

ある種の非線形積分方程式とその応用*

—— スピングラスの有効場分布と自由エネルギー ——

東京電機大学 桂 重俊**、*** · 清野 光弘**

(1992 年 9 月 受付)

1. はじめに

Cayley tree (Bethe lattice) 上の $\pm J$ ランダム Ising 模型を考える. Bethe 格子とは, 各格子点の最近接格子点の数が z で 1 点からもとに戻るループが存在せず, 端は存在しない (無限に大きい) 格子である. 最近接格子点の数が z である通常の格子上の Ising モデルを Bethe 近似により扱った結果が Bethe 格子上の Ising モデルを正確に扱うことにより得られるので, Bethe 格子上の統計力学に興味もたれている¹⁾.

サイト i におけるスピン変数を σ_i (σ_i は上向きスピンのとき +1, 下向きスピンのとき -1) とする. 外部磁場 H がかかっているときのハミルトニアンは

$$(1.1) \quad \mathcal{H} = - \sum_{\langle ij \rangle} J_{ij} \sigma_i \sigma_j - H \sum_i \sigma_i$$

で与えられる. ここに $\sum_{\langle ij \rangle}$ はスピン i とスピン j とがとなりあっているような対に関する和である. \sum_i は全てのスピンについての和である. J_{ij} はスピン j と i との間の交換エネルギーであり, その分布

$$(1.2) \quad P(J_{ij}) = p \delta(J_{ij} - J_0) + (1-p) \delta(J_{ij} + J_0)$$

が与えられているとする ($p, 1-p$ はそれぞれ強磁性ボンド, 反強磁性ボンドの濃度を示す).

図 1 のような Bethe 格子において最近接格子点の数が 3 の場合の系について考える. いま, 図 1 のように格子点にラベル 1, 2, 3, 4, 5, 6 をつけておく. 格子点 1 に働く外部の効果の効果を格子点 2, 3, 4 を通して来るものに分け, これを h_{12}, h_{13}, h_{14} (一般に i に働く j からの有効場を h_{ij} とする) とすると, 格子点 1 の 1 体密度行列は

$$(1.3) \quad \rho^{(1)}(\sigma_1) = \exp[\beta(h_{12} + h_{13} + h_{14} + H)\sigma_1]$$

で与えられる. ここに $\beta = 1/k_B T$, k_B は Boltzmann の定数, T は絶対温度である. また対 12 を考え, 1 の最近接格子点 3, 4 および 2 の最近接格子点 5, 6 から有効場が働くとき, 対 12 の 2 体密度行列は

$$(1.4) \quad \rho^{(2)}(\sigma_1, \sigma_2) = \exp[\beta\{(h_{13} + h_{14} + H)\sigma_1 + (h_{25} + h_{26} + H)\sigma_2 + J_{12}\sigma_1\sigma_2\}]$$

¹⁾ スピングラスは無限長距離相互作用をもつランダム Ising モデルとして Sherrington and Kirkpatrick (1975) により論じられたが, Matsubara and Sakata (1976) はこれと独立に短距離相互作用をもつランダム Ising モデルとして Bethe 近似を用いてスピングラス相の存在を示し, 転移温度を求めた.

* 本稿は, 統計数理研究所 共同研究 (3-共会-4) における発表に基づくものである.

** 理工学部 情報科学科: 〒 350-03 埼玉県比企郡鳩山町石坂.

*** 現 東北文化学園東北工科情報専門学校: 〒 981 仙台市青葉区国見 6-45-16.

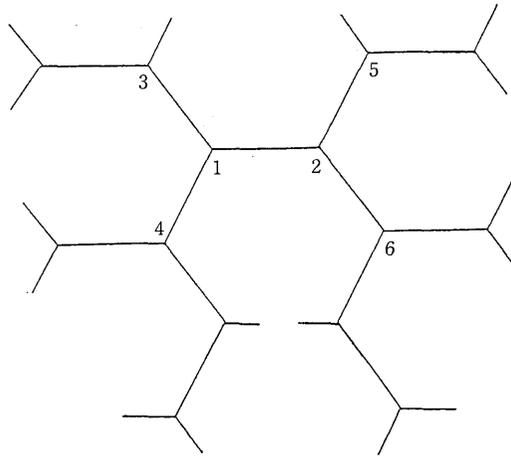


図1. Bethe 格子.

で与えられる. $\rho^{(1)}(\sigma_1)$ よりもとめた σ_1 の熱平均値は

$$(1.5) \quad \langle \sigma_1 \rangle = \frac{\text{tr}_{\sigma_1} \sigma_1 \rho^{(1)}(\sigma_1)}{\text{tr} \rho^{(1)}(\sigma_1)}$$

$$(1.5') \quad = \text{th} \beta(h_{12} + h_{13} + h_{14} + H)$$

$\rho^{(2)}(\sigma_1, \sigma_2)$ より求めた σ_1 の熱平均値は

$$(1.6) \quad \langle \sigma_1 \rangle = \frac{\text{tr}_{\sigma_1 \sigma_2} \sigma_1 \rho^{(2)}(\sigma_1, \sigma_2)}{\text{tr}_{\sigma_1 \sigma_2} \rho^{(2)}(\sigma_1, \sigma_2)}$$

である. (1.5) と (1.6) が等しくなければならないという要請は密度行列の可縮性

$$(1.7) \quad \hat{\rho}^{(1)}(\sigma_1) = \text{tr}_{\sigma_2} \hat{\rho}^{(2)}(\sigma_1, \sigma_2)$$

($\hat{\rho}$ は規格化を示す) を導く. (1.3), (1.4) より,

$$(1.8) \quad \rho^{(1)}(\sigma_1) = \text{ch} \beta(h_{12} + h_{13} + h_{14} + H) [1 + \text{th} \beta(h_{12} + h_{13} + h_{14} + H) \sigma_1]$$

$$(1.9) \quad \begin{aligned} \text{tr}_{\sigma_2} \rho^{(2)}(\sigma_1, \sigma_2) &= \exp[\beta(h_{13} + h_{14} + H) \sigma_1] 2 \text{ch}[\beta(h_{25} + h_{26} + H + J_{12}) \sigma_1] \\ &= 2 \{ \text{ch} \beta(h_{13} + h_{14} + H) \text{ch} \beta(h_{25} + h_{26} + H) \\ &\quad \times \text{ch} \beta J_{12} + \text{sh} \beta(h_{13} + h_{14} + H) \text{sh} \beta(h_{25} + h_{26} + H) \text{sh} \beta J_{12} \} \\ &\quad \times \left\{ 1 + \sigma_1 \frac{\text{th} \beta(h_{13} + h_{14} + H) + \text{th} \beta(h_{25} + h_{26} + H) \text{th} \beta J_{12}}{1 + \text{th} \beta(h_{13} + h_{14} + H) \text{th} \beta(h_{25} + h_{26} + H) \text{th} \beta J_{12}} \right\} \end{aligned}$$

が得られる.

