

特 別 寄 稿

# 乱塊法計画によって得られたデータの分散分析に 於て無作為化の果す役割に就て

カルガリー大学 名誉教授 小 川 潤 次 郎

(1992 年 6 月 受付)

## 1. 従来の乱塊法の分散分析のやり方

大きさ  $k$  のブロックが  $b$  個与えられ、実験で比較さるべき処理の数も  $k$  とする。このときは完全ブロック計画という。各ブロック内での  $k$  個の処理の  $k$  個のプロットへの割り当ては完全に無作為化されて互に独立とする。

さて、 $i$  番目のブロック内で  $j$  番目の処理が割り当てられたプロットでの観察値を  $y_{ij}$ ,  $i = 1, \dots, b$ ;  $j = 1, \dots, k$  とし、全体で  $n = bk$  個のデータを表 1 のように 2 元配置に並べる。

$$\text{先ず全平方和 } S^2 = \sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^k y_{ij}^2 - \frac{G^2}{n}, \quad \text{d.f. } n-1, \quad G = \sum_i \sum_j y_{ij},$$

$$\text{次にブロック平方和 } S_B^2 = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^b B_i^2 - \frac{G^2}{n}, \quad \text{d.f. } b-1, \quad B_i = \sum_j y_{ij},$$

$$\text{処理平方和 } S_T^2 = \frac{1}{b} \sum_{j=1}^k T_j^2 - \frac{G^2}{n}, \quad \text{d.f. } k-1, \quad T_j = \sum_i y_{ij}$$

を作り最後に引き算で

$$\text{残差平方和 } S_E^2 = S^2 - S_B^2 - S_T^2, \quad \text{d.f. } (b-1)(k-1)$$

が得られる。

ここでたいていの書物は甚だ晦渋な説明ないし何等の説明もなくブロック内のプロット効果は一様として、2 元配置モデル；

$$y_{ij} = \mu + \beta_i + \tau_j + e_{ij}$$

表 1. データの 2 元配置.

ブロック \ 処理	1	2	...	$k$	ブロック和
1	$y_{11}$	$y_{12}$	...	$y_{1k}$	$B_1$
2	$y_{21}$	$y_{22}$	...	$y_{2k}$	$B_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$b$	$y_{b1}$	$y_{b2}$	...	$y_{bk}$	$B_b$
処理和	$T_1$	$T_2$	...	$T_k$	$G$ (総和)

$\mu$  は一般平均,  $\beta_i$  はブロック効果で  $\sum_{i=1}^b \beta_i = 0$ ,  $\tau_j$  は処理効果で  $\sum_{j=1}^k \tau_j = 0$ ;  $e_{ij}$  は誤差で, 互に独立に  $N(0, \sigma^2)$  に従い,  $\sigma^2$  は一定の未知分散である. このモデルに基づいて帰無仮説  $H: \tau' = (\tau_1, \dots, \tau_k) = 0$ , i.e. 処理効果間に差異なしを検定するのに検定統計量

$$F = \frac{S_1^2/(k-1)}{S_E^2/(b-1)(k-1)} = (b-1) \frac{S_1^2}{S_E^2}$$

の null-distribution が自由度  $(k-1, (b-1)(k-1))$  の central  $F$ -分布になることを用いるのである.

2元配置モデルではブロック内は一様である. ところが実際の農事圃場試験では地力の傾斜があってブロック内では決してプロット効果が一様でない. だからこそ無作為化が問題になったのだ. 無作為化をやったから魔法の如く地力の不均一が消失するというのでは誤魔化しと云うべきである. ブロック内のプロット効果を明瞭に設定したモデルから出発して, 無作為化が如何なる役割を果たして, 検定統計量  $F$  の null-distribution が central  $F_{(b-1)(k-1)}^k$  になるのかが説明されねばならないのである.

## 2. 完全ブロック計画の関係行列環の概念に基づく分散分析の説明

一般のブロック計画を記述するのに便利なインシデンス・ベクトル, インシデンス行列, 関係行列及び関係行列環の概念を説明する.

その大きさが  $k_1, k_2, \dots, k_b$  なる  $b$  個のブロックが与えられれば, 全体で  $n = k_1 + k_2 + \dots + k_b$  個のプロットがある. それに通し番号をつける. 実験によって比較すべき処理は  $v$  個で夫々  $r_1, r_2, \dots, r_v$  個のプロットに割り当てられるとする. もちろん  $n = r_1 + r_2 + \dots + r_v$ .

さて

$$\zeta_{af} = \begin{cases} \text{若し処理 } a \text{ がプロット } f \text{ に割り当てられれば} & 1, \\ \text{然らざれば} & 0 \end{cases}$$

として, 処理  $a$  のインシデンス・ベクトルを

$$\zeta'_a = (\zeta_{a1} \zeta_{a2} \dots \zeta_{an}), \quad a = 1, 2, \dots, v$$

と定義し, 処理のインシデンス行列を  $\Phi (n \times v) = \|\zeta_1 \zeta_2 \dots \zeta_v\|$  とする.  $J'_n = (11 \dots 1)$  とすれば

$$\begin{aligned} J'_n \zeta'_a &= \zeta'_a J_n = r_a, & a &= 1, 2, \dots, v \\ \zeta'_a \zeta'_\beta &= r_a \delta_{a\beta}, & \delta_{a\beta} &: \text{Kronecker の delta.} \end{aligned}$$

だから

$$\Phi' \Phi = R (v \times v), \quad R = \begin{vmatrix} r_1 & & & 0 \\ & r_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & r_v \end{vmatrix}$$

で, 処理関係行列  $T (n \times n) = \Phi \Phi' = \|t_{fg}\|$  が定義される. ここに

$$t_{fg} = \sum_{a=1}^v \zeta_{af} \zeta_{ag} = \begin{cases} \text{プロット } f \text{ とプロット } g \text{ が同じ処理を割り当てられれば} & 1, \\ \text{然らざれば} & 0 \end{cases}$$

である。若し  $r_1=r_2=\cdots=r_v=r$  (equi-replication) なら  $T^2=rT$  が成り立つので

$$\left(\frac{1}{r}T\right)^2=\frac{1}{r}T, \quad \text{ベキ等行列,}$$

となる。従ってこれは射影作用子である。

次にブロック  $i$  のインシデンス・ベクトル  $\eta_i$  を定義する。

$$\begin{aligned} \eta'_i &= (\eta_{i1}\eta_{i2}\cdots\eta_{in}), \quad i=1, 2, \dots, b \\ \eta_{if} &= \begin{cases} \text{若しプロット } f \text{ がブロック } i \text{ に属すれば} & 1, \\ \text{然らざれば} & 0, \end{cases} \\ J'_n\eta_i &= \eta'_i J_n = k_i, \quad \eta'_i\eta_j = k_i\delta_{ij}. \end{aligned}$$

ブロックのインシデンス行列は

$$\Psi(n \times b) = \|\eta_1\eta_2\cdots\eta_b\|$$

$$\Psi'\Psi = K, \quad K = \begin{vmatrix} k_1 & & 0 \\ & k_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & k_b \end{vmatrix}.$$

ブロック関係行列は

$$\begin{aligned} B(n \times n) &= \Psi\Psi' = \|b_{fg}\|, \\ b_{fg} &= \begin{cases} \text{若しプロット } f \text{ とプロット } g \text{ が同一ブロックに属すれば} & 1, \\ \text{然らざれば} & 0. \end{cases} \end{aligned}$$

若し  $k_1=k_2=\cdots=k_b=k$  なら  $B^2=bB$  が成立するので

$$\left(\frac{1}{b}B\right)^2=\frac{1}{b}B, \quad \text{ベキ等行列,}$$

となる。よって  $(1/b)B$  は射影作用子である。 $N(v \times b) = \|n_{ai}\| = \Phi'\Psi$  はこのブロック計画のインシデンス行列であって

$$n_{ai} = \sum_{f=1}^n \xi_{af}\eta_{if} = \begin{cases} \text{若し処理 } a \text{ がブロック } i \text{ に割り当てられれば} & 1, \\ \text{然らざれば} & 0, \end{cases}$$

$$J'_v N = (k_1 k_2 \cdots k_b), \quad N J_b = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_v \end{bmatrix}.$$

完全ブロック計画の場合は

$$N = J_{k,b} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & & \ddots & \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = J_k J'_b$$

よって

$$\begin{aligned} TB &= \Phi N \Psi' = \Phi J_k J_b' \Psi' = J_n J_n' = U_n \equiv U \\ BT &= \Psi N' \Phi' = \Psi J_b J_k' \Phi' = J_n J_n' = U \end{aligned}$$

