $F_{i_d}(\tilde{X}^*)=F_{i_d}(X^*)$ となり，矛盾する．

以上より，仮定をみたす $\tilde{X}^*$ は存在しない．□

この性質は，全学生の真の志望がわかっているとき，対応する安定な申告は唯一ではないが，どの安定な申告によっても配分結果は唯一であることを示している．

4. 安定な申告を求めるアルゴリズム

4.1 希望留年を認めない場合

まず，希望留年の申告を認めないときの安定な申告を求めてみる．そのために，ある学生が申告を変更することによって，より好ましい結果を得ることができる条件（条件 α と呼ぶ）を考える．ここでいくつかの記号を定める．

- $i_w(X)$: 申告 X について TK 大の配分方法を実行した結果，所属学生数が下限を上回る学科の学生のうち，志望順位が最も低いもの（同じ志望順位のときは成績が一番低い学生）
- $j_w(X)$: 学生 $i_w(X)$ の所属した学科の志望順位（ただし申告 $\boldsymbol{x}_i$ 上での志望順位）
- $c(i, j\,;\, k, X)$: 申告 X の配分結果について，所属学科の申告上の希望順位が第 j 希望より高い学生，または所属学科の希望順位が第 j 希望で，成績が学生 i より優る学生の中で，

学科 k に所属している学生数

定義. 以下の (1), (2) のどちらかが成り立つとき，申告 X において学生 i，学科 k が条件 α をみたすという.

(1) 申告 X についてTK大の配分方法を実行した結果，学科 k の所属学生数が下限を上回るとき，$c(i, 1;\ k, X) < b(k)$ かつ $(j_w(X) > 1$ または $i \leq i_w(X))$.
(2) 学科 k の所属学生数が下限ちょうどのとき，$c(i, 1;\ k, X) < a(k)$ または $(j_w(X) > 1$ または $i \leq i_w(X))$.

条件 α は，全学生の申告 X において，学生 i だけ学科 k を第1希望として申告を変更したときに，この学生が学科 k に所属できる条件を示したものである.

性質 4. 申告 X の場合について学生 i を考えるとき，次のことが言える：

$x_{i1} = k$ と申告を変更することで，学生 i は学科 k に所属できる
$\Leftrightarrow$ 申告 X において学生 i，学科 k が条件 α をみたす

(証明は付録に).

性質4をもとに安定な申告を求めるとき，次のアルゴリズム1を利用して求めていけばよい. アルゴリズム1は申告の変更をすることで自分の所属結果を良くすることが出来る学生を見つけ，その度に申告の変更・TK大方式の配分の実行を繰り返し，もうこれ以上変更をする学生がいなくなったときの申告を安定な申告とする考え方である.

[アルゴリズム1]
初期設定. まず全ての学生が真の志望どおりに申告を行うとする.

Step 1. 配分を実行し，各学科の所属学生数，$i_w(X)$, $j_w(X)$ を求める.

Step 2. 所属した学科が真の志望で第1志望ではない学生で，所属している学科より高い真の志望順位の学科が1つでも条件 α を満たしている学生を捜し，そのなかで最も成績のよい学生の申告を変更する.
変更の仕方は条件 α を満たしている学科の中で真の志望順位が最も高いものを第1希望とし，それ以降は変更前の申告の第1希望を第2希望，変更前の申告の第2希望を第3希望，... と変更する.
変更を行った後の全学生の申告を新たな X として Step 1 に戻る.

Step 3. 条件 α を満たしている学生がいなくなったら終了. このときの申告 X が安定な申告 X^* となる.

アルゴリズム1の実行例を表4～7に示す.
このアルゴリズムが正しく安定な申告 X^* を求めることを示す.
アルゴリズム1によって得られた申告を X^* とする. X^* に対し次のような $i, \boldsymbol{x}_i$ を仮定する.

$$\exists i, \quad \exists \boldsymbol{x}_i \quad \text{s.t.} \quad G_i(F_i(\boldsymbol{x}_1^*, \ldots, \boldsymbol{x}_i^*, \ldots, \boldsymbol{x}_n^*)) > G_i(F_i(\boldsymbol{x}_1^*, \ldots, \boldsymbol{x}_i, \ldots, \boldsymbol{x}_n^*))$$

表 4. 最初の配分（$\boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{R}_i$ となる場合を考える）.

		成績順に並んだ学生							
		1	2	3	4	⑤	6	7	8
希	1	ⓐ	ⓑ	ⓒ	ⓒ	c	c	ⓑ	ⓐ
望	2	b	a	b	e	a	ⓓ	a	b
	3	c	e	d	a	b	e	c	c
順	4	d	c	e	d	ⓔ	a	e	d
位	5	e	d	a	b	d	b	d	e

表 5. 申告変更 1 回目（学生 5，学科 a が条件 α をみたす）.

		1	2	3	4	5	6	7	⑧
希	1	ⓐ	ⓑ	ⓒ	ⓒ	ⓐ	c	ⓑ	a
望	2	b	a	b	e	c	ⓓ	a	b
	3	c	e	d	a	b	e	c	c
順	4	d	c	e	d	e	a	e	d
位	5	e	d	a	b	d	b	d	ⓔ

表 6. 申告変更 2 回目（学生 8，学科 d が条件 α をみたす）.

		1	2	3	4	5	⑥	7	8
希	1	ⓐ	ⓑ	ⓒ	ⓒ	ⓐ	c	ⓑ	ⓓ
望	2	b	a	b	e	c	d	a	a
	3	c	e	d	a	b	ⓔ	c	b
順	4	d	c	e	d	e	a	e	c
位	5	e	d	a	b	d	b	d	e

表 7. 申告変更 3 回目（学生 6，学科 d が条件 α をみたす）.