(1.8) と (1.9) を等しいとおくと有効場間の漸化式

$$(1.10) \quad h_{12} = \frac{1}{\beta} \text{th}^{-1} [\text{th} \beta J_{12} \text{th} \beta(h_{25} + h_{26} + H)]$$

が導かれる.

ランダム系では有効場 h_{25}, h_{26} の分布により h_{12} が (1.10) 式を満たすように定まるから, h_{12} の分布関数を $g_{12}(h_{12})$ とすると (以後, \int は $\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}$ を意味する)

$$(1.11) \quad g_{12}(h_{12}) = \int \delta \left(h_{12} - \frac{1}{\beta} \operatorname{th}^{-1} [\operatorname{th} \beta J_{12} \operatorname{th} \beta (h_{25} + h_{26} + H)] \right) \\ \times P(J_{12}) dJ_{12} g_{25}(h_{25}) g_{26}(h_{26}) dh_{25} dh_{26}$$

となる。

有効場の分布関数が格子点によらないとすると、 J, g の添字が除かれて $g(h)$ のみたす非線形積分方程式

$$(1.12) \quad g(h) = \int \delta \left(h - \frac{1}{\beta} \operatorname{th}^{-1} [\operatorname{th} \beta J \operatorname{th} \beta (h' + h'' + H)] \right) P(J) g(h') g(h'') dJ dh' dh''$$

が導かれる。

格子点 1 にかかる外からの有効場と外場の和を $H_1^{(1)}$ 、対 12 における格子点 1 に対 12 の外からかかる有効場と外場の和を $H_{1-12}^{(2)}$ とすると

$$(1.13) \quad H_1^{(1)} = h_{12} + h_{13} + h_{14} + H,$$

$$(1.14) \quad H_{1-12}^{(2)} = h_{13} + h_{14} + H, \quad H_{2-12}^{(2)} = h_{25} + h_{26} + H.$$

$H_{1-12}^{(2)} = H_1^{(2)}$, $H_{2-12}^{(2)} = H_2^{(2)}$ と略記すると (1.5'), (1.10) より z が一般の場合

$$(1.15) \quad H_i^{(2)} = H + \frac{1}{\beta} \sum_{j=1}^{z-1} \operatorname{th}^{-1} (\operatorname{th} \beta J_{ij} \operatorname{th} \beta H_j^{(2)})$$

$$(1.16) \quad \langle \sigma_i \rangle = \operatorname{th} \beta H_i^{(1)} = \operatorname{th} [\beta H_i^{(2)} + \operatorname{th}^{-1} (\operatorname{th} \beta J_{ij} \operatorname{th} \beta H_j^{(2)})]$$

が得られる。(1.12) の積分方程式は $G^{(2)}(H^{(2)})$ を $H^{(2)}$ の分布関数として

$$(1.17) \quad G^{(2)}(H^{(2)}) = \int \delta \left(H^{(2)} - H - \frac{1}{\beta} \sum_{k(\neq j)} \operatorname{th}^{-1} (\operatorname{th} \beta J_{ik} \operatorname{th} \beta H_k^{(2)}) \right) \\ \times \prod_{k(\neq j)} [G^{(2)}(H_k^{(2)}) dH_k^{(2)} P(J_{ik}) dJ_{ik}]$$

となる。

最近接格子点の数が一般に z であるとき、

$$(1.18) \quad g(h) = \frac{1}{2\pi} \int e^{ixh} S(x) dx$$

により $g(h)$ の Fourier 変換を $S(x)$ とすると (1.11) を Fourier 変換することにより $S(x)$ に関する積分方程式

$$(1.19) \quad S(x) = \frac{1}{2\pi} \int K(x, y) [S(y)]^{z-1} dy$$

が導かれる。積分核は

$$(1.20) \quad K(x, y) = \int K^*(x, y, J) P(J) dJ$$

$$(1.21) \quad K^*(x, y, J) = \int \exp \left[iy(u - H) - i \frac{x}{\beta} \operatorname{th}^{-1} (\operatorname{th} \beta J \operatorname{th} \beta u) \right] du$$

である。ここに $u = H^{(2)}$ である。また、

$$(1.22) \quad G^{(1)}(H_i^{(1)}) = \frac{1}{2\pi} \int e^{ix(H_i^{(1)} - H)} [S(x)]^z dx$$

$$(1.23) \quad G^{(2)}(H_i^{(2)}) = \frac{1}{2\pi} \int e^{ix(H_i^{(2)} - H)} [S(x)]^{z-1} dx$$

である。以後、これらの等価である積分方程式 (1.12), (1.17), (1.19) をスピングラス積分方程式とよぶ (Katsura and Fujiki (1979), Morita (1979), Katsura et al. (1979), Katsura (1986), Wong et al. (1988))。

磁化 m およびスピングラスオーダーパラメータ q は

$$(1.24) \quad m = \overline{\langle \sigma \rangle} \\ = \int \text{th} \beta (h_{12} + h_{13} + h_{14} + H) g(h_{12}) g(h_{13}) g(h_{14}) dh_{12} dh_{13} dh_{14}$$

$$(1.24') \quad = \int \text{th} \beta H^{(1)} G^{(1)}(H^{(1)}) dH^{(1)}$$

$$(1.25) \quad q = \overline{\langle \sigma^2 \rangle} \\ = \int \text{th}^2 \beta (h_{12} + h_{13} + h_{14} + H) g(h_{12}) g(h_{13}) g(h_{14}) dh_{12} dh_{13} dh_{14}$$

$$(1.25') \quad = \int \text{th}^2 \beta H^{(2)} G^{(2)}(H^{(2)}) dH^{(2)}$$

で与えられる。 $\langle \rangle$ は (1.5) の熱平均を、 $\overline{\quad}$ は有効場の分布関数によるランダム平均を示す。 m, q の代わりに次式で与えられる m_0, q_0

$$(1.26) \quad m_0 = \int \text{th} \beta h g(h) dh$$

$$(1.27) \quad q_0 = \int \text{th}^2 \beta h g(h) dh$$

を用いても相転移に関する議論を行なうことができる。

$H=0$ のときを考える。 $g(h)$ が $g(h)=\delta(h)$ であれば、 $m=0, q=0$ であり、これは常磁性相を与える。 $g(h)$ が $g(h) \neq g(-h)$ であれば、 $m \neq 0, q \neq 0$ であり、これは強磁性相を与える。 $g(h)$ が $g(h)=g(-h)$ であれば、 $m=0, q \neq 0$ であり、これはスピングラス相を与える。