となるので  $\{I(n \text{ 次単位行列}), U, B, T\}$  の一次結合全体は可換行列環  $\mathcal{A}$  となり, これが完全ブロック計画の関係行列環である.  $\mathcal{A}$  の単位元  $I$  は互に直交する射影作用子の和にただ一通りに分割される.

$$I = \frac{1}{n} U + \left( \frac{1}{k} B - \frac{1}{n} U \right) + \left( \frac{1}{b} T - \frac{1}{n} U \right) + \left( I - \frac{1}{k} B - \frac{1}{b} T + \frac{1}{n} U \right)$$

即ち

$$I - \frac{1}{n} U = \left( \frac{1}{k} B - \frac{1}{n} U \right) + \left( \frac{1}{b} T - \frac{1}{n} U \right) + \left( I - \frac{1}{k} B - \frac{1}{b} T + \frac{1}{n} U \right).$$

観察値ベクトル  $\mathbf{y}' = (y_1 y_2 \cdots y_n)$  の2次形式に直すと

$$\begin{aligned} \mathbf{y}' \left( I - \frac{1}{n} U \right) \mathbf{y} &= \sum_{j=1}^n y_j^2 - \frac{1}{n} G^2: \text{全平方和} \\ \mathbf{y}' \left( \frac{1}{k} B - \frac{1}{n} U \right) \mathbf{y} &= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^b B_i^2 - \frac{1}{n} G^2: \text{ブロック平方和} \\ \mathbf{y}' \left( \frac{1}{b} T - \frac{1}{n} U \right) \mathbf{y} &= \frac{1}{b} \sum_{a=1}^k T_a^2 - \frac{1}{n} G^2: \text{処理平方和} \\ \mathbf{y}' \left( I - \frac{1}{k} B - \frac{1}{b} T + \frac{1}{n} U \right) \mathbf{y} &= \sum_{j=1}^n y_j^2 - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^b B_i^2 - \frac{1}{b} \sum_{a=1}^k T_a^2 + \frac{1}{n} G^2: \text{残差平方和} \end{aligned}$$

となって, これが分散分析であった.

ここで吾々の採用するモデルはブロック内の不均一性を explicitly に記述するものでなければならない.

$$\mathbf{y} = \mu \mathbf{J}_n + \Phi \boldsymbol{\tau} + \Psi \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\pi} + \mathbf{e}.$$

$\mu$  は一般平均,  $\boldsymbol{\tau}' = (\tau_1 \cdots \tau_k)$  は処理効果で  $\sum_{a=1}^k \tau_a = 0$ ,  $\boldsymbol{\beta}' = (\beta_1 \cdots \beta_b)$  はブロック効果で  $\sum_{i=1}^b \beta_i = 0$ ,  $\boldsymbol{\pi}' = (\pi_1 \cdots \pi_n)$  はプロット効果で付帯条件  $\Psi' \boldsymbol{\pi} = \mathbf{0}$  をもち,  $\Delta_i = \sum_{j \in \text{第 } i \text{ ブロック}} \pi_j^2 > 0, i=1, \dots, b$ ;  $\Delta = \sum_{i=1}^b \Delta_i > 0$ ,  $\mathbf{e}' = (e_1 \cdots e_n)$  は平均0, 分散行列  $\sigma^2 I$  の正規分布に従うものとする.  $\sigma^2$  は未知である.

LEMMA.  $\mathbf{y} = \mathbf{p} + \mathbf{e}$ ,  $\mathbf{e} \sim N(0, \sigma^2 I)$ ,  $\mathbf{p}$  は定数ベクトルで, 対称行列  $A$  はベキ等で,  $r(A) = m$  なら

$$\chi^2 = \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{y}' A \mathbf{y}$$

の分布は d.f.  $m$  の non-central  $\chi^2$  分布で, その non-centrality parameter は

$$\lambda = \frac{1}{2\sigma^2} \mathbf{p}' A \mathbf{p}$$

i.e.  $\chi^2$  の prob. element は

$$e^{-\lambda \left(\frac{1}{2} \chi^2\right)^{\frac{m}{2}-1}} e^{-\frac{1}{2} \chi^2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\lambda^{\nu} \left(\frac{1}{2} \chi^2\right)^{\nu}}{\nu! \Gamma\left(\frac{m}{2} + \nu\right)} d\left(\frac{1}{2} \chi^2\right).$$

この Lemma より

$$S_T^2/\sigma^2 = \mathbf{y}' \left( \frac{1}{b} T - \frac{1}{n} U \right) \mathbf{y} / \sigma^2$$

は自由度  $k-1$  の non-central  $\chi^2$  分布で, その non-centrality parameter は

$$\lambda_1 = \frac{1}{2\sigma^2} \left( b \sum_{a=1}^k \tau_a^2 + \frac{1}{b} \mathbf{\Pi}' \mathbf{\Pi} \right),$$

但し  $(\mathbf{\Pi} = \Phi \boldsymbol{\pi})$  の第  $\alpha$  要素  $\Pi_\alpha = \sum_f \pi_{f\alpha}$ ,  $\sum_f$  は処理  $\alpha$  が割り当てられたプロットのプロット効果  $\pi_f$  全体にわたる. 換言すれば  $\tau_a$  の推定子として  $(1/b)T_a$  を用いると  $(1/b)\Pi_\alpha$  だけの bias があることになる.

処理効果の間に差異なしという帰無仮説  $H: \boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}$  の下での  $\chi_T^2 = S_T^2/\sigma^2$  の null-distribution は

$$e^{-\lambda_1 \left(\frac{1}{2} \chi_T^2\right)^{\frac{k-1}{2}-1}} \exp\left(-\frac{1}{2} \chi_T^2\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^m \left(\frac{1}{2} \chi_T^2\right)^m}{m! \Gamma\left(\frac{k-1}{2} + m\right)} d\left(\frac{1}{2} \chi_T^2\right)$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2\sigma^2} \frac{1}{b} \mathbf{\Pi}' \mathbf{\Pi}.$$

同様にして  $\chi_E^2 = S_E^2/\sigma^2 = \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{y}' \left( I - \frac{1}{b} T - \frac{1}{k} B + \frac{1}{n} U \right) \mathbf{y}$  は自由度  $(b-1)(k-1)$  の non-central  $\chi^2$  分布で, その non-centrality parameter は

$$\lambda_2 = \frac{1}{2\sigma^2} \left( \boldsymbol{\pi}' \boldsymbol{\pi} - \frac{1}{b} \mathbf{\Pi}' \mathbf{\Pi} \right) = \frac{\Delta}{2\sigma^2} - \lambda_1, \quad \Delta = \boldsymbol{\pi}' \boldsymbol{\pi} = \sum_{f=1}^n \pi_f^2.$$

その prob. element は

$$e^{-\frac{\Delta}{2\sigma^2} + \lambda_1} \left(\frac{1}{2} \chi_E^2\right)^{\frac{(b-1)(k-1)}{2}-1} \exp\left(-\frac{1}{2} \chi_E^2\right) \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\Delta}{2\sigma^2} - \lambda_1\right)^{\nu} \left(\frac{1}{2} \chi_E^2\right)^{\nu}}{\nu! \Gamma\left(\frac{(b-1)(k-1)}{2} + \nu\right)} d\left(\frac{1}{2} \chi_E^2\right).$$

これら  $\chi_T^2$  と  $\chi_E^2$  は互に確率論の意味で独立であるから, 同時分布の prob. element はそれらの積で与えられる.

