非ガウス外乱を受ける確率過程の研究

岡崎 卓

1. はじめに

風波によって動揺する船体の変位など，外乱を受けて確率的に発展する変数の確率分布を求めるには，いわゆる Fokker-Planck (FP)方程式が用いられる．しかしこの方程式は白色ガウス過程に従う外乱に対してのみ正しく成り立つ．係留浮体（海上の石油プラント等大型構造物を指す）の変位分布がその頂点付近ではガウス分布をなすものの，裾では指数関数的に広く延びる事実は，外乱の非ガウス性によるものと推測されているが，このような場合 FP 方程式は直ちには適用できない．本報告では，任意の外乱に対して有効であり，且つ外乱の非ガウス性を鋭敏に反映する新たな FP 方程式の導出について述べる．

2. 一般化 Fokker-Planck 方程式

外乱 W の影響下に発展する確率変数 U の方程式を

$$\frac{d}{dt}U=M(U)+\mu(W) \tag{2.1}$$

とする．ここに M はこの系の基本的構造を表わし，μ は外乱 W の作用形式を示す(ここでは μ が U に依存しないものとする)．外乱 W が白色ガウス過程 $\nu(\cdot)$ によって駆動され，$\frac{d}{dt}W=N(W)+\nu(t)$ なる形の方程式に従うとすれば，変数 U の確率密度 $f(U,t)$ の方程式を射影子法によって導くことができる（Okasaki (1991))；

$$\frac{\partial}{\partial t}f(U,t)=-\frac{\partial}{\partial U}M(U)f(U,t)+\int_0^t ds\int dVD(U,V,t,s)\frac{\partial}{\partial V}f(V,s). \tag{2.2}$$

この方程式は任意の外乱に対して成立する点で FP 方程式の一般化を実現しているが，拡散係数 D の表示に射影子をはじめとする形式的作用素が含まれているため，このままでは実用に供し得ない．

3. 一般化 FP 方程式のくり込み近似

前章の方程式 (2.2) を実用可能な形に変換する一つの方法は，外乱項 $\mu(W)$ によって D および f を摂動展開することであるが，単なる展開では確率密度 f の方程式に3階微分 $\left(\frac{\partial}{\partial U}\right)^3 f$ が出現し，“自由エネルギー” $\int dUf(U,t)\ln\frac{f(U,t)}{f_{st}(U)}$ (f_{st}: 定常密度）の単調減少性が保証されぬ等の不都合を招く．そこで M に代わる未知関数 $M_0, M_1, \ldots$ を導入し，方程式 (2.1) を

$$\frac{d}{dt}U=M_0(U)+\varepsilon M_1(U)+\varepsilon^2 M_2(U)+\cdots+\varepsilon\mu(W) \qquad (\text{但し } M=M_0+M_1+\cdots)$$

と書き替えた上で ε による摂動展開を行う．最終的に $\frac{\partial}{\partial t}f(U,t)$ を $f(U,t)$ で表現したとき，$\left(\frac{\partial}{\partial U}\right)^3 f$ が消えるように関数 $M_0, M_1, \ldots$ を定めると

$$\frac{\partial}{\partial t}f(U,t)=-\frac{\partial}{\partial U}M(U)f(U,t)+\left(\frac{\partial}{\partial U}\right)^2\lambda(U,t)f(U,t)$$

なる方程式が得られる．これは FP 方程式と同一の形式を有するが，高次微分 $\left(\frac{\partial}{\partial U}\right)^3 f$ の効果が拡散係数 λ にくり込まれている．統計的に定常な場合，このくり込みの条件および拡散係数は次の一連の方程

式で与えられる；

$$\frac{d}{dU}M_1(U)=\frac{S}{C}\frac{M(U)-\frac{a}{dU}\lambda(U)}{\lambda(U)}$$

$$S=\int_0^\infty\langle\mu(0)\mu(s_1)\mu(s_2)\rangle ds_1ds_2 \qquad (\mu(t)\equiv\mu(W(t)))$$

$$C=\int_0^\infty\langle\mu(0)\mu(s)\rangle sds$$

$$\lambda(U)=\lambda(U,\infty)=\int_0^\infty\langle\mu(0)\mu(s)\rangle R(U,-s)ds$$

$$R(U,t)=\left(\frac{\partial\boldsymbol{U}(t)}{\partial U}\right)^{-1},\quad \frac{d}{dt}\boldsymbol{U}(t)=M_0(\boldsymbol{U}),\quad \boldsymbol{U}(0)=U,\quad M_0+M_1=M.$$

このように，外乱の非ガウス性を端的に表わす量 S が拡散係数 λ に直接関与していることがこの“くり込まれた一般化 FP 方程式”の特徴である．この方程式を簡単な線形系 $M=-\alpha U$ $(\alpha>0)$ に適用し，下記の結果を得た．

- 密度関数 f は歪をもった高次の Cauchy 分布であり，
- 外乱の skewness の増加と共に f の裾が延びる．

参 考 文 献

Okasaki, T. (1991). Generalization of Fokker-Planck equations by means of a projection operator technique, Research Memo., No. 402, The Institute of Statistical Mathematics, Tokyo.

順序制約下でのオッズ比の推測

安 楽 和 夫*

ある要因とある病気の因果関係を調べるために，データを 2×2 分割表で表すことがある．例えば，喫煙者と非喫煙者を何人かずつ選び，両グループにおける肺癌の発症数を観測するものとする．その際，対象となる人々は均一でないので，なんらかの層別が必要となる．今，層別を K 個の年齢層によって行うと，K 個の 2×2 分割表が得られることになるが，これらの分割表の間には，年齢の増加に伴うなんらかの傾向が予見されるかも知れない．

今，i 番目の 2×2 分割表における発症数を，喫煙者数 m_i，非喫煙者数 n_i に対して x_i, y_i とし，それぞれ 2 項分布 $B(m_i, p_i), B(n_i, q_i)$ に従うものとする．$\psi_i=p_i(1-q_i)/\{q_i(1-p_i)\}$ で定義されるオッズ比は二つのグループの発症率の類似性，相違性を表す尺度として有力なものである．ただし，オッズ比を最尤推定量 $\psi_i=x_i(n_i-y_i)/\{y_i(m_i-x_i)\}$ で推定する場合，0 セルがあると推定値が ∞ になったり，特定できなくなる場合が生じるので，ψ_i を単調変換した $\tau_i=\psi_i/(1+\psi_i)$ を考え，仮定「$\tau_1\leqq\cdots\leqq\tau_K$」の下での，$\tau_1, \ldots, \tau_K$ の同時推定を考える．なお，0 セルの場合は $n_i/(m_i+n_i)$ 等により定義するものとする．

各 τ_i あるいはいくつかの層に共通の τ を推定する方法で有力なものとしては，条件付最尤推定量とマンテル-ヘンツェル推定量が挙げられる．条件付最尤推定量は推定方程式から求められるものであり，陽に表せないが，pool-adjacent-violators-algorithm の考えを推定方程式に適用することにより，$\tau_1\leqq\cdots\leqq\tau_K$ の下での τ の同時推定量を求めることができる．マンテル-ヘンツェル推定量については，同じアルゴリズムを適用して得られたものを同時推定量として定義する．

このようにして得られた推定量が，順序情報を用いない推定量に対してどれだけ改善するかを調べる

* 現 西南学院大学 文学部