(1.17) より、 $O((h_{ik}^n)^2)$ ($n=1, 2$) を無視して

$$(1.28) \quad \overline{H_i^{(2)n}} = \overline{(H + \sum' h_{ik})^n} = H^n + \sum' \overline{h_{ik}^n} \simeq H^n + (z-1) \overline{h_{ik}^n}$$

$$(1.29) \quad \overline{H_i^{(1)n}} = \overline{(H + \sum h_{ik})^n} = H^n + \sum \overline{h_{ik}^n} \simeq H^n + z \overline{h_{ik}^n}$$

(1.15) より

$$(1.30) \quad \beta h_{ik} = \text{th}^{-1}(\text{th} \beta J_{ik} \text{th} \beta H_k^{(2)})$$

(1.28)-(1.30) より $h_{ik}, H_k^{(2)}$ が小さいとき

$$(1.31) \quad h_{ik} = H_k^{(2)} \text{th} \beta J_{ik}$$

(1.28), (1.29), (1.31) より一様帯磁率を χ_u , スピングラス帯磁率を χ_g として

$$(1.32) \quad \chi_u / \beta \equiv \frac{\partial m}{\partial H} = \frac{1 + \overline{\text{th} \beta J}}{1 - (z-1) \overline{\text{th} \beta J}}$$

$$(1.33) \quad \chi_g / \beta \equiv \frac{\partial q}{\partial (H^2)} = \frac{1 + \overline{\text{th}^2 \beta J}}{1 - (z-1) \overline{\text{th}^2 \beta J}}$$

を得る。ここに

$$(1.34) \quad \overline{\text{th} \beta J} = p \text{th} \beta J - (1-p) \text{th} \beta J = (2p-1) \text{th} \beta J$$

$$(1.35) \quad \overline{\text{th}^2 \beta J} = p \text{th}^2 \beta J + (1-p) \text{th}^2 \beta J = \text{th}^2 \beta J$$

である。

これより常磁性-強磁性転移点 β_c , 常磁性-スピングラス相転移点 β_g は χ_u, χ_g の発散点として

$$(1.36) \quad \beta_c J_0 = \text{th}^{-1} \frac{1}{(2p-1)(z-1)}$$

$$(1.37) \quad \beta_g J_0 = \text{th}^{-1} \frac{1}{\sqrt{z-1}}$$

と求められる。これより得られる相図は図2の実線部分のようになる (Matsubara and Sakata (1976)). 以下 $J_0=1$ とする。

(1.36), (1.37) を一般化して, 三角格子, 面心立方格子, $\text{Eu}_p\text{Sr}_{1-p}\text{S}$ 等の相図も得られている (Katsura (1986) に引用してある諸文献参照)。

本論文では, 外場のかからない系におけるスピングラス相 $g(h)=g(-h)$ を考える。ただし第5章においては非対称解をも考え, スピングラス相と強磁性相の境界を論じる。

2. 積分方程式の $T=0$ における非連続解

最近接格子の数が $z=3$ のとき成り立つ (1.12), (1.19) 式で絶対零度での解について, $2N+1$ 本のデルタ関数の和の分布を持つように単ボンド有効場の分布関数 $g(h)$ を

$$(2.1) \quad g(h) = \sum_{n=-N}^N \mu_n \delta\left(h - \frac{n}{N}\right)$$

$$(2.1') \quad S(x) = \sum_{n=-N}^N \mu_n \exp\left(-ix \frac{n}{N}\right)$$

$$(2.1'') \quad \sum_{n=-N}^N \mu_n = 1$$

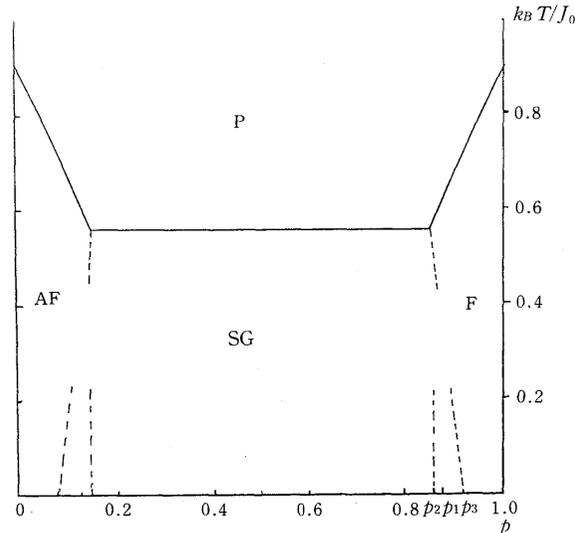


図2. $z=3$ の Bethe 格子の相図. P: 常磁性状態, F: 強磁性状態, AF: 反強磁性状態, SG: スピングラス状態. p_1, p_2, p_3 については第4章参照。

とおく. 絶対零度 ($\beta \rightarrow \infty$) において

$$(2.2) \quad \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \operatorname{th}^{-1}(\operatorname{th} \beta J \operatorname{th} \beta u) = \operatorname{sgn}(u) \operatorname{sgn}(J) \min(|J|, |u|)$$

が成り立つことに注意して, (2.1), (2.2) を (1.12), (1.19) に代入し $p=1/2$ とすると, 係数 μ_n の連立代数方程式が次のように得られる.

$$(2.3) \quad \mu_n = \sum_{l=-N}^N \mu_l \mu_{n-l} \quad (-N+1 \leq n \leq N-1)$$

これをスピングラス代数方程式という.