検定統計量

$$F = \frac{\chi_T^2/(k-1)}{\chi_E^2/(b-1)(k-1)} = (b-1) \frac{\chi_T^2}{\chi_E^2} = (b-1) \frac{S_T^2}{S_E^2}$$

の null-distribution は non-central  $F$ -分布で non-centrality parameter は

$$\lambda = \frac{1}{b} \mathbf{\Pi}' \mathbf{\Pi} / \Delta.$$

従って, その prob. element は

$$\begin{aligned}
(*) \quad & \frac{\Gamma\left(\frac{b(k-1)}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{(b-1)(k-1)}{2}\right)} \frac{\left(\frac{F}{b-1}\right)^{\frac{k-1}{2}-1}}{\left(1+\frac{F}{b-1}\right)^{\frac{b(k-1)}{2}}} \exp\left(-\frac{\Delta}{2\sigma^2}\right) \\
& \times \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\Delta}{2\sigma^2}\right)^l}{l!} \left(1+\frac{F}{b-1}\right)^{-l} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \lambda^m (1-\lambda)^{l-m} \left(\frac{F}{b-1}\right)^m \\
& \times \frac{\Gamma\left(\frac{b(k-1)}{2}+l\right)\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{(b-1)(k-1)}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{b(k-1)}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k-1}{2}+m\right)\Gamma\left(\frac{(b-1)(k-1)}{2}+l-m\right)} d\left(\frac{F}{b-1}\right)
\end{aligned}$$

となるが、未知定数  $\Delta/2\sigma^2$  と  $\lambda$  とを含むので、これらの定数の値が知られない限り使い道がないのである。よく文献で出会う“釣合のとれた系統的配置” balanced systematic arrangement というのは、 $\tau$  の推定子  $(1/b)\mathbf{T}$  の偏り  $(1/b)\mathbf{II}$  が  $\mathbf{0}$  のときであるが、幸運にしてそんな配置があり、何等かの方法でそれが見出されたとしても  $F/(b-1)$  の分布は

$$\begin{aligned}
& \frac{\Gamma\left(\frac{b(k-1)}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{(b-1)(k-1)}{2}\right)} \frac{\left(\frac{F}{b-1}\right)^{\frac{k-1}{2}-1}}{\left(1+\frac{F}{b-1}\right)^{\frac{b(k-1)}{2}}} \exp\left(-\frac{\Delta}{2\sigma^2}\right) \\
& \times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\Delta}{2\sigma^2}\right)^m}{m!} \left(1+\frac{F}{b-1}\right)^{-m} \frac{\Gamma\left(\frac{b(k-1)}{2}+m\right)\Gamma\left(\frac{(b-1)(k-1)}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{b(k-1)}{2}\right)\Gamma\left(\frac{(b-1)(k-1)}{2}+m\right)} d\left(\frac{F}{b-1}\right)
\end{aligned}$$

となって  $\Delta/2\sigma^2 > 0$  が未知である限り使いものにならない。ここで初めて無作為化の御利益が出て来るのである。

### 3. 無作為化の役割

実験の第一目的は論理上帰無仮説  $H: \tau = \mathbf{0}$  の検定である。その為の検定統計量

$$F = (b-1) \frac{S_T^2}{S_E^2}$$

の null-distribution は前章 (\*) に与えられたものである。プロットの通し番号は次のようにつけられたとする。即ち第  $i$  番目のブロックの第  $j$  番目のプロットには  $f = (i-1)k + j$  を与える。第  $i$  ブロックでは順列  $\sigma_i$  をアト・ランダムに取って処理  $1, 2, \dots, k$  に施して、第  $j$  プロットに  $\sigma_i(j)$  処理を割り当てるとする。  $y_f = \mu + \beta_i + \tau_{\sigma_i(j)} + \pi_f + e_f$  であるが、以下若し  $f = (i-1)k + j$  なら  $y_f = y_j^{(i)}$ ,  $\pi_f = \pi_j^{(i)}$ ,  $e_f = e_j^{(i)}$  なる記法を用いる。そうすると、  $y_j^{(i)} = \mu + \beta_i + \tau_{\sigma_i(j)} + \pi_j^{(i)} + e_j^{(i)}$  または  $y_{\sigma_i^{-1}(j)}^{(i)} = \mu + \beta_i + \tau_j + \pi_{\sigma_i^{-1}(j)}^{(i)} + e_{\sigma_i^{-1}(j)}^{(i)}$  だから

$$\Pi_j = \sum_{i=1}^b \pi_{\sigma_i^{-1}(j)}^{(i)}, \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

よって

$$\Delta\lambda = \sum_{j=1}^k \left( \sum_{i=1}^b \pi_{\sigma_i^{-1}(j)}^{(i)} \right)^2$$

は  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_b$  の関数である. 無作為化ということは  $b$  個の確率変数  $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_b$  があって

$$P(\Sigma_1 = \sigma_1, \Sigma_2 = \sigma_2, \dots, \Sigma_b = \sigma_b) = \frac{1}{(k!)^b}$$

ということである.

この無作為化に基づく順列分布についての  $\lambda$  の平均と分散を計算すると

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\lambda) &= \frac{1}{b}, \\ \text{var}(\lambda) &= \frac{2(b-1)}{b^2(k-1)} \left(1 - \frac{V}{b}\right), \quad V = \frac{\frac{1}{b-1} \sum_{i=1}^b \left(\Delta_i - \frac{\Delta}{b}\right)^2}{\left(\frac{\Delta}{b}\right)^2} \end{aligned}$$

となる. この計算の詳細は次の第4章に示す.

$0 \leq \lambda \leq 1$  であるから, ベータ分布

$$\frac{\Gamma\left(\frac{f_1+f_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{f_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{f_2}{2}\right)} x^{(f_1/2)-1} (1-x)^{(f_2/2)-1}$$

を取って, モーメント法で近似する. このベータ分布の平均と分散は

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(X) &= \frac{f_1}{f_1+f_2}, \\ \text{var}(X) &= \frac{2f_1f_2}{(f_1+f_2)^2(f_1+f_2+2)} \end{aligned}$$

だから

$$\frac{f_1}{f_1+f_2} = \frac{1}{b}, \quad \frac{2f_1f_2}{(f_1+f_2)^2(f_1+f_2+2)} = \frac{2(b-1)}{b^2(k-1)} \left(1 - \frac{V}{b}\right)$$

から  $f_1, f_2$  を求めると

$$f_1 = \phi(k-1), \quad f_2 = \phi(b-1)(k-1).$$

ここに

$$\phi = \frac{1}{1 - \frac{V}{b}} - \frac{2}{b(k-1)},$$

$V$  はブロック間のプロット効果の分散の変動係数  $CV$  の二乗である.  $\Delta_i = 0$  ということはブロック内が一様ということであるが, それは非現実的である. 吾々は  $\Delta_i > 0$  の絶対的大きさはいくら大きくとも良い.  $\Delta_1, \dots, \Delta_b$  の  $CV$  が十分に小さく, また  $b$  は十分大きく

$$\frac{V}{b} \doteq 0, \quad \frac{2}{b(k-1)} \doteq 0$$

とすれば  $\phi \doteq 1$  即ち  $\lambda$  の分布は  $B\left(\frac{k-1}{2}, \frac{(b-1)(k-1)}{2}\right)$  で近似出来る.

$$(**) \quad \frac{\Gamma\left(\frac{b(k-1)}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{(b-1)(k-1)}{2}\right)} \lambda^{\frac{k-1}{2}-1} (1-\lambda)^{\frac{(b-1)(k-1)}{2}-1} d\lambda.$$

(\*) の non-central  $F$ -分布の prob. element を (\*\*) で平均して

$$\mathcal{E}(\lambda^m (1-\lambda)^{l-m}) = \frac{\Gamma\left(\frac{b(k-1)}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{(b-1)(k-1)}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{k-1}{2} + m\right) \Gamma\left(\frac{(b-1)(k-1)}{2} + l - m\right)}{\Gamma\left(\frac{b(k-1)}{2} + l\right)}$$

だから

$$\begin{aligned} & \exp\left(-\frac{\Delta}{2\sigma^2}\right) \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\Delta}{2\sigma^2}\right)^l}{l!} \left(1 + \frac{F}{b-1}\right)^{-l} \\ & \times \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \mathcal{E}(\lambda^m (1-\lambda)^{l-m}) \left(\frac{F}{b-1}\right)^m \frac{\Gamma\left(\frac{b(k-1)}{2} + l\right) \Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{(b-1)(k-1)}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{b(k-1)}{2}\right) \Gamma\left(\frac{k-1}{2} + m\right) \Gamma\left(\frac{(b-1)(k-1)}{2} + l - m\right)} \\ & = \exp\left(-\frac{\Delta}{2\sigma^2}\right) \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\Delta}{2\sigma^2}\right)^l}{l!} = 1 \end{aligned}$$

となって、 $F$  統計量の null-distribution はめでたく central  $F$ -分布

$$\frac{\Gamma\left(\frac{b(k-1)}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{(b-1)(k-1)}{2}\right)} \left(\frac{F}{b-1}\right)^{\frac{k-1}{2}-1} \left(1 + \frac{F}{b-1}\right)^{-\frac{b(k-1)}{2}} d\left(\frac{F}{b-1}\right)$$

で近似されることが判る。これが無作為化の御利益なのである。

ところで、プロット効果  $\pi$  というのは概念上の設定であって、未知母数である。ブロック内のプロット効果の分散を如何にして見当づけるのが問題である。吾々のベータ分布による  $\lambda$  の分布の近似が成り立つ為には

$$\phi = \frac{1}{1 - \frac{V}{b}} - \frac{2}{b(k-1)} \div 1$$

が必要であった。その為には

$$V = \frac{1}{b-1} \sum_{i=1}^b \left(\Delta_i - \frac{\Delta}{b}\right)^2 / \left(\frac{\Delta}{b}\right)^2 = (\Delta_i \text{ の変動係数})^2$$