		1	2	3	4	5	6	7	8
希	1	ⓐ	ⓑ	ⓒ	ⓒ	ⓐ	ⓓ	ⓑ	d
望	2	b	a	b	e	c	c	a	a
	3	c	e	d	a	b	e	c	b
順	4	d	c	e	d	e	a	e	c
位	5	e	d	a	b	d	b	d	ⓔ

↓
条件 α をみたすものはないので終了

$k_i=F_i(\boldsymbol{x}_1^*, \dots, \boldsymbol{x}_i^*, \dots, \boldsymbol{x}_n^*)$ とすると，学科 k_i は条件 α をみたさなかったが，$\boldsymbol{x}_i^*$ を $\boldsymbol{x}_i$ と変更することでよりよい結果が得られたことになり，性質 4 と矛盾する.

したがってアルゴリズム 1 によって得られた申告は，安定な申告である. □

ここでアルゴリズム 1 との比較のために，成績のいい学生の志望は常にそれ以下の学生の志望に優先される，という成績優先の考え方に基礎を置いて安定な申告を求めるアルゴリズムを求める.

［アルゴリズム 2］

学生 i の真の志望順位を $\boldsymbol{R}_i=(R_{i1}, \dots, R_{im})$，学科 k に所属の予定される学生数を $d(k)$，下限不足数を $lack$，所属の決まっていない学生数を mi とする.

初期設定. $d(k):=0$ $(1\leq k\leq m)$

$$lack:=\textstyle\sum_k a(k), \qquad mi:=n$$

Step 1. まず成績が 1 番の学生 1 について考える.

(1) $mi>lack$ のとき，第 1 志望の学科から順に上限に達していない学科を捜す．最初にこの条件を満たす学科 k に学生 1 を所属させ，学生の所属数 $d(k)$ が下限に達していないならば，$lack$ を 1 減らす.

(2) $mi\leq lack$ のとき，第 1 志望の学科から順に下限に達していない学科を捜す．最初にこの条件を満たす学科 k に学生 1 を所属させ，$lack$ を 1 減らす.

さらに mi を 1 減らし，$d(k)$ を 1 加える.

このときの学生1の申告は学科kを第1希望とし，それ以降は真の志望において高い順に申告する．

Step 2. 学生1が終わったら学生2，さらに学生3, ... と順に学科を決め，全員の申告が決まったら終了．

まずアルゴリズム2が安定な申告を求めていることを示す．

アルゴリズム2を実行した結果得られた申告をX^*とする．また，X^*のうちiの申告だけを$\boldsymbol{x}'_i$と変更したときの全体の申告をX'とする．学生iにとって，申告X^*に対する所属結果$F_i(X^*)$よりも好ましい学科の1つをk'_iとする．

このときX'の方がiにとって好ましい場合が存在するか考える．

(1) 申告X^*において学生iの所属学科の学生数が下限を越えている場合，つまり$d(F_i(X^*)) > a(F_i(X^*))$のとき：

アルゴリズム2のStep 1 (1) より，i以外の学生がアルゴリズム2のとおりに申告する場合，学生iよりも成績のよい学生$1 \sim i-1$はすべて第1希望の申告に所属が確定し，はぎとりも起こらない（性質2参照）．したがって，学生iの所属を決める時点で，学生iにとってより好ましい学科k'_iはすべてiの所属を決める前に所属者数が上限に達している．

よって学生iがどんなに申告を変更しても，学科k'_iに所属できない．

(2) 申告X^*において学生iの所属学科の学生数が下限ちょうどの場合，つまり$d(F_i(X^*)) = a(F_i(X^*))$のとき：

アルゴリズム2のStep 2 (1), (2) より，申告X^*により所属を決めるとき，学生iの所属を決める時点で，すでに学科k'_iはすべて所属者数が下限を越えている．このうち所属者数が上限に達している学科は(1)のときと同様に考えることができる．

学科k'_iの所属者数が上限に達していないとき，申告X^*において学生iの申告がk'_iになっていないので，学生iの申告を決めるとき，$mi \leq lack$となっていたと考えられる．

したがって，学生iがTK大の配分方法の最初の配分で学科k'_iに所属できるように申告をX'に変更すると，学科k'_iのほうは問題がないが，学科$F_i(X^*)$において一人分下限不足が生じる．しかし，i以外の学生はX^*のときと同じ申告であり，全員第1志望で申告した学科に所属できているので，学生iまでは，はぎとりにあう．したがって学生iは学科k'_iに所属できない．

(1), (2) より，学生iはどんな申告X'をしても，申告X^*に対する所属結果$F_i(X^*)$よりも好ましい学科k'_iに所属できない．したがってアルゴリズム2で求めたX^*は安定な申告となっていることがわかる．□

以上の議論と性質3によってアルゴリズム1とアルゴリズム2は同じ結果を出すことがわかる．つまり，他学生の選好順序が完全にわかっているならば，大学側が現在のような志望を優先した配分方法をとっても，学生側は安定な申告を行う．その結果として，成績順位の高い学生の申告を優先して所属を決める配分方法を行うのと同じことになる．

4.2 希望留年を認める場合

いままで希望留年の申告を認めない場合について，安定な申告と安定な申告を求めるアルゴリズムについて考えてきた．この後は制約を少し緩め，希望留年の申告を認める場合まで話を広げる．そのために，以下の仮定を付け加える．