(2.1''), (2.3) の Gröbner 基底より $F^{(N)}(\mu_0) = 0$, $\mu_n = f_n^{(N)}(\mu_0)$ の形の解を求める. $F^{(N)}(\mu_0)$ は μ_0 の 2^N 次式, $f_n^{(N)}(\mu_0)$ は μ_0 の $2^N - 1$ 次式である. $F^{(N)}(\mu_0) = 0$ より解いた μ_0 を $f_n^{(N)}(\mu_0)$ に入れて解 μ_n を求める. その解のうち物理的な意味のある解, すなわち確率分布の意味を持つ解は $0 \leq \mu_n \leq 1$ を満たすものである. 物理的に意味のある解の数は N の約数の数を $\omega(N)$ とすると $\omega(N)+1$ となっており, N に対する解は N の約数に対する全ての解を含んでいる.

図3に $2N+1=1, 3, 5, 7, 9, 11$ に対する対称解 ($\mu_{-n} = \mu_n$) およびその解のエネルギーをあげる (Katsura et al. (1987), $N=11$ の Gröbner 基底は Moritsugu (1989) による. エネルギーの求め方は第6章に述べてある).

3. 積分方程式の $T=0$ における連続解

図3より (1.19) は $N \rightarrow \infty$ において $h_0 = -1, 0, 1$ における δ 関数と, $[-1, 1]$ における連続関数の和によって与えられる解を持つことが想像されるので, これを求めることを考える (Katsura (1986)).

(2.2) を (1.21) に代入し, 右辺の積分を計算すると

$$(3.1) \quad K(x, y) = 2\pi \delta(y) \cos x - 2p \frac{\sin(y-x)}{y} \\ - 2(1-p) \frac{\sin(y+x)}{y} + 2p \frac{\sin(y-x)}{y-x} + 2(1-p) \frac{\sin(y+x)}{y+x}$$

となる.

ここで Bessel 関数の加法定理

$$(3.2) \quad \frac{\sin(y \pm x)}{y \pm x} = \sum_{n=0}^{\infty} (\mp 1)^n (2n+1) j_n(x) j_n(y)$$

($j_n(x)$ は n 次球 Bessel 関数) を用いて (3.1) を変形し (1.19) に代入する. 非線形積分方程式の解 $S(x)$ を

$$(3.3) \quad S(x) = a + b \cos x - ic \sin x + \sum_{n=0}^3 d_n j_n(x)$$

とおく. (1.18) により $S(x)$ の逆 Fourier 変換を行なうと

$$(3.4) \quad g(h) = a\delta(h) + \frac{1}{2} [(b+c)\delta(h-1) + (b-c)\delta(h+1)] \\ + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^3 (-i)^n d_n P_n(h) \quad (|h| \leq 1)$$

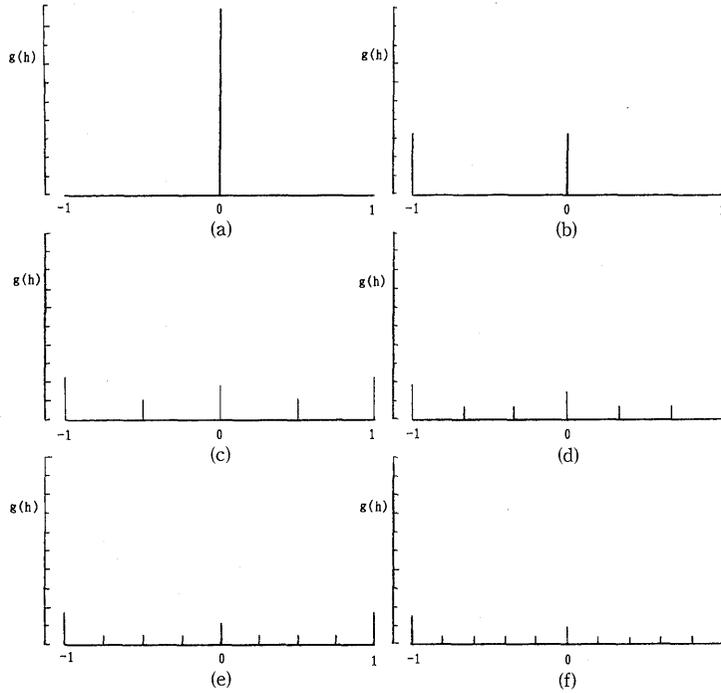


図 3. $2N+1=1, 3, 5, 7, 9, 11$ に対する有効場の非連続分布関数. (a) $\mu_0=1.0, \mu_1=0, F=-1.5$ ($2N+1=1$), (b) $\mu_0=0.33333, \mu_1=0.33333, F=-1.27777$ ($2N+1=3$), (c) $\mu_0=0.226543, \mu_1=0.113278, \mu_2=0.273457, F=-1.27566$ ($2N+1=5$), (d) $\mu_0=0.187593, \mu_1=0.078353, \mu_2=0.073594, \mu_3=0.254254, F=-1.27524$ ($2N+1=7$), (e) $\mu_0=0.167675, \mu_1=0.059631, \mu_2=0.057356, \mu_3=0.054241, \mu_4=0.244933, F=-1.27509$ ($2N+1=9$), (f) $\mu_0=0.155613, \mu_1=0.048063, \mu_2=0.046772, \mu_3=0.045031, \mu_4=0.042878, \mu_5=0.239446, F=-1.27503$ ($2N+1=11$).

となる. ここに $P_n(h)$ は n 次の Legendre 多項式である.

(3.3) を (1.19) に代入し, (1.19) の右辺の積分を計算する. 両辺の未定係数をそれぞれ比較すると a, b, c, d_n ($n=0, 1, 2, 3$) の連立代数方程式を得る. また, 規格化条件

$$(3.5) \quad a + b + d_0 = 1$$

が成り立つ. 本章では $p=1/2$ の場合を考える. このときは $g(h)=g(-h)$ の対称解となるので $c=d_1=d_3=0$ であり

$$(3.6) \quad \begin{cases} a = a^2 + \frac{b^2}{2} \\ b = 2ab + \frac{b^2}{2} + bd_0 + d_0^2 - \sum_l \sum_m (-1)^{l+m} d_{2l} d_{2m} I_{0, 2l, 2m} \\ d_{2n} = 2ad_{2n} + 2b(1+4n) \sum_l (-1)^l d_{2l} I_{2l, 2n} + (1+4n) \sum_l \sum_m (-1)^{l+m} d_{2l} d_{2m} I_{2l, 2m, 2n}, \end{cases}$$

ここに

$$(3.7) \quad I_{2l, 2n} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos x j_{2l}(x) j_{2n}(x) dx$$

$$(3.8) \quad I_{2l, 2m, 2n} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} j_{2l}(x) j_{2m}(x) j_{2n}(x) dx$$