が小さく、 $b$  は大きくなければならない。これはよく教科書などで云われているように、“ブロック内が出来ただけ一様に” という事ではない。ブロック内に変動があるのが現実だが、その変動を分散で測ったとき、その分散がブロック間でなるべく一様にということである。これは大変にむずかしいことで、圃場の地力に関する土壌学的知識や被験品種固有の性質に就ての全知識を動員してなされるべきだが、あまりはつきりしたことは云えない。 $b$  を大きくすることは物理的には可能であっても、経済的に実現不可能なこともあるであろう。

実際のブロック計画を設定するにはケース・バイ・ケースに考えねばならないし、問題があるように思うが、このことに就てどのような理論が構成されているのか私は詳らかにしない。



#### 4. $\lambda = \frac{1}{b\Delta} \Pi' \Pi$ の無作為化に基づく順列分布についての平均と分散の計算

最初, 各ブロック内で処理  $j$  をプロット  $j$  に割り当てたとする. このときのインシデンス行列を  $\Phi_0$ , 処理行列を  $T_0 = \Phi_0 \Phi_0'$  とすれば

$$T_0 = I_k \times U_b, \quad U_b = \mathbf{J}_b \cdot \mathbf{J}_b'$$

となる. 今

$$S = \begin{pmatrix} S_1 & & & 0 \\ & S_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & S_b \end{pmatrix},$$

$S_i (k \times k)$  は順列  $\sigma_i$  に対応する順列行列として,

$$\pi' S' T_0 S \pi = (\pi'_1 S'_1 + \cdots + \pi'_b S'_b)(S_1 \pi_1 + \cdots + S_b \pi_b) = \Delta + \sum_{l \neq m} \pi'_l S'_l S_m \pi_m$$

で, 順列  $\sigma_i$  の全体即ち  $k$  次対称群を  $\mathfrak{S}_k$  として

$$\mathcal{E}(\pi'_l S'_l S_m \pi_m) = (k!)^{-2} \sum_{\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_k} \pi'_l S'_\sigma S_\tau \pi_m = (k!)^{-1} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \pi'_l S'_\sigma \pi_m = k^{-1} \pi'_l U_k \pi_m = 0$$

よって

$$\mathcal{E}(\lambda) = \frac{1}{b\Delta} \mathcal{E}(\pi' T \pi) = \frac{1}{b}.$$

次に  $\lambda$  の分散を計算する.

$$\begin{aligned} (\pi' T \pi)^2 &= \left( \Delta + \sum_{l \neq m} \pi'_l S'_l S_m \pi_m \right)^2 \\ &= \Delta^2 + 2\Delta \sum_{l \neq m} \pi'_l S'_l S_m \pi_m + \sum_{l \neq m} (\pi'_l S'_l S_m \pi_m \pi'_l S'_l S_m \pi_m + \pi'_l S'_l S_m \pi_m \pi'_m S'_m S_l \pi_l) \\ &\quad + \sum_{l \neq m \neq p} \{ \pi'_l S'_l S_m \pi_m (\pi'_l S'_l S_p \pi_p + \pi'_m S'_m S_p \pi_p + \pi'_p S'_p S_l \pi_l + \pi'_p S'_p S_m \pi_m) \} \\ &\quad + \sum_{l \neq m \neq p \neq q} \pi'_l S'_l S_m \pi_m \pi'_p S'_p S_q \pi_q. \end{aligned}$$

さて, ここで  $S_l$  が linear に入っているものは  $\mathcal{E}$  をとると 0 になる.

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\pi'_l S'_l S_m \pi_m \pi'_l S'_l S_p \pi_p) &= 0 \\ \mathcal{E}(\pi'_l S'_l S_m \pi_m \pi'_m S'_m S_p \pi_p) &= 0 \\ \mathcal{E}(\pi'_l S'_l S_m \pi_m \pi'_p S'_p S_l \pi_l) &= 0 \\ \mathcal{E}(\pi'_l S'_l S_m \pi_m \pi'_p S'_p S_m \pi_m) &= 0 \\ \mathcal{E}(\pi'_l S'_l S_m \pi_m \pi'_p S'_p S_q \pi_q) &= 0. \end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\pi'_l S'_l S_m \pi_m)^2 &= (k!)^{-2} \sum_{\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_k} (\pi'_l S'_\sigma S_\tau \pi_m)^2 = (k!)^{-1} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} (\pi'_l S'_\sigma \pi_m)^2 \\ &= (k!)^{-1} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} (\pi_1^{(l)} \pi_{\sigma(1)}^{(m)} + \cdots + \pi_k^{(l)} \pi_{\sigma(k)}^{(m)})^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^k \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \pi_i^{(l)^2} \pi_{\sigma(i)}^{(m)^2} + \sum_{i \neq j} \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \pi_i^{(l)} \pi_j^{(l)} \pi_{\sigma(i)}^{(m)} \pi_{\sigma(j)}^{(m)} \\
&= \sum_{i=1}^k \frac{1}{k} \pi_i^{(l)^2} \Delta_m + \sum_{i \neq j} \frac{1}{k(k-1)} \pi_i^{(l)} \pi_j^{(l)} \sum_{p \neq q} \pi_p^{(m)} \pi_q^{(m)} \\
&= \frac{1}{k} \Delta_l \Delta_m + \frac{1}{k(k-1)} \left( \sum_{i \neq j} \pi_i^{(l)} \pi_j^{(l)} \right) \left( \sum_{p \neq q} \pi_p^{(m)} \pi_q^{(m)} \right) \\
&= \frac{1}{k-1} \Delta_l \Delta_m.
\end{aligned}$$

かくして

$$\mathcal{E} \left( \sum_{l \neq m} (\boldsymbol{\pi}'_l S'_l S_m \boldsymbol{\pi}_m)^2 \right) = \frac{1}{k-1} \sum_{l \neq m} \Delta_l \Delta_m = \frac{1}{k-1} \left( \Delta^2 - \sum_{i=1}^b \Delta_i^2 \right).$$

同様にして

$$\mathcal{E} \left( \sum_{l \neq m} \boldsymbol{\pi}'_l S'_l S_m \boldsymbol{\pi}_m \boldsymbol{\pi}'_m S'_m S_l \boldsymbol{\pi}_l \right) = \frac{1}{k-1} \left( \Delta^2 - \sum_{i=1}^b \Delta_i^2 \right).$$

従って

$$\text{var}(\lambda) = \frac{1}{b^2 \Delta^2} \mathcal{E}(\boldsymbol{\pi}' T \boldsymbol{\pi})^2 - \mathcal{E}^2(\lambda) = \frac{2(b-1)}{b^2(k-1)} \left( 1 - \frac{V}{b} \right),$$

但し

$$V = \frac{1}{b-1} \sum_{i=1}^b \left( \Delta_i - \frac{\Delta}{b} \right)^2 / \left( \frac{\Delta}{b} \right)^2 = (\Delta_i \text{ の変動係数})^2.$$

## 5. Randomization 所謂無作為化の歴史的展望

今日では Thornett (1982) の云うように randomization theory として二つを区別するのが都合がよい。まず (a) 無作為化のみが推論の確率論的根拠即ちストカスチックな基礎を与える場合の推論——今日ではノンパラメトリック統計推論として大きな体系を形成している。もう一つは (b) モデルに基づく推論であって、そこでは標本データは或同時分布をもつ確率変数の観察値と見なして、その確率分布に含まれるパラメータ——処理効果——に関して推論したいのだが、普通の統計的方法では旨く取り扱うことの出来ないパラメータ——所謂プロット効果——が現れるので、無作為化によってこれを処理する場合である。

そもそも randomization 無作為化という革命的アイデア (“revolutionary idea”) は有名な non-mathematical な古典的論文 Fisher (1926) で提唱されたのであるが、この論文が non-mathematical であって式は一つもないので意味曖昧なところが多く、爾来論争のまとなってきた。

吾々は Fisher の娘である Joan Fisher Box による Fisher 伝記 (Box (1978), pp. 146-158) を参考にしつつ Fisher の云わんとするところを聞こう。

その前に吾々の立つ立場を簡単に再録しておこう (Ogawa (1961, 1974, 1982)). 吾々が問題にするのは (b) の model-based inference の場合であって、吾々のモデルは  $\mathbf{y} = \mathbf{J}_n \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\pi} + \mathbf{e}$  で、付帯条件は

$$\mathbf{J}'_k \boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}'_b \boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\Psi}' \boldsymbol{\pi} = \mathbf{0}$$

