$$M(g(\boldsymbol{x};\ \theta)) = V(g(\boldsymbol{x};\ \theta))/E(g'(\boldsymbol{x};\ \theta))^2$$

を導入した．そして尤度推定関数が criterion $M(\cdot)$ を最小にするという意味で最適であることを示した．

3. 研究の方法

モーメント法を拡張するために次の方法で研究を行なっている．

a) 関心のある母数を簡単な低次のモーメントからなる方程式の解として与える．
b) 低次のモーメントに不偏な標本モーメントを代入して推定関数を得る．
c) 推定関数の良さを Godambe の規準で評価する．

更に次の方針も採用している．

d) すべての母数を推定する．
e) 対応する検定をも導出する．
f) 特定の分布族を仮定する．真の分布はその分布族に近い．

4. 研究の成果

イ) Mantel-Haenszel 推定量の最適性を与えた．また Mantel 検定との関連を与えた．
イ') オッズ比が canonical link として現われることを指摘して，負の2項分布での同様の推定量，検定量が構成できることを示した．
ロ) 二つの指数分布の平均の比 $\theta=\lambda_1/\lambda_2$ の推測では

$$(m-1/m)(\bar{x}/\bar{y})-\theta=0$$

よりも

$$\bar{x}-\theta\bar{y}=0$$

が良い．
ハ) 変動係数 $\theta=\sigma^2/\mu^2$ の推定では

$$\sum(x_i-\bar{x})^2/(n-1)-\theta\{\bar{x}^2-\sum(x_i-\bar{x})^2/n(n-1)\}=0$$

を根として推定する．

等が得られる．

参 考 文 献

Godambe, V.P. (1960). An optimum property of regular maximum likelihood estimation, *Ann. Math. Statist.*, **31**, 1208-1211.

生存競争系の確率微分方程式と保存量

伊 藤 栄 明

箱1，箱2，箱3という3つの箱を考える．(1は紙，2は鋏，3は石を表す．) それぞれに n_1, n_2, n_3 個の粒子がはいっていたとする．n 個の粒子には1から n まで番号がふってあり，単位時間内にランダムに2つの粒子を指定する．指定された2つが1と2にはいっていたとすれば指定された1の粒子が2に移るものとする．2と3なら2から3に，3と1なら3から1に移動がおきるとする．1と1，2と2，3と

3 というように同じものの組みあわせである場合，移動はおこらないとする．時刻 t での **1**, **2**, **3** の比率はそれぞれ確率変数 $P_1(t)$, $P_2(t)$, $P_3(t)$ で表される．そのとき時刻 t での積の値を $P_1(t)P_2(t)P_3(t)$ とした条件付き期待値について次の関係が成り立つ（Itoh(1973)）．

$$(1) \qquad E(P_1(t+1)P_2(t+1)P_3(t+1) \mid P_1(t)P_2(t)P_3(t)) = \left(1-2\frac{{}_3C_2}{n(n-1)}\right)P_1(t)P_2(t)P_3(t)$$

各箱の粒子数の時間的変化の連続モデルとして次の確率微分方程式を考える．

$$(2) \qquad \begin{aligned} dP_1(t) &= c_1P_1(t)(-P_2(t)+P_3(t))dt \\ &\quad +\sqrt{c_2P_1(t)P_2(t)}\,db_{12}(t)+\sqrt{c_2P_1(t)P_3(t)}\,db_{13}(t) \\ dP_2(t) &= c_1P_2(t)(P_1(t)-P_3(t))dt \\ &\quad +\sqrt{c_2P_2(t)P_1(t)}\,db_{21}(t)+\sqrt{c_2P_2(t)P_3(t)}\,db_{23}(t) \\ dP_3(t) &= c_1P_3(t)(-P_1(t)+P_2(t))dt \\ &\quad +\sqrt{c_2P_3(t)P_1(t)}\,db_{31}(t)+\sqrt{c_2P_3(t)P_2(t)}\,db_{32}(t), \end{aligned}$$

ここで $b_{ij}(t)$ $(i>j)$ はたがいに独立な標準 Brown 運動とし，$b_{ij}(t)+b_{ji}(t)=0$ が成り立つものとする．式 (1) と同様な結果を Ito の公式をもちいて示すことができる．すなわち

$$E(P_1(t+dt)P_2(t+dt)P_3(t+dt) \mid P_1(t)P_2(t)P_3(t)) = (1-{}_3C_2c_2dt)P_1(t)P_2(t)P_3(t)$$

となる．

式 (2) を次のように拡張した系を考える．

$$(3) \qquad \frac{d}{dt}P_i = c_1P_i\left(\sum_{j=1}^{s}P_{i-j}-\sum_{j=1}^{s}P_{i+j}\right)+\sum_{j=1}^{2s+1}\sqrt{c_2P_iP_j}\,db_{ij}(t), \qquad i=1, 2, \ldots, 2s+1,$$

ここで $b_{ij}(t)$ $(i>j)$ はたがいに独立な標準 Brown 運動とし，$b_{ij}(t)+b_{ji}(t)=0$ が成り立つものとする．$c_2=0$ の場合は $s+1$ 個の保存量 I_r, $r=1, 2, \ldots, s+1$ を持つ．例えば $s=2$ の場合

$$\begin{aligned} I_1 &= P_1+P_2+P_3+P_4+P_5 \\ I_2 &= P_1P_2P_4+P_2P_3P_5+P_3P_4P_1+P_4P_5P_2+P_5P_1P_3 \\ I_3 &= P_1P_2P_3P_4P_5 \end{aligned}$$

となる(Itoh (1973, 1979, 1987), 伊藤(1977))．$c_2>0$ の場合

$$E(I_r(t+dt) \mid I_r(t)) = (1-{}_{2r+1}C_2c_2dt)I_r$$

となる．

参 考 文 献

Itoh, Y. (1973). On a ruin problem with interaction, *Ann. Inst. Statist. Math.,* **25**, 635-641.

伊藤栄明 (1977). 種競合のモデルとその性質, *Seminar on Probability,* **44**, 141-146.

Itoh, Y. (1979). Random collision models in oriented graphs, *J. Appl. Probab.,* **16**, 36-44.

Itoh, Y. (1987). Integrals of a Lotka-Volterra system of odd number of variables, *Progr. Theoret. Phys.,* **78**, 507-510.