である。積分(3.7), (3.8)は留数計算により求める。

この連立代数方程式の d_4 以上を無視して Gröbner 基底の方法により未定係数 a で表わした代数方程式と多項式を導出する。 $f_1(a)=0, b=f_2(a), d_0=f_3(a), d_2=f_4(a)$ を得て、解を調べることができる。ここに $f_1(a)$ は a の8次代数方程式であり、 $f_2(a), f_3(a), f_4(a)$ は a の7次多項式となる。 $f_1(a)=0$ を解くと物理的に意味のある解は3通り存在する。 $z=3, p=1/2$ の場合は

- i) $a=1, b=d_0=d_2=0$ (常磁性解)
- ii) $a=1/3, b=2/3, d_0=d_2=0$ (対称非連続解)
- iii) $a=0.10683, b=0.43686, d_0=0.45631, d_2=0.05759$ (対称連続解)

が得られる。

図4にこの係数値を用いた(3.4)による解 $g(h)$ を示す。 b までで打ち切った場合の連立代数方程式の解は(2.3)の $N=1$ の結果を再現する。 d_2 までの結果を、 $-1 < h < 1$ を512分割して、ヒストグラムの数値計算により Morita (1984) の求めた解と比較すると2.5桁~3桁の一致を見ており、この truncation の収束が非常によいことがわかる。

$z=4, 5, 6$ における対称連続分布解も得られている (Sasaki(Seino) and Katsura (1989a), Akagi et al. (1991)). z が大きくなるに従って連続関数部分は長方形分布に近づいて行く。

4. 積分方程式の $T=0$ の非対称解

3章で求めた $p=1/2$ の解 i), ii), iii) の他に(3.3)の $c, d_1, d_3 \neq 0$ として(1.19)の解を調べることにより、 $p \neq 1/2$ のときは $g(h) \neq g(-h)$ の非対称解 iv), v) が現われる (Sasaki(Seino) and Katsura (1989b)).

$$\text{iv) } a=1/(2p-1)-1, b=2-1/(2p-1), c=\{(8p-7)(4p-3)\}^{1/2}/(2p-1), \\ d_0=d_1=d_2=d_3=0$$

この解は $p_1=7/8 \leq p \leq 1$ で存在し、強磁性相を示す。

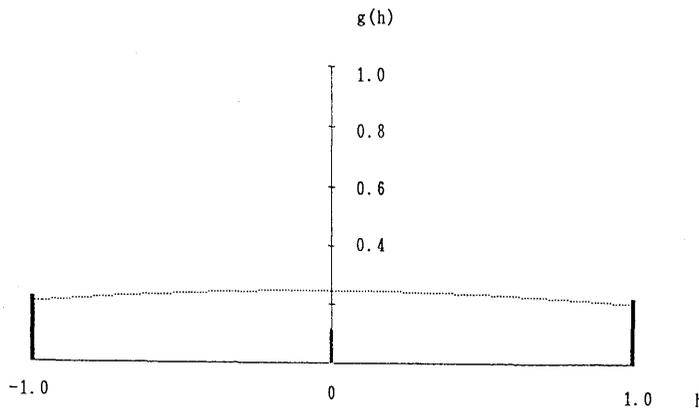


図4. $z=3$ の有効場の連続分布関数。

v) すべて a, b, \dots, d_3 が $\neq 0$ な解 (非対称連続解)

これらを図 5 に示す. このときはこれらの係数が $=0$ から $\neq 0$ になる点として p_1, p_2, p_3 の 3 つの臨界濃度の値が求まる. 臨界濃度 $p_1=7/8$ は非対称非連続の iv) が消失する値である.

臨界濃度 $p_2=0.869427$ は a, b, c, d_n ($n=0, 1, 2, 3$) の連立代数方程式により, $c=d_1=d_3=0, d_1/c \neq 0, d_3/c \neq 0$ において $a, d_0, d_2, d_1/c, d_3/c$ で成り立つ連立代数方程式を解いて求めることができる.

臨界濃度 $p_3=11/12$ は $d_0=d_1=d_2=d_3=0, d_1/d_0 \neq 0$ において同様に連立代数方程式を解くことによって得られる. $0 \leq p \leq 1$ において, $p=1/2$ の場合で求めた i) 常磁性解, ii) 対称非連続分布解, iii) 対称連続分布解が存在する. $p_1=7/8 \leq p \leq 1$ では $0 \leq p \leq 1$ における解の他, iv) 非対称非連続分布解 (強磁性解を含む) が存在する. $p_2=0.869427 \leq p \leq p_3=11/12$ では $0 \leq p \leq 1$ での解の他, 対称連続分布解との境界を連結する v) の非対称連続分布解が存在する.

臨界濃度 $p_2=0.869427$ は p を変えていったとき対称分布解が不安定になる様な p の値として Morita (1984) が求めたスピングラス相-強磁性相の相境界で一致する. $p_3=11/12$ は Kwon and Thouless (1988) が $p_2 \leq p \leq p_3$ の相がスピングラス相と強磁性相との混合相 (MSG 相) であると述べている値である.

5. 有効場の分布関数による Bethe 近似に関する自由エネルギー

ランダム Ising 模型のクラスター変分法における自由エネルギーは 1 スピンあたり

$$(5.1) \quad F = (1-z)F_1 + \frac{z}{2}F_2$$

である (Morita (1972)).