$\boldsymbol{\mu}$  は一般平均,  $\boldsymbol{\tau}$  は処理効果,  $\boldsymbol{\beta}$  はブロック効果,  $\boldsymbol{\pi}$  はプロット効果でありその数は  $b(k-1)$  で

あって  $b \rightarrow \infty$  のとき  $\rightarrow \infty$  である。プロット効果は農事圃場試験では圃場誤差 soil error とも呼ばれて土壤の肥沃度 soil fertility に起因するものであって、所謂 uniformity trial (斉一試験——同一品種を蒔く圃場試験) によってその存在が確認され、しかも無視出来ない (substantial) ことが認められていたものである。e は技術誤差 technical errors と云われるもので、土地を測るときの誤差または収量測定 of the errors などに基づくものである。互に独立に平均 0、一定の未知分散  $\sigma^2$  の正規分布  $N(0, \sigma^2)$  に従うものとする。所謂 “independent normal theory assumption” (独立正規理論の仮定) である。

処理関係行列  $T = \Phi\Phi'$ 、ブロック関係行列  $B = \Psi\Psi'$ 、ユニバーサル関係行列  $U = J_n J_n'$  と定義して

$$\text{処理平方和} \quad S_T^2 = \mathbf{y}' \left( \frac{1}{b} T - \frac{1}{n} U \right) \mathbf{y} = \frac{1}{b} \sum_{a=1}^k T_a^2 - \frac{G^2}{n},$$

ここで

$$\left( \frac{1}{b} T - \frac{1}{n} U \right) \mathbf{y} = \frac{1}{b} \Phi \Pi + \Phi \tau + \left( \frac{1}{b} T - \frac{1}{n} U \right) \mathbf{e}$$

だから  $\chi_T^2 = S_T^2 / \sigma^2$  とおくと、ある特定の配置からの  $\chi_T^2$  の分布は自由度  $(k-1)$  の非心  $\chi^2$  分布でその非心パラメータ  $\lambda_1$  は

$$\lambda_1 = \frac{1}{2\sigma^2} \left( b\tau'\tau + \frac{1}{b} \Pi'\Pi \right), \quad \Pi = \Phi'\pi$$

i.e.

$$e^{-\lambda_1} \left( \frac{1}{2} \chi_T^2 \right)^{\frac{k-1}{2} - 1} \exp \left( -\frac{1}{2} \chi_T^2 \right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^m \left( \frac{1}{2} \chi_T^2 \right)^m}{m! \Gamma \left( \frac{k-1}{2} + m \right)} d \left( \frac{1}{2} \chi_T^2 \right).$$

これでは後出する Fisher の所謂 “valid estimate” (正しい推定値) ではない。

若し  $\Pi = 0$ , i.e. 釣合型系統配置 balanced systematic arrangement —— これは Student の珍重するものであるが —— なら

$$\lambda_1 = \frac{1}{2\sigma^2} b\tau'\tau$$

となって、帰無仮説  $H: \tau = 0$  の下での  $\chi_T^2$  の null-distribution は自由度  $(k-1)$  の中心  $\chi^2$  分布

$$\frac{1}{\Gamma \left( \frac{k-1}{2} \right)} \left( \frac{1}{2} \chi_T^2 \right)^{\frac{k-1}{2} - 1} e^{-\frac{1}{2} \chi_T^2} d \left( \frac{1}{2} \chi_T^2 \right)$$

となる。しかしこのとき残差平方和を考えてみると、それは次のようになる。

$$\begin{aligned} \text{残差平方和} \quad S_E^2 &= \mathbf{y}' \left( I - \frac{1}{b} T - \frac{1}{k} B + \frac{1}{n} U \right) \mathbf{y} \\ &= S^2 (\text{全平方和}) - S_T^2 (\text{処理平方和}) - S_B^2 (\text{ブロック平方和}) \\ &= (\pi + \mathbf{e})' \left( I - \frac{1}{b} T - \frac{1}{k} B + \frac{1}{n} U \right) (\pi + \mathbf{e}) \\ &= \mathbf{e}' \left( I - \frac{1}{b} T - \frac{1}{k} B + \frac{1}{n} U \right) \mathbf{e} + 2 \left( \pi' - \frac{1}{b} \Pi' \Phi' \right) \mathbf{e} + \left( \pi' \pi - \frac{1}{b} \Pi' \Pi \right) \end{aligned}$$

$$= e' \left( I - \frac{1}{b} T - \frac{1}{k} B + \frac{1}{n} U \right) e + 2\pi' e + \pi' \pi$$

は“estimated error”推定誤差とも呼ばれているようだが,

$$\chi_E^2 = S_E^2 / \sigma^2$$

のある特定配置——無作為化を導入する前という意味——からの分布は非心パラメータ

$$\lambda_2 = \frac{\Delta}{2\sigma^2} - \lambda_1, \quad \Delta = \pi' \pi$$

の非心  $\chi^2$  分布で, その自由度は

$$\begin{aligned} & \text{tr} \left( I - \frac{1}{b} T - \frac{1}{k} B + \frac{1}{n} U \right) \\ &= \text{tr} \left( I - \frac{1}{b} T - \frac{1}{k} B + \frac{1}{n} U \right) = n - k - b + 1 = (b-1)(k-1) \end{aligned}$$

である.

$$e^{-\lambda_2 \left( \frac{1}{2} \chi_E^2 \right)^{\frac{(b-1)(k-1)}{2} - 1}} \exp \left( -\frac{1}{2} \chi_E^2 \right) \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\lambda_2^{\nu} \left( \frac{1}{2} \chi_E^2 \right)^{\nu}}{\nu! \Gamma \left( \frac{(b-1)(k-1)}{2} + \nu \right)} d \left( \frac{1}{2} \chi_E^2 \right)$$

であるから, 釣合型系統配置のときは帰無仮説  $H$  の下でも非心  $\chi^2$  分布

$$e^{-\Delta/2\sigma^2 \left( \frac{1}{2} \chi_E^2 \right)^{\frac{(b-1)(k-1)}{2} - 1}} \exp \left( -\frac{1}{2} \chi_E^2 \right) \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\left( \frac{\Delta}{2\sigma^2} \right)^{\nu} \left( \frac{1}{2} \chi_E^2 \right)^{\nu}}{\nu! \Gamma \left( \frac{(b-1)(k-1)}{2} + \nu \right)} d \left( \frac{1}{2} \chi_E^2 \right)$$

となり,

$$\mathcal{E}(S_E^2) = (b-1)(k-1)\sigma^2 + \Delta$$

となって  $s_E^2 = \frac{1}{(b-1)(k-1)} S_E^2$  は  $\sigma^2$  の推定値としては最大の bias, 偏り  $\Delta / ((b-1)(k-1))$  をもつことになる. このことは Fisher の 1926 年の論文に言及されている.

むしろ釣合型ではない配置をとる, i.e.  $\Pi = \Phi' \pi \neq \mathbf{0}$  とすると

$$\mathcal{E}(S_T^2) = b\tau' \tau + \frac{1}{b} \Pi' \Pi$$

$$\mathcal{E}(S_E^2) = (b-1)(k-1)\sigma^2 + \Delta - b\tau' \tau - \frac{1}{b} \Pi' \Pi$$

であるが, “actual error” の推定値  $S_T^2 / (k-1)$  に対する “estimated error”  $S_E^2 / ((b-1)(k-1))$  の比

$$F = (b-1) \frac{S_T^2}{S_E^2} = (b-1) \frac{\chi_T^2}{\chi_E^2}$$

の a particular arrangement に対する null 分布は

$$\begin{aligned}
 (5.1) \quad & \frac{\Gamma\left(\frac{b(k-1)}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{(b-1)(k-1)}{2}\right)} \left(\frac{F}{b-1}\right)^{\frac{k-1}{2}-1} \exp\left(-\frac{\Delta}{2\sigma^2}\right) \\
 & \times \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\Delta}{2\sigma^2}\right)^l}{l!} \left(1 + \frac{F}{b-1}\right)^{-l} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \lambda^m (1-\lambda)^{l-m} \left(\frac{F}{b-1}\right)^m \\
 & \times \frac{\Gamma\left(\frac{b(k-1)}{2} + l\right) \Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{(b-1)(k-1)}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{b(k-1)}{2}\right) \Gamma\left(\frac{k-1}{2} + m\right) \Gamma\left(\frac{(b-1)(k-1)}{2} + l - m\right)} d\left(\frac{F}{b-1}\right) \\
 & \lambda = \frac{1}{b} \mathbf{II}' \mathbf{II} / \Delta
 \end{aligned}$$