仮定 3. どんなに不人気の学科であっても，必ず下限の人数以上の学生が，第 1 志望から第 m 志望までのどこかで，この学科への所属を希望している．

仮定 4. 真の選好順序 $\boldsymbol{R}_i$ において希望留年を希望しない学生は，嘘の申告であろうと希望留年を申告することはない．

希望留年の申告を認める場合，下位の学生の希望留年の申告のために志望順位の低い学科に所属させられることがある．これは配分方法の中のはぎとりによって起こるのであるが，このときわざと希望留年の申告をすると，この様な状態を避けられることがある．ただし，このようにするとさらに上位の学生が志望順位の低い学科に所属させられることになるため，希望留年の申告をわざとする学生の数が増加し，学科によっては，学生数が定員の下限を下回る可能性が生じる．これを避けるために仮定 4 を置いた．

こうした状況で希望留年を認めない場合と同じように安定な申告を求める．安定な申告は，希望留年を認める場合も認めない時も同じように定義する．ただし，希望留年を認める場合，性質 3 が成立せず，安定な申告に対する所属結果は複数となる可能性がある．

ここでは，アルゴリズム 2 の改良によって，希望留年の申告を認める場合の安定な申告 X^* を求めるアルゴリズムを考える．

[**アルゴリズム 3**]

初期設定. 希望留年は学科 $m+1$ に所属を希望したとする．学科 k に所属が予定される学生数 $d(k):=0$ $(1\leq k\leq m+1)$，下限不足数 $lack:=\sum_k a(k)$，未所属の学生数 $mi:=n$.

—— 所属が可能な学科のチェック ——

Step 1. まず成績が 1 番の学生 1 について考える．

(1) $mi>lack$ のとき，第 1 志望の学科から順に上限に達していない学科を捜す．最初にこの条件を満たす学科 k_1 が希望留年 $m+1$ でないならば，k_1 に学生 1 を所属させ，さらに学生の所属数 $d(k_1)$ が下限に達していないならば，$lack$ を 1 減らす．

(2) $mi\leq lack$ のとき，第 1 志望の学科から順に下限に達していない学科を捜す．最初にこの条件を満たす学科 k_1 が希望留年 $m+1$ でないならば，k_1 に学生 1 を所属させ，さらに $lack$ を 1 減らす．

所属予定学科が決まった時点で mi を 1 減らし，$d(k_1)$ を 1 加える．

Step 2. 学生 1 が終わったら学生 2，さらに学生 3，... と順に Step 1 と同様の手続きで学科 k_i を決めていく．

—— 所属の取り消し ——

Step 3. 下限不足 $lack$ が 0 ならば，学生の所属が確定するので Step 7 にとぶ．

Step 4. 一番成績の悪い学生 n から始める．この学生の所属予定学科 k_n が希望留年でないならば，所属予定を取り消す．したがって，未所属の学生数 mi を 1 増やし，さらに学生 n が抜けた後の所属予定学生数が下限を下回るならば，下限不足数 $lack$ も 1 増やす．

Step 5. $mi\neq lack$ ならば Step 2 へ戻り，学生 n から再度所属予定学科を決める．

Step 6. 学生 n が終わったら，Step 4, 5 と同様のことを学生 $n-1$ について，さらに学生 $n-2,\ldots$ と順に $mi=lack$ が成り立つまで繰り返す．仮定 3, 4 より学生 1 の処理が終わるまでに

は，この条件が必ず成り立つ．

——学生の申告の決定——

Step 7. 学生1から k_i をもとに成績順に申告を決めていく．学生 i の申告について

(1) k_i が希望留年でないとき：このときの学生 i の申告は学科 k_i を第1希望とし，それ以降は真の志望において高い順に申告する．

(2) k_i が希望留年のとき：希望留年よりも高い志望順位の学科で，所属が予定される学生数 $d(k)$ が上限に達していないものがあるならば，その学科を第1希望とし，あとは真の志望順位で高い順に申告する．すべて上限に達しているならば，真の志望の通りに申告をする．

アルゴリズム3の実行例を表8～11に示す．

このアルゴリズムによる全学生の申告 X^* が安定な申告になることを示す．

アルゴリズム3を実行した結果得られた申告を X^* とする．また，X^* のうち i の申告だけを $\boldsymbol{x}_i$ と変更したときの全体の申告を X' とする．学生 i にとって，申告 X^* に対する所属結果 $F_i(X^*)$ よりも好ましい学科の1つを k'_i とする．

このとき X' の方が i にとって好ましい場合が存在するか考える．

(1) 申告 X^* において学生 i の所属学科の学生数が下限を越えている場合，つまり $d(F_i(X^*))>a(F_i(X^*))$ のとき：

学生 i が学科 $F_i(X^*)$ に所属できる場合は，アルゴリズム3の Step 1 (1) による場合と Step 7 まで希望留年に決まっていて，Step 7 で学科 $F_i(X^*)$ に所属できた場合がある．

表8．最初の配分（$\boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{R}_i$ となる場合を考える）．

		成績順に並んだ学生							
		1	2	3	4	5	6	7	8
希	1	ⓐ	ⓑ	ⓒ	ⓒ	c	c	c	b
望	2	c	キ	a	d	ⓐ	ⓑ	b	c
	3	b		b	b	e	キ	㋖	a
順	4	e		e	キ	b			ⓔ
位	5	d		d		d			d

↓
学科dが1人下限不足

表9．キャンセル1回目（学生6をキャンセルしてストップ）．

		1	2	3	4	5	6	7	8
希	1	ⓐ	ⓑ	ⓒ	ⓒ	c	c	c	b
望	2	c	キ	a	d	ⓐ	b	b	c
	3	b		b	b	e	㋖	㋖	a
順	4	e		e	キ	b			ⓔ
位	5	d		d		d			d