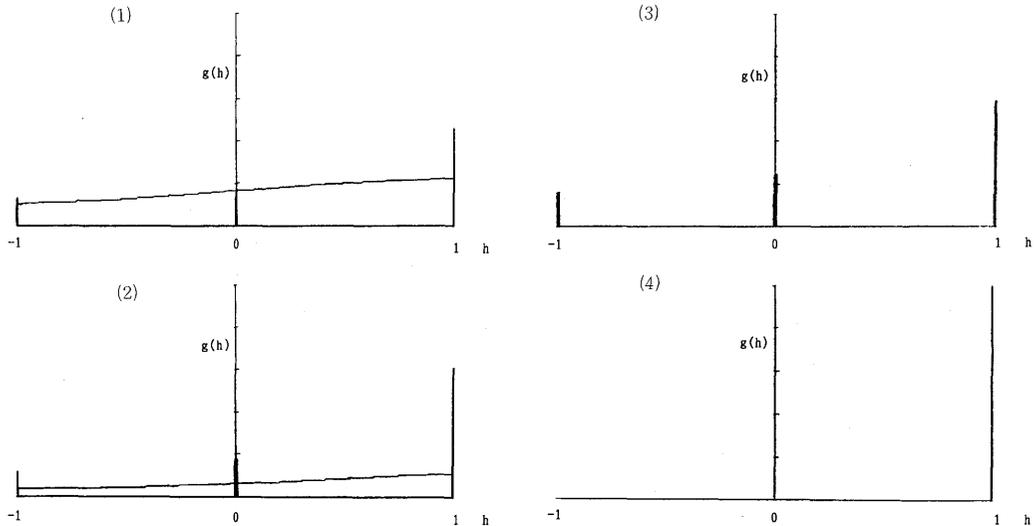


図 5. $z=3$ の種々の p に対する有効場の分布関数. (1) $p=0.88, a=0.13088, b=0.57291, c=0.31735, d_0=0.31708, d_1=0.12862, d_2=0.00272, d_3=0.02284i$ (解 v), (2) $p=0.90, a=0.16783, b=0.72213, c=0.49209, d_0=0.12874, d_1=0.07478, d_2=0.01378, d_3=0.01058i$ (解 v), (3) $p=0.90, a=0.25, b=0.75, c=d_0=d_1=d_2=d_3=0$ (解 iii), (4) $p=1.0, a=0, b=1.0, c=1.0, d_0=d_1=d_2=d_3=0$ (解 iii).

ここに F_1 と F_2 は 1 体および 2 体の自由エネルギーである.

$$(5.2) \quad -\beta F_1 = \overline{\ln \operatorname{tr}_{\sigma_1} \rho^{(1)}(\sigma_1)} \\ = \int \ln \{ \exp[\beta(h_{12} + h_{13} + h_{14} + H)] \\ + \exp[-\beta(h_{12} + h_{13} + h_{14} + H)] \} g(h_{12})g(h_{13})g(h_{14}) dh_{12} dh_{13} dh_{14}$$

$$(5.3) \quad -\beta F_2 = \overline{\ln \operatorname{tr}_{\sigma_1, \sigma_2} \rho^{(2)}(\sigma_1, \sigma_2)} \\ = \int \ln \{ \exp[\beta(2H + h_{13} + h_{14} + h_{25} + h_{26} + J)] \\ + \exp[\beta(-2H - h_{13} - h_{14} - h_{25} - h_{26} + J)] \\ + \exp[\beta(h_{13} + h_{14} - h_{25} - h_{26} - J)] \\ + \exp[\beta(-h_{13} - h_{14} + h_{25} + h_{26} - J)] \} \\ \times g(h_{13})g(h_{14})g(h_{25})g(h_{26})P(J) dh_{13} dh_{14} dh_{25} dh_{26} dJ$$

(5.2), (5.3) の自由エネルギーは $g(h)$ の Fourier 変換 $S(x)$ を用いると

$$(5.2') \quad -\beta F_1 = \frac{1}{2\pi} \int e^{iux} \ln[2 \operatorname{ch} \beta u] [S(x)]^z du dx$$

$$(5.3') \quad -\beta F_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 \int e^{iux+ivy} \ln[2\{e^{\beta J} \operatorname{ch} \beta(u+v) \\ + e^{-\beta J} \operatorname{ch} \beta(u-v)\}] [S(x)S(y)]^{z-1} P(J) dJ du dv dx dy$$

と表わされる.

(5.2) の右辺での u による積分を I とし計算すると

$$(5.4) \quad I = \frac{1}{2\pi} \int e^{iux} \ln[2 \operatorname{ch} \beta u] du = -\frac{1}{2x} \operatorname{cosech} \left(\frac{\pi x}{2\beta} \right).$$

よって, (5.4) を (5.2) に代入すると

$$(5.5) \quad -\beta F_1 = - \int \frac{1}{2x} \operatorname{cosech} \left(\frac{\pi x}{2\beta} \right) [S(x)]^z dx.$$

次に (5.3') の u と v に関する積分を計算する. まず, (5.3') の対数部分を変形する.

$$(5.6) \quad \ln[e^{\beta J} \operatorname{ch} \beta(u+v) + e^{-\beta J} \operatorname{ch} \beta(u-v)] \\ = \beta u + \ln[2 \operatorname{ch} \beta(J+v)] + \ln[1 + f(v)e^{-2\beta u}]$$

ここに

$$(5.7) \quad f(v) = \frac{\operatorname{ch} \beta(J-v)}{\operatorname{ch} \beta(J+v)} = \frac{1 - \operatorname{th} \beta J \operatorname{th} \beta v}{1 + \operatorname{th} \beta J \operatorname{th} \beta v}.$$

(5.6) を (5.3') に代入する:

(i) (5.6) の右辺第 1 項を (5.3') に代入し, 計算すると消える.

(ii) (5.6) の右辺第 2 項を (5.3') に代入し計算する ($p=1/2$).

$$(5.8) \quad \left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 \int e^{iux+ivy} \ln[2 \operatorname{ch} \beta(J+v)] [S(x)S(y)]^{z-1} P(J) dJ du dv dx dy \\ = - \int \frac{\cos y}{2y} \operatorname{cosech} \left(\frac{\pi y}{2\beta} \right) [S(y)]^{z-1} dy$$

(5.8) 式の右辺を $-\beta F_{21}$ とおく.

(iii) (5.6) 式の右辺第 3 項を (5.3') に代入し計算する.

$$(5.9) \quad \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int e^{iux+ivy} \ln[1+f(v)e^{-2\beta u}] [S(x)S(y)]^{z-1} P(J) dJ du dv dx dy$$

ここで, $u - (1/2\beta) \ln f(v) = w$ とおくと

$$(5.10) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int e^{iux} \ln[1+f(v)e^{-2\beta u}] du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int \exp\left\{ix\left[w + \frac{1}{2\beta} \ln f(v)\right]\right\} \{-\beta w + \ln[\operatorname{ch}(2\beta w)]\} dw \\ &= \exp\left\{i\frac{x}{2\beta} \ln f(v)\right\} \left\{-\frac{1}{2x} \operatorname{cosech}\left(\frac{\pi x}{2\beta}\right)\right\}. \end{aligned}$$