となって未知定数  $\lambda$  を含む非心  $F$ -分布であるため、このままでは使えない。つまり a particular arrangement では使えないが、ここで無作為化を導入して  $0 \leq \lambda \leq 1$  を確率変数とする。つまり各ブロック内での処理の割り当てを permute すれば  $(k!)^b$  個の順列が出来て  $\lambda$  の離散分布が出来ることが、 $b$  が十分大きいとき  $\Delta_i = \boldsymbol{\pi}_i' \boldsymbol{\pi}_i$ ,  $i=1, \dots, b$  の変動係数

$$CV_{\Delta}^2 = \frac{\frac{1}{b-1} \sum_{i=1}^b (\Delta_i - \bar{\Delta})^2}{\bar{\Delta}^2}, \quad \bar{\Delta} = \frac{1}{b} \sum_{i=1}^b \Delta_i$$

が十分小さい、つまりブロック内の地力の分散がブロック毎に一樣、もっと正確には

$$\frac{1}{b} CV_{\Delta}^2 \doteq 0, \quad \frac{2}{b(k-1)} \doteq 0$$

なら、 $\lambda$  の分布は  $B$ -分布

$$(5.2) \quad \frac{\Gamma\left(\frac{b(k-1)}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{(b-1)(k-1)}{2}\right)} \lambda^{\frac{k-1}{2}-1} (1-\lambda)^{\frac{(b-1)(k-1)}{2}-1} d\lambda$$

で近似できるので、(5.1) を (5.2) に就て平均すると  $\lambda$  が消えて中心  $F$ -分布

$$(5.3) \quad \frac{\Gamma\left(\frac{b(k-1)}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{(b-1)(k-1)}{2}\right)} \left(\frac{F}{b-1}\right)^{\frac{k-1}{2}-1} \left(1 + \frac{F}{b-1}\right)^{-\frac{b(k-1)}{2}} d\left(\frac{F}{b-1}\right)$$

に到達した。Randomization の役割はここに在というのが吾々の立場である。

この吾々の立場から Fisher の 1926 年の論文を見てゆこう。1926 年の論文の冒頭に Fisher は次のように述べている。引用文中の斜体は引用者がつけたものである。

*"The Present Position. — The present position of the art of field experimentation is one of rather special interest. For more than fifteen years the attention of agriculturalists has been turned to the errors of field experiments. During this period, experiments of the uniformity trial type have demonstrated the magnitude and ubiquity of the class of error which can not be described to carelessness in measuring the land or weighing the produce, and which is consequently described as due to "soil heterogeneity", much ingenuity has been expended in devising plans for the proper arrangement of the plots; and not without result,*

for there can be little doubt that the standard of accuracy has been materially, though very irregularly, raised. What makes the present position interesting is that it is now possible to demonstrate (a) that the actual position of the problem is very much more intricate than was till recently imagined, but that realizing this (b) the problem itself becomes much more definite, and (c) its solution correspondingly more rigorous."

ここで randomization を提唱しようというのである。

"The conception which has made it possible to develop a new and critical technique of plot arrangement is that an estimate of field errors derived from any particular arrangement may or may not a valid estimate, and in actual field practice is usually not a valid estimate, of the actual errors affecting the averages or differences of averages of which it is required to estimate the error."

この an estimate of field errors derived from any particular experiment というのは、吾々の定式化では  $s_T^2 = S_T^2 / (k-1)$  で、帰無仮説  $H: \tau = 0$  の下では

$$\mathcal{E}(s_T^2) = \sigma^2 + \frac{1}{b(k-1)} \mathbf{II}' \mathbf{II}$$

であって、a particular arrangement で考えると、釣合型配置 ( $\mathbf{II} = 0$ ) でない限り偏り  $(1/b) \cdot \mathbf{II}' \mathbf{II}$  が出来  $\sigma^2$  の推定値として正しい推定値 valid estimate でない。Actual errors affecting the averages は  $(1/b) \mathbf{II}$  のことであろう。最後の the error というのは  $\sigma^2$  のことである。

今仮に何等かの方法で釣合型系統配置 i.e.  $\mathbf{II} = 0$  が得られたとすれば、 $s_T^2$  は帰無仮説  $H: \tau = 0$  の下での  $\sigma^2$  の不偏推定値となって  $\chi_T^2 = S_T^2 / \sigma^2$  は自由度  $(k-1)$  の中心  $\chi^2$  分布になるが、このとき残差平方和  $S_E^2$  の方が

$$\mathcal{E}(S_E^2) = (b-1)(k-1)\sigma^2 + \Delta - b\tau'\tau$$

となって帰無仮説  $H: \tau = 0$  の下で  $s_E^2$  は the error  $\sigma^2$  の valid estimate にならず、

$$F = \frac{s_T^2}{s_E^2} = \frac{1}{b-1} \frac{S_T^2}{S_E^2}$$

の  $H$  の下の null-distribution は非心  $F$ -分布になる

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma\left(\frac{b(k-1)}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{(b-1)(k-1)}{2}\right)} \left(\frac{F}{b-1}\right)^{\frac{k-1}{2}-1} \left(1 + \frac{F}{b-1}\right)^{-\frac{b(k-1)}{2}} \exp\left(-\frac{\Delta}{2\sigma^2}\right) \\ & \times \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\Delta}{2\sigma^2}\right)^l}{l!} \left(1 + \frac{F}{b-1}\right)^{-l} \frac{\Gamma\left(\frac{(b-1)(k-1)}{2}\right)\Gamma\left(\frac{b(k-1)}{2} + l\right)}{\Gamma\left(\frac{(b-1)(k-1)}{2} + l\right)\Gamma\left(\frac{b(k-1)}{2}\right)} d\left(\frac{F}{b-1}\right) \end{aligned}$$

となって非心パラメータ  $\Delta / 2\sigma^2$  が未知なる限り使いものにならないことに注意しておく。これは後に Student の "balanced systematic arrangement" に対する執着のところで再論する。

更に Fisher は第2節 When is a Result Significant? の最後のパラグラフ CP p. 86 で次のように述べている。

"If we thus put trust in the theory of errors, all the calculation necessary is to find the standard error —— 中略 —— The procedure outlined above, relying upon the theory of errors involve some assumptions about the nature of field errors; but these assumptions are not in fact disputed, and have been extensively verified in the examination of the results

of uniformity trials.”

この論述から理解する限り Fisher の立場は所謂 independent normal theory assumption に基づく model based inference であって、non-parametric inference ではない。吾々の立場と同一である。

第 10 節 Errors Wrongly Estimated (間違って推定された誤差) の p. 88, 第 2 パラグラフには次の陳述がある。

“The estimate of error is valid, because if we imagine a large number of different results obtained by different random arrangements, the ratio of the real to the estimated error, calculated afresh for each of those arrangement, will be actually distributed in the theoretical distribution by which the significance of the result is tested.”

Real error とは前に出た actual error のことで帰無仮説  $H$  の下では  $s_T^2$  で推定され, estimated error とは  $s_E^2$  であって, それらの比  $F = s_T^2/s_E^2$  を randomize された配置毎に計算して全配置について平均を取れば, 結果の significance を test する中心  $F$ -分布が得られると云っていて, 吾々が本文で述べた通りである。つまり a particular arrangement に対して  $F/(b-1)$  の null-distribution は

$$\lambda = \frac{1}{b} \Pi' \Pi / \Delta$$

を非心パラメータとして含む非心  $F$ -分布 (5.1) で与えられ,  $(k!)^b$  個のブロック内での処理の permutation に対応する randomized blocks から生ずる  $\lambda$  の permutation distribution は近似的に  $B$ -分布 (5.2) で与えられ, (5.1) を (5.2) に就て平均すると中心的  $F$ -分布 (5.3) が得られるというのである。

後に Joan Fisher Box の主張するところを聴くが, normal assumption よりも data は independent でなく correlated だから  $F$  検定でなく non-parametric inference に移行したというのだが, non-parametric なら分散分析の魅力の大半は失われ, correlation をいうならブロック内の  $k$  個の観測値を  $k$  次元分布からの標本と考えねばならず —— McCarthy がやって失敗したように —— また更に block 間の correlation を云うなら  $bk$  次元の母集団を考えねばならない。地力との関係をプロット効果として捉える regression 的云い方 —— これは Neyman et al. (1935) による —— の方が有効であって, 吾々は検定の段階になって突如として non-parametric inference に移行する必要を認めない。

その次のパラグラフは全く吾々の定式化を支持する論述であって興味深い。

“Whereas if a group of arrangements is chosen such that the *real errors* in this group are on the whole less than those appropriate to random arrangements, it has now been demonstrated that *the errors, as estimated*, will, in such a group, be higher than is usual in random arrangements, and that, in consequence, within such a group the test of significance is vitiated.”