↓
学科dが1人下限不足

表10．キャンセル2回目（学生5をキャンセルしてストップ）．

		1	2	3	4	5	6	7	8
希	1	ⓐ	ⓑ	ⓒ	ⓒ	c	c	c	b
望	2	c	キ	a	d	a	b	b	c
	3	b		b	b	ⓔ	㋖	㋖	a
順	4	e		e	キ	b			ⓔ
位	5	d		d		d			d

↓
下限不足なし

表11．終了処理（学生6は学科bを第1志望とすることで所属できる）．

		1	2	3	4	5	6	7	8
希	1	ⓐ	ⓑ	ⓒ	ⓒ	ⓔ	ⓑ	c	ⓓ
望	2	c	キ	a	d	c	c	b	b
	3	b		b	b	a	キ	㋖	c
順	4	e		e	キ	b			a
位	5	d		d		d			e

↓
アルゴリズム3終了

Step 1 (1) によって学科 $F_i(X^*)$ に所属し，取り消しに会わなかった場合，申告 X^* においてアルゴリズム 3 の Step 1 (1) より学生 i の申告を決めるとき，すでに $d(k'_i)$ は上限に達している．ここで学生 i がどんなに申告を変更しても i 以外の申告は同じであり，x' においても，学生 i より高い成績の学生についてはぎとりは生じないので，変更後も学生 i の所属を決めるとき，学科 k'_i に所属する学生数は，上限に達している．

Step 7 で学科 $F_i(X^*)$ に所属できた場合も Step 1 (1) によって学科 $F_i(X^*)$ に所属できた場合と同様に考えられ，学生 i がどんなに申告を変更しても i 以外の申告は同じなので，変更後も学生 i の申告を決めるとき，学科 k'_i に所属する学生数は，上限に達している．

従って学生 i は学科 k'_i に所属できない．

(2) 申告 X^* において学生 i の所属学科の学生数が下限ちょうどの場合，つまり $d(F_i(X^*))=a(F_i(X^*))$のとき：

学生 i が学科 $R_{iz'_i}$ に所属できる場合は，アルゴリズム 3 の Step 1 による場合と，Step 4 で所属が一度キャンセルになり，Step 1 (2) で学科 $R_{iz'_i}$ に再所属した場合がある．

このときいずれの場合も申告 X^* においてアルゴリズム 3 の Step 1 (1), (2) より学生 i の申告を決めるとき，すでに学科 k'_i はすべて所属者数が下限を越えている．このうち所属者数が上限に達している学科は (1) と同様に考えることができる．

学科 k'_i の所属者数が上限に達していないとき，申告 X^* において学生 i が k'_i に所属できなかったので，学生 i の所属を決めるとき，$mi \leq lack$ となっていたと考えられる．

学生 i が例えば，学科 k'_i を第 1 希望に変更すると，学科 k'_i のほうは問題がないが，学科 $F_i(X^*)$ において一人分下限不足が生じる．しかし，i 以外の学生は X^* のときと同じ申告であり，希望留年が確実な学生を除くと，全員第 1 志望で申告した学科に所属できているので，学生 i までは，はぎとりにあう．したがって学生 i は学科 k'_i に所属できない．

(1), (2) より，学生 i はどんな申告 X' をしても，申告 X^* に対する所属結果 $F_i(X^*)$ よりも好ましい学科 k'_i に所属できない．したがってアルゴリズム 3 で求めた X^* は安定な申告となっていることがわかる．□

5. シミュレーション

4 章の安定な申告を求めるアルゴリズムをもとに，プログラムを作成した．シミュレーションでは，学生数 (n) を 200 人，学科数 (m) を 5 学科，各学科とも定員の上限を 44 人，下限を 36 人とし，学生の真の希望 $\boldsymbol{R}_i$ は学生が学科 k を選択する確率 $p(k)$ に従ってつくった．また，プログラムは安定な申告を 100 回繰り返して求めた時，学生 i が $\boldsymbol{R}_i$ において何番目の志望学科に所属できると期待できるかについて調べた．

まず，人気学科が 1 つだけ存在するときとか不人気学科が 1 つだけ存在するときといった，学科間の人気度のパターンをあたえてみて，安定な申告を行なった時の期待値と成績順位の関係をグラフで描いたところ，それぞれ異なる特徴をもったグラフとなった．図 1 のパターン 1 は人気のある学科が 1 学科ある場合，パターン 2 は不人気学科が 1 学科ある場合である．

例えば，パターン 2 のように相対的に人気のない学科が 1 つある場合，大部分の学生がこの学科に対してもっている志望順位は低いものと推測できるので，他の人気のある学科に所属できなかった成績の低い学生が人気のない学科に集中する．したがって，グラフではある程度以下の成績の学生から所属学科の期待値は，急激に増大する．

また，人気が特にある学科，人気のある学科，不人気学科に分けられるときは，人気学科・

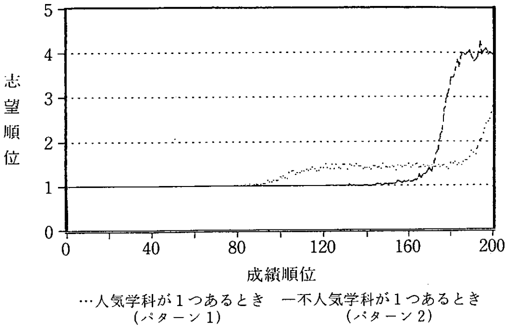

図1. 所属学科の志望順位.