ゆえに

$$(5.11) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int e^{ivy} \exp\left\{-i\frac{x}{2\beta} \operatorname{th}^{-1}(\operatorname{th} \beta J \operatorname{th} \beta v)\right\} \\ & \times \left\{-\frac{1}{2x} \operatorname{cosech}\left(\frac{\pi x}{2\beta}\right)\right\} P(J) dJ [S(x)S(y)]^{z-1} dx dy \\ &= \int K(x, y) \left\{-\frac{1}{2x} \operatorname{cosech}\left(\frac{\pi x}{2\beta}\right)\right\} [S(y)]^{z-1} [S(x)]^{z-1} dy dx. \end{aligned}$$

ここで (1.19) により $S(x)$ が積分方程式をみたすことを用いると

$$(5.12) \quad (5.11) = -\beta F_1.$$

以上 (i), (ii), (iii) から

$$(5.13) \quad -\beta F_2 = -\beta F_1 - \beta F_{21}.$$

(5.13) を (5.1) 式へ代入して

$$(5.14) \quad F = \left(1 - \frac{z}{2}\right) F_1 + \frac{z}{2} F_{21}$$

を得る (Seino (1992)). (5.2), (5.3) はそれぞれ 3 重積分, 5 重積分であったが (5.5), (5.8) により 1 重積分になった. 次章で $T=0$ の場合のこの積分の値を求める.

6. 絶対零度における自由エネルギー

$z=3$ のとき, (5.5), (5.8) で $\beta \rightarrow \infty$ の極限を取ると (Seino and Katsura (1990)),

$$(6.1) \quad F_1 = \frac{1}{\pi} \int \frac{1}{x^2} [S(x)]^z dx$$

$$(6.2) \quad F_2 = \frac{1}{\pi} \int \frac{\cos x}{x^2} [S(x)]^{z-1} dx$$

となる. ここで $S(x)$ に (2.1') を使い, μ_n の値として (2.3) を $N=0, 1, 2, 3, 4, 5$ に対して解いた値 (図 3 の説明に記してある) を用いると非連続解のエネルギーは図 6 のようになる (Katsura et al. (1987)).

また (5.2), (5.3) の $g(h)$ に (2.1) を代入し, $\beta \rightarrow \infty$ の極限をとると

$$\begin{aligned}
 -F_1 &= \frac{1}{N} \sum_{-N}^N \sum_{k,l,j} \mu_k \mu_l \mu_j \max(k+l+j, -k-l-j) \\
 -F_2 &= -pF_2^{(+)} - (1-p)F_2^{(-)} \\
 -F_2^{(\pm)} &= \frac{1}{N} \sum_{-N}^N \sum_{k,l,m,q} \mu_k \mu_l \mu_m \mu_q \max(k+l+m+q \pm N, -k-l-m-q \pm N, \\
 &\quad -k-l+m+q \mp N, k+l-m-q \mp N)
 \end{aligned}$$

となり、 $T=0$ の F が $\mu_{-N}, \mu_{-N+1}, \dots, \mu_{-1}, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N$ 空間の超曲面で表わされる ($\mu_0=1 - \sum_{l=-N, l \neq 0}^N \mu_l$ により μ_0 は消去). この空間における F の極大極小を調べてみると、ここに求めた解はこの曲面の極値を与えるが、極小を与える方向の外に、停留値、極大を与える方向があることが分かる (Katsura (1990)).

また対称解 iii) の F_1, F_{21} を計算すると

$$\begin{aligned}
 (6.3) \quad F_1 &= 3a^2b + \frac{3}{2}a^2d_0 - \frac{3}{8}a^2d_2 + 3ab^2 + 6abd_0 + 2ad_0^2 - \frac{2}{5}ad_0d_2 - \frac{2}{35}ad_2^2 \\
 &\quad + \frac{3}{2}b^3 + \frac{15}{4}b^2d_0 - \frac{3}{16}b^2d_2 + \frac{13}{4}bd_0^2 - \frac{1}{5}bd_0d_2 + \frac{31}{1120}bd_2^2 + \frac{3}{16}d_0^3 \\
 &\quad - \frac{27}{160}d_0^2d_2 - \frac{123}{8960}d_0d_2^2 - \frac{53}{12800}d_2^3
 \end{aligned}$$

$$(6.4) \quad F_{21} = a^2 + 2ab + 2ad_0 + \frac{3}{2}b^2 + \frac{5}{2}bd_0 - \frac{1}{8}bd_2 + \frac{13}{12}d_0^2 - \frac{1}{15}d_0d_2 + \frac{31}{3360}d_2^2$$

となる。このとき

$$(6.5) \quad P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{imx}}{x^n} dx = i\pi \frac{\text{sgn}(m)(im)^{n-1}}{(n-1)!} + \dots$$

(P は Cauchy の積分の主値, \dots は発散項であるが全体で相殺する) を用いた。第2章で得られた

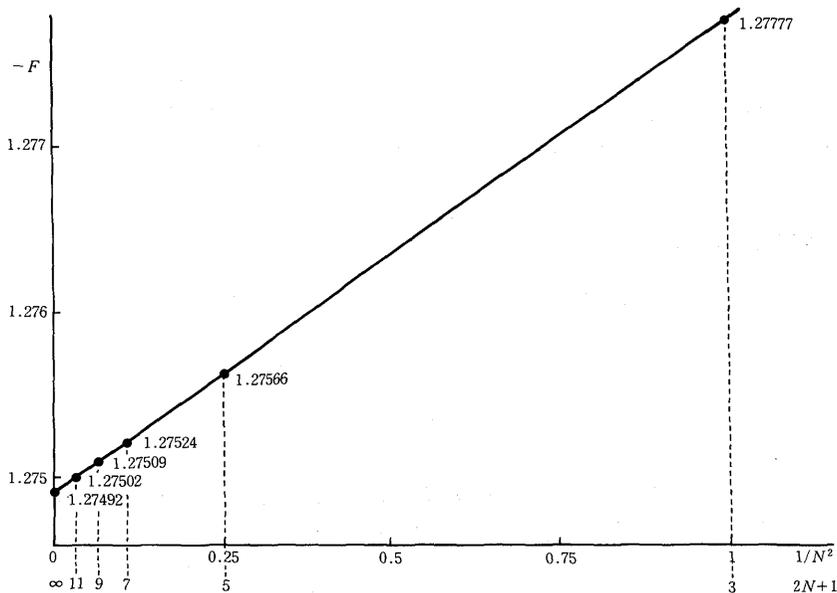


図6. $z=3, T=0$ における $2N+1=3, 5, 7, 9, 11$ に対するエネルギーと連続分布のエネルギー.