The real error on the whole というのは

$$\mathcal{E}(s_T^2) = \sigma^2 + \frac{1}{b(k-1)} \Pi' \Pi$$

であり, estimated error on the whole は

$$\mathcal{E}(s_E^2) = \sigma^2 + \frac{1}{(b-1)(k-1)} \left( \Delta - \frac{1}{b} \Pi' \Pi \right)$$

だから, real error で  $\mathbf{II}'\mathbf{II}$  が小さくなるような配置では  $\Delta - (1/b)\mathbf{II}'\mathbf{II}$  が大きくなり, 従って estimated error  $s_e^2$  が大きくなって, “significance test が大雑把になる” というのだが, 中心  $F$ -分布を暗々裡に頭においているのであろうか? いずれにしても比  $F$  の分布は  $\Delta/2\sigma^2$  及び  $\lambda = (1/b)\mathbf{II}'\mathbf{II}/\Delta$  に depend する非心  $F$ -分布だから有意性検定は vitiated である. そこで次の Student も含む農学者に対するステートメントが続くのである.

“It is particularly to be noted that those methods of arrangements at which experimenters have consciously aimed, and reduce the real errors, will appear from their (falsely) estimated standard errors to be not more but less accurate than if a randomized arrangement had been applied; whereas, if the experimenter is sufficiently unlucky, as must often be the case, to *increase* by his systematic arrangement the real errors, then the (falsely) estimated standard error will now be smaller, and will indicate that the experiment is not less, but more accurate,…”

これら Fisher の最初の 1926 年の論文は吾々の定式化によって何の矛盾もなく理解出来るのであって, 初めに model based inference で出発したのに有意性の検定の段階に到って突如として non-parametric inference に移行する (Basu (1980) 参照) 必要は認めないし, 又 non-parametric inference と model based inference では本質的な差異があることも注意すべきである (Thornett (1982) 参照).

確かに Fisher 自身も randomization の説明として *The Design of Experiments* (Fisher (1935)) では “Lady の tea testing” の non-parametric inference の例を用いているが, 彼自身による non-parametric inference への移行を明確に述べた文献は見当たらないようである. 多くの人達が randomization の数学的定式化をする為に  $F$  検定量の non-parametric な permutation distribution を取り扱った. Welch (1937), Pitman (1937) 等, また前述したように McCarthy (1939) は相関を取り扱った.

先ず吾々は Box (1978) の pp. 147-159 の記述を調べてみよう.

“As theoretical justification for the revolutionary proposal of randomization, Fisher argued in 1926 [CP48] that ‘The estimate of error is valid, because, if we imagine a large number of different results obtained by different random arrangements, the ratio of the real to the estimated error, calculated afresh for each of those arrangement will be actually distributed in the theoretical distribution by which the significance of the result is tested.’ The theoretical distribution referred to is the distribution that obtains on the normal theory assumptions, so that Fisher here claims that the error ratio will over all randomizations, have the distribution appropriate when observations have been drawn independently from a normally distributed population.”

ここまでは言葉の上では吾々と一致するのであるが, 次に続くパラグラフのステートメントから察するに Joan Fisher Box はプロット効果ベクトルの入った normal model は御存知ないようなので, 上述の Fisher claims の数学的内容がどのようなものとして理解されているかに問題がある. 次のステートメントは Welch, Pitman などの仕事のことを云っているらしい.

“This statement is not, in fact, strictly true, but it has since been proved that for most data the distribution of the ratio generated by the randomization process does approximate adequately to the theoretical distribution.”

ここまで云ってにおいて, non-parametric inference に移る伏線を敷いておく. 現実のデータが non-normal なのに normal theory を仮定することよりもより重大なことは, データは independent でなく相関をもっているのに, これを independent として取り扱うのは現実に関わ



ない——これは Student も指摘している——ことだというのである。だから non-parametric inference をやるというのである。

例えば rain in successive hours of the day とか yield on successive milking of a cow 等も、若し correlation が注目的でない限り regression 的考えでプロット効果という平均量を導入して取り扱えるのである (Neyman et al. (1935) 参照)。Correlation を云うならばブロック内の  $k$  個の観測値は  $k$  次元母集団からの random samples として考察さるべきである。McCarthy (1939) が試みたが数学が複雑になって成功しなかった。Box の云うところを聴こう。

“It is uncertain just when Fisher made the intuitive leap by which he recognized the principle of randomization. In 1918 his analysis of variance of physical measurements of various human relatives was based on “normal theory” assumptions; the observations were assumed to have been drawn independently from a normally distributed population. Later, on analyzing the variance of field observations into the two components respectively within and between groups, he used the ratio of the variance  $s_b^2$  of group means to the variance  $s_w^2$  within groups to assess departure from the null-hypothesis. He obtained this distribution (of  $F = s_b^2/s_w^2$ ) in 1922, although he often chose to work with half the logarithm of this ratio,  $z = (1/2) \log F$ .”

ここでの Fisher の立場は “independent normal theory assumption” であるが, a particular arrangement に対して計算された  $F/(b-1) = S_b^2/S_w^2$  の  $H: \tau = 0$  の下での null-distribution が  $\lambda = (1/b) \mathbf{II}' \mathbf{II} / \Delta$  に depend する非心  $F$ -分布

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma\left(\frac{b(k-1)}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{(b-1)(k-1)}{2}\right)} \left(\frac{F}{b-1}\right)^{\frac{k-1}{2}-1} \exp\left(-\frac{\Delta}{2\sigma^2}\right) \\ & \times \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\Delta}{2\sigma^2}\right)^l}{l!} \left(1 + \frac{F}{b-1}\right)^{-l} \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \lambda^m (1-\lambda)^{l-m} \left(\frac{F}{b-1}\right)^m \\ & \times \frac{\Gamma\left(\frac{b(k-1)}{2} + l\right)\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{(b-1)(k-1)}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{b(k-1)}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k-1}{2} + m\right)\Gamma\left(\frac{(b-1)(k-1)}{2} + l - m\right)} d\left(\frac{F}{b-1}\right) \end{aligned}$$

となるが,  $\lambda$  の randomization に基づく permutation distribution が  $B$ -分布

$$\frac{\Gamma\left(\frac{b(k-1)}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{(b-1)(k-1)}{2}\right)} \lambda^{\frac{k-1}{2}-1} (1-\lambda)^{\frac{(b-1)(k-1)}{2}-1} d\lambda$$

で近似出来るので, 上の非心  $F$ -分布の確率要素を下の  $B$ -分布で平均すると中心  $F$ -分布

$$\frac{\Gamma\left(\frac{b(k-1)}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{(b-1)(k-1)}{2}\right)} \left(\frac{F}{b-1}\right)^{\frac{k-1}{2}-1} \left(1 + \frac{F}{b-1}\right)^{-\frac{b(k-1)}{2}} d\left(\frac{F}{b-1}\right)$$

を得るというプロセスは Joan Fisher Box は御存知ないようである。R.A. Fisher 自身もこのことを明白に記したことがあったのかどうか知らない。しかしかく解釈出来ることは前に述べ

たところである。

“Already, however, in 1923, in introducing the analysis of variance of field experiments, he had made it conditional not on “normal theory” assumptions but on randomization of the field arrangement.”

これは non-parametric inference のことを云っているのでしょうか？

“Yet, in assessing his results, he used the same  $z$  test which was appropriate on “normal theory” assumptions. Evidently *he saw that this “randomization” distribution of  $z$  would approximate the “normal theory” distribution of  $z$ . This conclusion was difficult to justify theoretically and was for years to cause trouble among statisticians.*”

今日これがどのように解決されているのか知らない。

“At the time statisticians felt considerable concern about the normality or normality of the distributions. We recall that Karl Pearson’s series of frequency curves had been developed in order to fit non-normal distributions and that they were then much in vogue. In contrast, Fisher seems from the first to have felt that moderate non-normality was not an important factor. *What he seems to have been much more concerned about was the latent assumption that invariably went with the “normal theory” assumptions that the errors of the observations were independently distributed.* In many, perhaps most practical cases, this assumption was clearly not justified. Observations of the fertility of adjacent plots, rain in successive hours of the day, or yield on successive milking of a cow were not independent but *highly correlated*. Despite this, whatever assumptions were made about the specific distribution of the observations, *analysis was traditionally based on the assumption of independence.* For instance, the well-known formula for the standard error of the mean was only valid on the assumption of independence of the observations.”