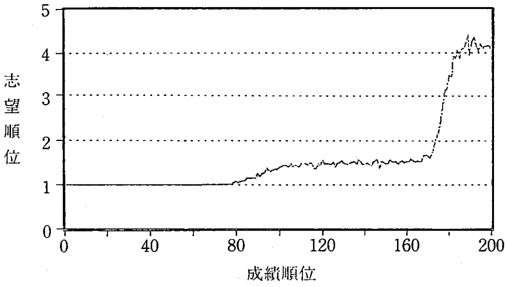

図2. 所属学科の志望順位. 人気学科と不人気学科が1つずつあるとき.

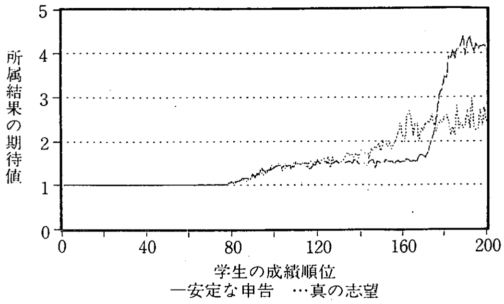

図3. 安定な申告と真の志望の比較. 所属結果の期待値と成績.

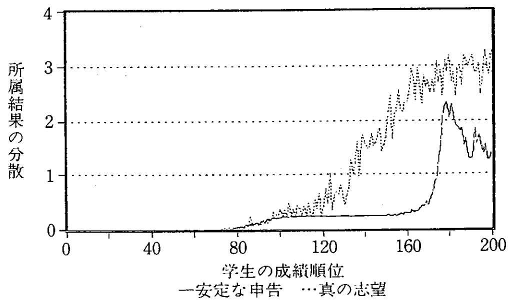

図4. 安定な申告と真の志望の比較. 所属結果の分散と成績.

不人気学科と二分されたパターンを2つ重ね合わせたものとして表現できることがわかった(図2).

次に各学生が安定な申告をしているときと,全学生が本当の志望をそのまま申告するときで,所属する学科の志望順位の期待値にどんな違いが生じるのかを調べてみた.

安定な申告と本当の志望をそのまま表現するときの結果の差異について調べると,人気が人気学科・不人気学科と二分されたパターンの場合は期待値にそれほど差が出なかった.しかし,人気が特にある学科・人気のある学科・不人気学科に分けられるときは,期待値に差が大きく出て,安定な申告を申告するときは,ある程度以下の成績の学生は希望した学科に入りにくくなっている(図3).また期待値に対する分散をとったところ,一般に安定な申告の方が分散が小さく,比較的確実に期待される志望順位の学科に入れることがわかった(図4).

これらのことから,安定な申告をすると,各学科への人気度のパターンと成績によってどのくらいの志望の学科へ所属できるかが予想できる.このとき成績の良い学生ほど志望順位の高い学科に入りやすくなっていて,優先される.

6. 結　　論

この論文では,他学生の真の選好順序を互いに知っているという条件の下で,安定な申告を定義し,各学生の真の選好順序からそのような申告をどうやって求めて行くのか,ということ

を考えた．この安定な申告をしている限り，どの学生も自分の申告を別なものに変更する動機がなくなる．そして，希望留年を認めない場合と認める場合について各学生の真の選好順序 $\boldsymbol{R}_i$ に対して安定な申告を求めるアルゴリズムを考えることによって，安定な申告が存在しうることを示した．

特に，希望留年の申告を認めない場合について，2つの考え方から安定な申告を求めるアルゴリズムを考えた．1つは申告の変更をすることで自分の所属結果を良くすることが出来る学生を見つけ，その度に申告の変更・TK 大方式の配分の実行を繰り返し，もうこれ以上変更をする学生がいなくなったときの申告を安定な申告とする考え方である（アルゴリズム 1)．もう 1 つは安定な申告の配分結果が成績優先の配分結果に近いことをもとにした考え方である（アルゴリズム 2)．

そして，2つのアルゴリズムにより求められた申告の配分結果は，全く同じものとなることを性質 3 より示した．

さらに，安定な申告を求めるアルゴリズムをもとにシミュレーションを行い，安定な申告において所属を決定した結果，学生が所属する学科はその学生が何番目に志望していた学科であったのかという点についても考察を加えた．このことより希望留年の申告が認められるときも認められないときも結局，自分の所属した学科に対する志望順位 z_i の期待値が，各学科に対する人気度と自分の成績順位によって決められることが分かった．

しかし，これらの結論は，他学生の真の選好順序を互いに知っているというかなり現実離れした仮定の下で成り立っている．実際は，他人の真の選好順序を知ることは非常に難しく，ほとんど不可能であるし，全員が同じだけの情報を得ているということも疑わしい．知っているのは，せいぜいどこの学科に何人の学生が所属を希望しているか，というアンケート結果と友人など，ごく一部の学生の志望ぐらいであろう．この様な状況で安定な申告が存在するのか．また存在するならば，どのようにしてそういう申告を求めて行くのか．この様なことが今後の課題となろう．

付録：補題 1～3，性質 2，4 の証明

A. 補題 1 の証明

希望留年の申告を認めていないので，任意の学生 i について，所属が絶対に不可能な学科が存在しない．すなわちどの学科にでも所属する可能性がある．

さらに配分方法によると最初の配分を行った後に生じた下限不足に対してはぎとりは

（下限不足数)＝(はぎとった学生のうち，下限を越えた学科に所属していた学生数）

となるように実行し，再配分の過程では，各学科とも下限までしか配分できないようになっている．

従ってこの 1 回目のはぎとりで下限不足はなくなり，配分が終了する．　□

B. 性質 2 の証明

学生 i が申告を変更する前の全学生の申告を X^0，変更後の申告を X^i とする．このとき性質 2 は次のように表現できる：

「希望留年を認めない場合，学生 i と i より成績のよい学生 i_f について，申告が X^0 のとき学

生 i_f が第1希望の学科に所属するならば，申告 X^i においても i_f は第1希望の学科に所属できる」．

学生 i_f が申告 X^0 において第1希望の学科に所属しているとする．申告 X^0 において i_f は第1志望の申告をした学科 x_{i_f1} に所属できた．このような結果が得られるための条件を性質1より求めると，次の2つの条件を同時に満たさなければならない．