解を (6.1), (6.2) に代入し, (5.14) より

- (i) $F = -3/2$ (常磁性), $a=1, b=d_0=d_2=0,$
- (ii) $F = -23/18$ ($2N+1=3$ の対称非連続解), $a=1/3, b=2/3, d_0=d_2=0,$
- (iii) $F = -1.27491$ (対称連続解), $a=0.10683, b=0.43686, d_0=0.45631, d_2=0.05759$

を得る (Seino and Katsura (1990)). 非連続解のエネルギーの値は $1/N^2$ に対して直線にのって連続解のそれに収束している (図 6).

7. 結 論

本稿では分布関数の方法により Bethe 格子上のランダム Ising モデルにおける有効場の分布関数の満たす積分方程式を導いた. $T=0$ でこれを解くことにより非連続分布 ($2N+1$ 本の δ 関数の重ね合わせ) および連続分布の対称な分布関数を得た. $z=3$ の場合については非連続な分布関数を求めることが出来た. これにより, 強磁性の濃度 p のスピングラス相-混合相 (MSG)-強磁性相の臨界濃度も求めた. また有限温度に関する自由エネルギーをスピングラス積分方程式の解を用いて定式化し, 絶対零度でのスピングラス相のエネルギーの値を求めた.

今後, 有限温度においてスピングラス積分方程式の積分核を変形して (Seino and Katsura (1992)) 解を求める予定である. 物理量としてエネルギー, エントロピー, 比熱などの正確解, また, 温度-濃度-外場の相図も作成したい.

謝 辞

筆を置くに当たり御討論頂いた守田徹教授, 井上真博士, 森継修一博士に感謝する.

参 考 文 献

- Akagi, E., Seino, M. and Katsura, S. (1991). The free energy at $T=0$ of the spin glass in the case of the continuous distribution of the effective field on the Bethe lattice for $z=4, 5, 6$, *Physica A*, **178**, 406-414.
- Katsura, S. (1986). Theory of spin glass by the method of the distribution function of an effective field, *Progr. Theoret. Phys. Suppl.*, **87**, 139-154.
- Katsura, S. (1990). Spin glass problem by the method of integral equation of the effective field, *New Trends in Magnetism* (eds. M.D. Coutinho-Filho and S.M. Resende), 110-121, World Scientific, Singapore.
- Katsura, S. and Fujiki, S. (1979). Distribution of spins and the thermodynamic properties in the glass-like (spin glass) phase of random Ising bond models, *J. Phys. C*, **12**, 1087-1099.
- Katsura, S., Inawashiro, S. and Fujiki, S. (1979). Spin glasses for the infinitely long ranged bond Ising model and for the short ranged binary bond Ising model without use of the replica method, *Physica A*, **99**, 193-216.
- Katsura, S., Fukuda, W., Inawashiro, S., Fujiki, N. and Gebauer, R. (1987). Distribution of effective field in the Ising spin glass of the $\pm J$ model at $T=0$, *Cell Biophysics*, **11**, 309-319.
- Kwon, C. and Thouless, D.J. (1988). Ising spin glass at zero temperature on the Bethe lattice, *Phys. Rev. B*, **37**, 7649-7654.
- Matsubara, F. and Sakata, M. (1976). Theory of random magnetic mixture III, *Progr. Theoret. Phys.*, **55**, 672-682.
- Morita, T. (1972). General structure of the distribution function for the Heisenberg model and the Ising model, *J. Math. Phys.*, **13**, 115-123.

- Morita, T. (1979). Variational principle for the distribution function of the effective field for the random Ising model in the Bethe approximation, *Physica A*, **98**, 566-572.
- Morita, T. (1984). Spin-glass and ferromagnetic phases of the random-bond Ising model on the Bethe lattice, *Physica A*, **125**, 321-343.
- Moritsugu, S. (1989). A study of algorithms for computer algebra, Ph. D. Thesis, Department of Information Sciences, University of Tokyo, and (1988) preprint.
- Sasaki (Seino), M. and Katsura, S. (1989a). The distribution function of the effective field of the Ising spin glass on the Bethe lattice for the coordination number $z = 4, 5, 6$, *Physica A*, **155**, 206-220.
- Sasaki (Seino), M. and Katsura, S. (1989b). The asymmetric continuous distribution function of the effective field of the Ising model in the spin glass and the ferromagnetic states on the Bethe lattice, *Physica A*, **157**, 1195-1202.
- Seino, M. (1992). The free energy of the random Ising model on the Bethe lattice, *Physica A*, **181**, 233-242.
- Seino, M. and Katsura, S. (1990). The energy of the spin glass with the continuous distribution of the effective field, *Physica A*, **168**, 781-788.
- Seino, M. and Katsura, S. (1992). Integral kernel of the spin glass integral equation for the Bethe lattice, *Progr. Theoret. Phys. Suppl.* (in press).
- Sherrington, D. and Kirkpatrick, S. (1975). Solvable model of a spin-glass, *Phys. Rev. Lett.*, **35**, 1792-1796.
- Wong, K.Y.M., Sherrington, D., Mottishaw, P., Dewar, R. and de Dominicis, C. (1988). Graph partitioning and dilute spin glasses: the minimum cost solution, *J. Phys. A*, **21**, L99-L105.

A Nonlinear Integral Equation and Its Application
— The Distribution of the Effective Fields of the Spin Glass
and the Free Energy —

Shigetoshi Katsura and Mitsuhiro Seino

(Faculty of Science and Engineering, Tokyo Denki University)

Nonlinear integral equation for the distribution function of the effective fields for the spin glass is derived analytically for the $\pm J$ random Ising model on the Bethe lattice.

The paramagnetic distribution, spin glass distribution with $2N+1$ delta functions and spin glass distributions with a continuous distribution are obtained for $z=3$ and at $T=0$, by solving the integral equation.

The distribution of the effective fields of the Ising spin glass at $T=0$ for general concentration p of the ferromagnetic bond is also obtained. The concentrations of the boundaries between these phase are obtained to be $p_1=7/8$, $p_2=0.869427$, and $p_3=11/12$.

The free energy at finite temperature is formulated by using the solution of the integral equation for the distribution function of the effective fields, and the one at zero temperature is evaluated for $z=3$ in the case where the distribution function of the effective fields has discontinuous and continuous distributions.