Error を soil error  $\pi$  と technical error  $e$  に分ければ  $\pi$  については adjacent なものが high correlation をもち, i.e.  $\sum_{a=1}^k \sum_{i=1}^b \pi_{(i-1)k+a} \pi_{(i-1)k+a+1} / \Delta$  が大きいように与えられれば adjacent observations は highly correlated であって, independent technical errors の仮定と矛盾しない。Technical errors に対して independent normal theory assumption を棄てるならば analysis of variance の効力は消失することに注目すべきである。

“Almost certainly it was the evident lack of independence of field observations that led Fisher to seek a foundation of his analysis which did not involve this assumption.”

かくて Fisher は有意性検定は non-parametric inference に移行したという結論に達したが、筆者の想像は違う。ほのかに伝え聞いたところでは生前 Fisher は non-parametric inference と云われることを嫌っていたとか、Fisher は天才の直感で 1926 年の論文のようなことを理解していたが、その数学的定式化に成功していなかった。それで数学的説明を求められて止むを得ず non-parametric inference に頼ったというのが真相ではなかろうか？これは筆者の想像である。

Fisher の *The Design of Experiments* にある Lady の tea testing の問題のように randomized allocation だけが stochasticity を与える場合は問題ないが、field observations of yields のような場合は observations が independently に抽出される訳ではなく、technical errors  $e_1, \dots, e_n$  は  $N(0, \sigma^2)$  から independently に抽出されたものと考えてるのであって、soil errors  $\pi$  の方では adjacent なものが highly correlated でも良いのである。筆者はここで Joan Fisher Box の所論に重大な疑問を呈しておく。

次に Fisher との間に “randomization 論争” を惹起こした W. Gosset = Student の 1937 年

の論文を調べてみよう。

Student (1937) の p. 363 ; CP31, p. 199 の § 1 The Effect of Lack of Randomness on Bias に曰く, “agricultural experiments の error を定めるのに用いられる analysis of variance が strictly に適用される為には次の三つの仮定がみたされねばならない。

- (1) 問題となっている system が normal variation をもつこと。
- (2) 似たものの variance は相等しいこと。
- (3) Sampling (標本抽出) は random でなければならない。”

これは文句のないところである。ところで random sampling 無作為抽出ということは observations 観察値が独立ということであって、吾々が今問題にしている “randomization” とは異なるものである。Random sampling は technical errors  $e$  の分布に関することであり, “randomization” というのは soil error  $\pi$  の permutation distribution の性質である。Gosset = Student はこの両者を混同しているのではないかと疑われる。従って次のような発言がある。

“(3) If, however, the sampling be not random, there are such possibilities of drawing false conclusion that Prof. Fisher has introduced a system of artificial randomizing to ensure that the third condition is satisfied and brands all other systems invalid.”

このステートメントは明白に誤りである。データの独立性を確保する為に randomize するのではない。吾々は technical errors  $e$  に対する仮定として independent normal theory を postulate して話を始めるが、それでも  $F = s_1^2/s_2^2$  の分布は非心  $F$ -分布であり、その非心パラメータは

$$\lambda = \frac{1}{b} \Pi' \Pi / \Delta$$

であって、ブロック内の処理の順列で定まる量である。この  $\lambda$  を確率化して、中心  $F$ -分布を得る為に randomization が導入されたのであった。ここに Student の randomization に対する根本的誤解があるように思う。従って上につづく次のステートメントは混乱を極めて、その正確な意味はつかみかねるが、誤りであるらしいことは確かである。

“Nevertheless, it is possible, by balancing sources of error which would otherwise lead to bias, to obtain arrangements of greater precision which are nevertheless effectively random, by which I mean that the departure from randomness is only liable to affect our conclusions to the same sort of extent as do departure from normality or inequality of variances.

Lack of randomness can affect either the mean or the variance, and it is the first of these is apt to lead to invalid conclusions...”

Gosset = Student は balanced systematic arrangement 例えば soil fertility slop が linear に近いとき、所謂 sandwich ABBA の如きものを好んでこれに固執するが、前に述べたが、これはあまり意味がない。

吾々のモデルの下では、balanced ということは処理効果  $\tau_\alpha$  の推定値  $(1/b)T_\alpha$  または処理効果の difference  $\tau_\alpha - \tau_\beta$  の推定値  $(1/b)(T_\alpha - T_\beta)$  のもつ bias または actual error  $s_1^2$  の bias  $(1/b(k-1))\Pi' \Pi$  を小さくすることだが、

$$s(s_1^2) = \sigma^2 + \sum_{\alpha=1}^k \tau_\alpha^2 + \frac{1}{b(k-1)} \Pi' \Pi$$

$$E(s_E^2) = \sigma^2 + \frac{1}{(b-1)(k-1)} \left( \Delta - \frac{1}{b} \mathbf{II}' \mathbf{II} - \sum_{a=1}^k \tau_a^2 \right)$$

から見られるように estimated error  $s_E^2$  の bias が大きくなって何の利益もなくなることは Fisher も 1926 年の論文で指摘しているところである。

以上で Gosset = Student の “Fisher-randomization” に対する誤解は解明出来たと思う。

### 参 考 文 献

- Barbacki, S. and Fisher, R.A. (1936). A test of the supposed precision of systematic arrangements, *Annals of the Eugenics*, **7**, 189-199.
- Basu, D. (1980). Randomization analysis of experimental data: the Fisher randomization test, *J. Amer. Statist. Assoc.*, **75**, 575-582.
- Box, Joan Fisher (1978). *R.A. Fisher — The Life of a Scientist*, Wiley, New York.
- Fisher, R.A. (1926). The arrangement of field experiments, *Journal of Ministry of Agriculture*, **33**, 503-513 (R.A. Fisher 全集第 II 巻 (1925-31), 83-94).
- Fisher, R.A. (1935). *The Design of Experiments*, Oliver and Boyd, London.
- Harville, D.A. (1975). Experimental randomizations, who needs it?, *Amer. Statist.*, **29**, 27-31.
- McCarthy, M.D. (1939). On the application of the  $z$ -test to randomized blocks, *Ann. Math. Statist.*, **10**, 337-359.
- Neyman, J. (1937). Randomized and systematic arrangements of field experiments, Lectures and Conferences in Mathematical Statistics, Delivered by J. Neyman at the Graduate School of the United States, Department of Agriculture in April, 49-65.
- Neyman, J. with the co-operation of Iwaskiewicz, K. and Kolodziejczyk, St. (1935). Statistical problems in agricultural experimentation, *J. Roy. Statist. Soc. Suppl.*, **2**, 107-180.
- Ogawa, J. (1961). The effect of randomization on the analysis of randomized block design, *Ann. Inst. Statist. Math.*, **13**, 105-117.
- Ogawa, J. (1974). *Statistical Theory of the Analysis of Experimental Designs*, Marcell Dekker, New York.
- Ogawa, J. (1982). The Fisher experimental randomization, the presidential address at the 49th annual meeting of the Japan Statistical Society at Kansai University, *J. Japan Statist. Soc.*, **12**, 1-24.
- Pitman, E.J.G. (1937). Significance tests which may be applied to samples from populations III: the analysis of variance test, *Biometrika*, **29**, 329-335.
- Russell, J. (1926). Field experiments: how they are made and what they are, *Journal of Ministry of Agriculture*, **33**, 989-1001.
- Student (1937). Comparison between balanced and random arrangements of field plots, *Biometrika*, **29**, 363-379.
- Thornett, M.L. (1982). Two views of randomization, *Austral. J. Statist.*, **24**, 148-150.
- Welch, B.L. (1937). On the  $z$ -test in randomized blocks and Latin squares, *Biometrika*, **29**, 21-52.

The Role of the Randomization in the Analysis of Variance of  
a Set of Data Obtained by a Randomized Block Design

Junjiro Ogawa

(Professor Emeritus of Statistics of The University of Calgary, Canada)

A mathematical formulation of the Fisher randomization of the randomized block design in the case of model-based statistical inference is given. Based on this formulation, Fisher's original 1926 paper proposing the randomization is critically examined. The controversy on the randomization between Student and Fisher is also examined.

---

Key words: Analysis of variance, Fisher's 1926 paper on the randomization, model-based statistical inference vs. non-parametric inference, non-central chi-distribution, non-central  $F$ -distribution, randomization, randomized block design, relationship matrices, relationship ring of a complete block design, Student's comments on the Fisher randomization.