- 申告 X^0 における最初の配分において，学生 i_f の所属を決めるとき，学科 x_{i_f1} はまだ上限に達していない．
- 配分方法のはぎとりの部分より，最初の配分の後，はぎとりにあわなかったか，はぎとりにあったが，その後再所属できた．

上の条件が X^i においても成り立つことを証明する．

前者について，X^i は $i_f<i$ となる学生 i が申告を変更するだけなので，学生 $1 \sim i_f$ までの第1志望の申告は X^0 と同じである．

したがって申告 X^i の最初の配分において，学生 i_f の所属を決めるとき，学科 x_{i_f1} はまだ上限に達していないので，学科 x_{i_f1} に一旦所属できる．

後者について2つの場合に分けて考える．

(1) X^0 において学生 i_f がはぎとりにあっていない $\Rightarrow X^i$ において学生 i_f がはぎとりにあっていない

ここで1回の配分で行われるはぎとりの回数が2回以上だと毎回下限不足の人数が異なり，問題が複雑になる．しかし，希望留年の申告を認めない場合は，補題1よりはぎとりが1回しか起こらないことが示されているので，最初の配分後と1回目のはぎとり後（つまり最終的な所属）で学生の所属がどう変化しているかを調べてやればよい．

まずこの証明で用いる記号を定義する．

- $lack(0)$: 申告 X^0 を配分したとき，配分方法の最初の配分を終了後に生じた下限不足数
- $lack(i)$: 申告 X^i を配分したとき，配分方法の最初の配分を終了後に生じた下限不足数
- $u(i, X)$: 申告 X において学生 i よりも後で決まった学生のうち，最初の配分で下限を越える学科に一旦所属していた学生の数

次に，はぎとりにあっていないことを示す条件を考える．はぎとりは下限以上の学科に一旦所属していた学生を見つけるたびに，下限不足の人数 $lack$ を減らしていき，最終的には $lack$ が0になるまで，学生の所属を取り消していく処理である．

したがって，一般に学生 i が申告 X ではぎとられないためには，$u(i, X)>lack$ とならなければならない．

すると，学生 i_f が申告 X^0 ではぎとられていないので，

$$u(i_f, X^0)>lack(0)$$

となるはずである．

さらに学生 i_f が申告 X^i ではぎとられないためには，学生 i がどんなに変更しても

$$u(i_f, X^i)>lack(i)$$

とならなければならない．

そこで，申告の変更による下限不足数 $lack$ と $u(i_f, X)$ の変化について考えると，学生 i は学生 i_f より成績が劣るので，定義から $lack(i)-lack(0)$ と $u(i_f, X^i)-u(i_f, X^0)$ は，同じ値

となる．したがって

$$lack(i)-lack(0)=u(i_f,\ X^i)-u(i_f,\ X^0)$$

が成り立つ．

以上のことから，$u(i_f,\ X^0)>lack(0)$ が成り立っているならば $u(i_f,\ X^i)>lack(i)$ が成り立つ．

したがって，X^0 において学生 i_f がはぎとりにあっていないならば，X^i においても学生 i_f がはぎとりにあっていないといえる．

(2)　X^0 において学生 i_f がはぎとりにあったが，再び学科 x_{i_f1} に所属できた $\Rightarrow X^i$ において学生 i_f がたとえはぎとりにあっても学科 x_{i_f1} に所属できる

X^0 においてはぎとりにあったが，再び学科 x_{i_f1} に所属できるためには，配分方法の再配分より，申告 X^0 について，最初の配分で学生 i_f の所属を決めるとき，学科 x_{i_f1} は下限に達していないことが条件である．

このとき申告 X^i についても $i_f<i$ であるので，学生1～学生 i_f までの第1志望の申告は X^0 と同じであり，最初の配分で学生 i_f の所属を決めるとき，学科 x_{i_f1} は下限に達していない．学科 x_{i_f1} は下限までは学生を所属させるので，上の式が成り立っていれば，たとえはぎとりにあっても学生 i_f は再所属できる．

(1)，(2) より学生 i が申告を変更しても学生 i_f は変更前と同じ結果を得られる．　□

C.　性質4の証明

C.1　補題2，3の証明

申告 X の配分結果について，所属学科の申告上の希望順位が学生 i の所属学科の申告 $\boldsymbol{x}_i$ における希望順位より低い学生，または所属学科の希望順位が学生 i と同じで，成績が学生 i より劣る学生を学生 i より後で所属が決まる学生，そのほかの学生を学生 i より前に所属が決まる学生という．申告 X の配分結果について，学生 i より後で所属が決まる学生の数を $s(i,\ X)$，申告 X の配分結果について，学生 i より後で所属が決まる学生の所属を取り消したときに生じる下限不足数を $l(i,\ X)$ とする．

性質4を証明するために以下の補題を証明する．

補題2.　任意の申告 X における配分結果に対し，次のことが成り立つ．希望留年の申告を認めないとき，申告 X において，学生 $i_w(X)$ と $i_w(X)$ より後に所属が決まる学生 i について

$$s(i,\ X)=l(i,\ X).$$

証明.　配分結果について決定した学科の志望順位（申告上で）の低い方から，さらに同じ志望順位のときは成績の低い方の学生から順に調べていく．

このとき最初にあたる学生 i_{last} のときは明らかに右辺左辺とも0である．

次にあたる学生について考えると，左辺は1になる．右辺については希望留年の申告を認めていないので，学生 $i_w(X)$ より後で所属が決まる学生はすべて下限ちょうどの学科に所属している．そのため，i_{last} の所属が決まっていないとしたら下限不足は1となる．

以下同様に $i_w(X)$ までは両辺とも1ずつ増えていくと考えられるので，上の式が成り立っている．　□

さらに上の補題2を拡張していく．$i_w(X)$ の直前で所属が決まった学生 $i_{\bar{w}}$ について考えると，学生 $i_w(X)$ は下限を越えた学科に所属しているので，$i_w(X)$ の所属が決まっていなかったとしても下限不足は増えず，右辺は変化しない．しかし左辺は一人増えるので，次のようになる．

$$s(i_{\bar{w}},\ X)>l(i_{\bar{w}},\ X)$$

このあと $i_{\bar{w}}$ の直前に所属が決まった学生，その前の学生,... と一人ずつさかのぼる過程において左辺は常に一人ずつ増えるが，右辺は $n(k,X)>a(k)$ をみたす学科 k に所属している限り増加しないので，不等号は変わらない．

以上のことから次のことがいえる．

補題 3. 希望留年の申告を認めないとき，任意の申告 X における配分結果に対し，次のことが成り立つ．申告 X において，学生 $i_w(X)$ と $i_w(X)$ より前に所属が決まる学生 i について

$$s(i,\ X)>l(i,\ X).$$

C.2 性質4の証明

申告 X の場合について学生 i を考えるとき，次のことが言える．

$x_{i1}=k$ と申告を変更することで，学生 i は学科 k に所属できる
⇔ 申告 X において学生 i，学科 k が条件 α をみたす

証明. ⇒ について：対偶である，

申告 X において学生 i，学科 k が条件 α をみたさない
⇒$x_{i1}=k$ と申告を変更しても，学生 i は学科 k に所属できない

を証明する．

学生 i が $x_{i1}=k$ と変更する前の全学生の申告を X^0, 変更後の全学生の申告を X^i とする．また申告 X の所属結果について，学科 k に所属する学生の数を $d(k,\ X)$ とする．

学生 i，学科 k が条件 α をみたさないということは，申告 X^0 において学生 i，学科 k が次の条件 (1), (2) のどちらかをみたしているといえる．

(1) $d(k,\ X^0)>a(k)$ のとき $c(i,1;\ k,\ X^0)\geq b(k)$ または $(j_w(X^0)=1$ かつ $i>i_w(X^0))$
(2) $d(k,\ X^0)=a(k)$ のとき $c(i,1;\ k,\ X^0)\geq a(k)$ かつ $(j_w(X^0)=1$ かつ $i>i_w(X^0))$

(1) $d(k,X^0)>a(k)$ のとき：$c(i,1;\ k,X^0)\geq b(k)$ をみたすとすると，$x_{i1}=k$ と申告を変更し，申告 X^i として配分を実行してもやはり，$c(i,1;\ k,\ X^i)\geq b(k)$ であるので，配分方法の最初の配分によって学科 k に所属できない．

次に $(j_w(X^0)=1$ かつ $i>i_w(X^0))$ をみたす場合を考える．この条件をみたすならば学生 i は学生 $i_w(X^0)$ よりも後で所属が決まったことになる．また，申告 X^0 について補題2より，$i_w(X^0)$ について

$$s(i_w(X^0),\ X^0)=l(i_w(X^0),\ X^0) \tag{A.1}$$

が成り立つ．

このような状況で $c(i,1;\ k,X^0)<b(k)$ のときに学生 i が $x_{i1}=k$ と申告を変更し，申告 X^i

として配分を実行すると，配分方法の最初の配分より一度は学科 k に所属できる．

ここで申告の変更は学生 i のみが行うため，性質2より，X^0 において学生 $i_w(X^0)$ およびこの学生以前に所属が決まっていた学生にとって X^i の配分結果も変わりがない．

よって (A.1) より

$$s(i_w(X^0),\ X^i)=l(i_w(X^0),\ X^i)$$

が成り立つ．

また，学生 $i_w(X^0)$ にとって申告 X^i の配分結果は申告 X^0 のときと変わりがないので，$(j_w(X^i)=1$ かつ $i>i_w(X^i))$ をみたす．つまり申告 X^i においても，学生 i は学生 $i_w(X^0)$ よりも後で所属が決まったことになる．

しかし，学生 i が X^i において $d(k,X^i)>a(k)$ となる学科 k に所属していると仮定すると，補題3より i の1つ前に所属が決まった学生について

$$s(i,\ X^i)+1>l(i,\ X^i)$$

とならなければならない．

よって学生 i より前に所属が決まる学生 $i_w(X^0)$ について，(右辺)>(左辺) となり，(右辺)=(左辺) と導いた結果と矛盾する．よって学科 k に所属できない．

(2) $d(k,X^0)=a(k)$ のとき：まず $c(i,1;\ k,X^0)\geq a(k)$ であることから，学生 i が学科 k に所属すると学科 k は下限をこえた学科となることがわかる．

さらに $(j_w(X^0)=1$ または $i>i_w(X^0))$ という条件もみたすのであるから，この場合は (1) における

$$(j_w(X^0)=1 \text{ または } i>i_w(X^0)) \text{ かつ } c(i,\ 1;\ k,\ X^0)<b(k)$$

の場合とまったく同じになる．したがって (1) と同様に学生 i は学科 k に所属できない．

(1), (2) をまとめることで学生 i がいくら申告を変更しても学科 k に所属できないことがわかる．

$\Leftarrow$ について：

(1) $d(k,X^0)>a(k)$ のとき：申告 X^0 において，学生 i，学科 k が条件 α をみたしているので，

$$c(i,\ 1;\ k,\ X^0)<b(k) \text{ かつ } (j_w(X^0)>1 \text{ または } i\leq i_w(X^0))$$

をみたしている．

申告 X^i について考えると，学生1～$(i-1)$ までの申告は変更されていないので，

$$c(i,\ 1;\ k,\ X^i)<b(k)$$

が成り立ち，配分方法の最初の配分により第1志望に申告を変更した学科 k に一旦所属できる．このとき学科 k に一旦所属できる学生数を考えると，X^0 で上限ぎりぎりまで学生が所属していたときは，学生 i が新たに加わる分，一人所属できなくなるが，そのほかの場合は学生 i の一人分が増えるだけである．このため X^i においても

$$a(k)<d(k,\ X^i)\leq b(k)$$

となる．したがって学生 i がはぎとりにあうと，学科 k に所属できなくなる．

そこで，学生 i が条件 $(j_w(X^0)>1$ または $i\leq i_w(X^0))$ をみたすことで，申告 X^i においてはぎとりにあわないことを示す．

申告 X^0 で学生 i が所属していた学科を y_i^0 とする．また申告 X^0 において第1志望の申告を

した学科に所属が決まった学生で，学生 i より成績順位が上位の学生のうち，最も学生 i と成績順位が近い学生を i_f^- とする．

まず，条件 $(j_w(X^0)>1$ または $i\le i_w(X^0))$ を学生 i がみたしていることと学生 i_f^- は学生 i よりも成績が上位に位置していることから，学生 i_f^- は申告 X^0 において学生 $i_w(X^0)$ より前に所属が決まり，補題3より，

$$s(i_f^-, X^0)>l(i_f^-, X^0)$$

が成り立つ．

ここで性質2より申告 X^i においても学生 i_f^- 及び i_f^- より前に所属が決まる学生の所属学科は X^0 のときと変わらないので，

$$s(i_f^-, X^i)>l(i_f^-, X^i)$$

が成り立つ．

そこに学生 i が下限をこえた学科 k に所属すると，学生 i は学生 i_f^- の直後に所属が決まるので，

$$s(i, X^i)=s(i_f^-, X^i)-1$$
$$l(i, X^i)=l(i_f^-, X^i)$$

であり，$s(i, X^i)\ge l(i, X^i)$ となる．

$s(i, X^i)>l(i, X^i)$ のときは補題3より，申告 X^i において学生 i は，はぎとりにあわないことがわかる．また $s(i, X^i)=l(i, X^i)$ のときは i_f^- まで $s(i_f^-, X^i)>l(i_f^-, X^i)$ であったことと，補題2より，学生 i はちょうど学生 $i_w(X^i)$ を指している．したがって，申告 X^i において学生 i ははぎとりにあわず，学科 k に所属できる．

(2) $d(k, X^0)=a(k)$ のとき：申告 X^0 において学生 i，学科 k が条件 α をみたしているので，

$$c(i, 1;\ k, X^0)<a(k) \text{ または } (j_w(X^0)>1 \text{ または } i\le i_w(X^0))$$

が成り立つ．

(α)　$c(i, 1;\ k, X^0)<a(k)$ をみたすとき：申告 X^i について考えたとき，学生 i 以外の申告は変更されていないので，$c(i, 1;\ k, X^i)<a(k)$ をみたし，配分方法の最初の配分により学科 k に一旦所属する．したがって，その後はぎとりにあわなければ，学生 i は学科 k に所属することが確定する．

また，はぎとりにあった場合も $c(i, 1;\ k, X^i)<a(k)$ であることから，再配分より学生 i は学科 k に再所属できる．

(β)　$(j_w(X^0)>1$ または $i\le i_w(X^0))$ のとき：明らかに $c(i, 1;\ k, X^0)<b(k)$ をみたすので，(1) と同じように考えることができる．

以上 (1), (2) より，申告 X^0 において学生 i，学科 k が条件 α をみたすとき，学生 i は $x_{i1}=k$ と申告することで，学科 k に所属できる．　□

参考文献

小島政和 (1990)．学科所属問題に関して (私信)．
今野　浩，朱　喆 (1991)．最適クラス編成問題 —— 東京工業大学におけるケーススタディ，オペレーションズ・リサーチ，**36**, 85-89.

An Equilibrium Strategy for Each Student to Enter a Certain Department in a University

Hiroaki Miyagishi and Masao Mori
(Faculty of Engineering, Tokyo Institute of Technology)

In a certain university, first year students do not belong to any department. But starting with their second year they must enter some department. In each department there is a quota as to the number of second year students who may enter the department, and in determining which students can enter which department, two kinds of data are considered, namely (1) the student's class rank and (2) the student's declared preference which is conveyed to the university administration through a document which we shall call the "Declaration of Preferences". Remember that students with higher ranks have, in effect, priority in choosing the department that they will enter.

If we assume that the rank and true preference of each student are known by all the other students, then according to their ranks and preferences, each student should be able to produce a strategy for making their declaration.

In this case, there exists an equilibrium strategy. We show the existence of an equilibrium strategy through an algorithm that maps student's preferences to an optimal declaration strategy.

In addition, we code the algorithm that determines an equilibrium strategy for given students' ranks and randomly generated "true preference" of the students. Using the program, we perform a simulation to determine the relationship between each student's class rank and the expected rank, in terms of his true preference, of the department he will eventually enter.

Key words: Game theory, algorithmic approach to equilibrium strategy, administration for department selection.